Интегрируемость по Дарбу дискретных двумеризованных цепочек Тоды

С. В. Смирнов*

27 марта 2015 г.

Аннотация

В данной работе доказана полная интегрируемость по Дарбу полудискретных и дискретных двумеризованных цепочек Тоды, соответствующих простым алгебрам Ли серий A и C.

1 Введение

Вслед за бурным развитием теории интегрируемых систем в 70-80-х годах прошлого века сперва возник, а затем стал стремительно нарастать интерес к проблеме дискретизации известных интегрируемых систем. Поскольку в настоящее время есть несколько господствующих (но не всегда эквивалентных) подходов к интегрируемости, при дискретизации той или иной интегрируемой системы обычно выбирается какое-нибудь определение интегрируемости и делаются попытки осуществить переход к дискретной системе, которая также обладает этим свойством и в континуальном пределе сходится к исходному непрерывному аналогу. Основными критериями интегрируемости обычно является наличие достаточного количества законов сохранения или первых интегралов, наличие симметрий, представимость в форме Лакса или существование многосолитонных решений.

В теории гиперболических уравнений вида

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \tag{1}$$

естественным аналогом первых интегралов являются интегралы по направлениям x и y, т.е. функции динамических переменных, такие, что их полные производные в силу уравнения (1) по переменным x и y соответственно равны нулю. Однако, здесь есть очень существенная разница с одномерным случаем: всякое обыкновенное дифференциальное уравнение обладает первыми интегралами (которые при этом может быть очень трудно найти и невозможно выразить в квадратурах). А для гиперболических уравнений вида (1) наличие x- и y-интегралов является событием исключительным.

В данной работе мы исследуем полудискретные и число дискретные аналоги так называемых *обобщенных двумеризованных цепочек Тоды*, обладающие достаточным количеством независимых интегралов по двум направлениям (т.е. в полудискретном случае — достаточным количеством n-интегралов и x-интегралов, а в чисто дискретном случае — достаточным количеством n-интегралов и m-интегралов).

Изучение различных цепочек Тоды имеет уже довольно большую историю. Одномерная цепочка Тоды была впервые введена М. Тодой в 1967 году в работе [1] в связи с задачей о

*Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова. E-mail: ssmirnov@higeom.math.msu.su

системе частиц на прямой с экспоненциальным взаимодействием ближайших соседей. Затем Богоявленским в 1976 году в работе [2] были рассмотрены и изучены обобщенные одномерные цепочки Тоды, соответствующие простым алгебрам Ли. В конце 70-х–начале 80-х годов прошлого века практически одновременно появилось несколько работ, посвященных изучению обобщенных двумеризованных цепочек Тоды (см.[3]–[7]). В 1991 году Сурисом в работе [8] были изучены одномерные дискретные обобщенные цепочки Тоды.

Шабатом и Ямиловым [6] в 1981 году были рассмотрены так называемые *системы экспоненциального типа*, т.е. системы гиперболических уравнений в частных производных вида

$$u_{xy}(j) = \exp\left(\sum_{k=1}^{r} a_{jk} u(k)\right), \quad j = 1, 2, \ldots, r, \tag{2}$$

где a_{jk} — постоянные коэффициенты, а функции $u(j)$ зависят от переменных x и y. Нетрудно проверить, что если матрица $K = (a_{jk})$ является матрицей Картана простой алгебры Ли серии A, то соответствующая система вида (2) сводится к двумеризованной цепочке Тоды

$$q_{xy}(j) = \exp(q(j+1) - q(j)) - \exp(q(j) - q(j-1)), \quad j = 0, 1, \ldots, r, \tag{3}$$

с тривиальными граничными условиями $q(-1) \equiv \infty$, $q(r) \equiv -\infty$. Системы экспоненциального типа, соответствующие простым алгебрам Ли других серий, иногда называют *обобщенными цепочками Тоды*. В работах [6, 7] было введено понятие *характеристической алгебры* для систем вида (2) и показано, что характеристическая алгебра неприводимой экспоненциальной системы конечномерна тогда и только тогда, когда соответствующая матрица K является матрицей Картана простой алгебры Ли. А конечномерность характеристической алгебры, в свою очередь, эквивалентна существованию у системы полного набора x- и y-интегралов.

Как известно, в случае $r = 1$ цепочка Тоды (3) сводится к уравнению Лиувилля, которое было изучено еще в 1853 году [9]. В 1999 году Адлером и Старцевым в работе [10] были построены и изучены полудискретный и дискретный аналоги уравнения Лиувилля. Предпринимались и другие попытки построения и изучения дискретных аналогов систем экспоненциального типа. В работе [11] было построено представление Лакса для чисто дискретного аналога обобщенной цепочки Тоды, соответствующей серии A, а в работе [12] — для чисто дискретного аналога цепочек серии C. В статье [13] был изучен полудискретный аналог цепочки Тоды серии C.

В работе [14] Хабибуллиным, Желтухиным и Янгубаевой для построения полудискретных аналогов систем экспоненциального типа был использован систематический подход, основанный на идее о том, что “правильная” дискретизация должна сохранять интегралы соответствующей непрерывной системы. Затем в статье [15] этот же подход был использован для построения чисто дискретных аналогов обобщенных цепочек Тоды. В обоих случаях уже известные к тому моменту дискретные аналоги являются частными случаями этих (полу)дискретных систем экспоненциального типа.

Структура данной работы такова: в разделе 2 изложены две достаточно простые конструкции, позволяющие строить x- и y-интегралы для цепочки Тоды серии A и ее редукций в непрерывном случае; первый метод основан на использовании нелокальных переменных, построенных А. Б. Шабатом в работе [16], а второй — на использовании преобразований Дарбу–Лапласа. В Разделе 3 для полудискретных цепочкек Тоды развиваются конструкции, аналогичные описанным в Разделе 2, и строится полный набор независимых x- и n-интегралов для цепочек Тоды серий A и C. Раздел 4 посвящен построению полных наборов m- и n-интегралов в чисто дискретном случае для цепочек серий A и C.

2 Непрерывный случай

2.1 Преобразования Дарбу–Лапласа

В математической физике интерес к цепочкам Тоды возник лишь во второй половине 20-го века. Тем не менее, задолго до этого двумеризованная цепочка Тоды появилась в задачах классической дифференциальной геометрии: последовательности преобразований Дарбу–Лапласа, приводящие к уравнениям цепочки Тоды, использовались еще в 19 веке в теории сопряженных систем координат (см., например, [17]). Мы, однако, не будем углубляться в дифференциально-геометрическую природу цепочек Тоды, а лишь приведем необходимую для дальнейшего изложения конструкцию вывода соответствующих уравнений.

Будем говорить, что два линейных гиперболических оператора второго порядка

$$\mathcal{L} = \partial_x\partial_y + a\partial_x + b\partial_y + c \quad \text{и} \quad \hat{\mathcal{L}} = \partial_x\partial_y + \hat{a}\partial_x + \hat{b}\partial_y + \hat{c}$$

от двух переменных связаны *преобразованием Дарбу–Лапласа*, если найдутся такие операторы первого порядка $\mathcal{D} = \alpha\partial_x + \beta\partial_y + \gamma$ и $\hat{\mathcal{D}} = \hat{\alpha}\partial_x + \hat{\beta}\partial_y + \hat{\gamma}$ такие, что выполнено соотношение

$$\hat{\mathcal{L}}\mathcal{D} = \hat{\mathcal{D}}\mathcal{L}. \tag{4}$$

Нетрудно проверить, что оператор $\mathcal{L}$ можно представить в следующем виде:

$$\mathcal{L} = (\partial_x + b)(\partial_y + a) + k = (\partial_y + a)(\partial_x + b) + h,$$

где функции k и h определяются равенствами $k = c - ab - a_x$ и $h = c - ab - b_y$ и называются *инвариантами Лапласа* оператора $\mathcal{L}$[1]. Операторное соотношение (4) эквивалентно следующей системе дифференциальных уравнений на коэффициенты участвующих в нем операторов:

$$\begin{cases} \alpha - \hat{\alpha} = 0 \\ \beta - \hat{\beta} = 0 \\ \alpha_y + \alpha\hat{a} - \hat{\alpha}a = 0 \\ \beta_x + \beta\hat{b} - \hat{\beta}b = 0 \\ \alpha_x + \beta_y + \alpha\hat{b} - \hat{\alpha}b + \beta\hat{a} - \hat{\beta}a + \gamma - \hat{\gamma} = 0 \\ \hat{\mathcal{L}}(\alpha) - \hat{\alpha}(c + a_x) - \hat{\beta}a_y + \gamma_y + \hat{a}\gamma - \hat{\gamma}a = 0 \\ \hat{\mathcal{L}}(\beta) - \hat{\beta}(c + b_y) - \hat{\alpha}b_x + \gamma_x + \hat{b}\gamma - \hat{\gamma}b = 0 \\ \hat{\mathcal{L}}(\gamma) - \hat{\alpha}c_x - \hat{\beta}c_y - \hat{\gamma}c = 0 \end{cases}. \tag{5}$$

Общее описание всех операторов преобразования $\mathcal{D}$ для заданного гиперболического оператора $\mathcal{L}$, т.е. полное решение системы (5), является открытой задачей (см. [18]). Мы лишь изучим некоторое частное решение этой задачи, т.е. будем рассматривать операторы преобразования вида $\mathcal{D} = \partial_x + \gamma$. В данном система (5) приводит к уравнениям

$$\hat{k} = h, \quad \hat{h} = 2h - k + (\ln h)_{xy}, \tag{6}$$

где $\hat{k}$ и $\hat{h}$ — инварианты оператора $\hat{\mathcal{L}}$. Отметим, что система (6) появлялась еще у Дарбу [17].

Рассмотрим теперь последовательность гиперболических операторов $\ldots, \mathcal{L}_{j-1}, \mathcal{L}_j, \mathcal{L}_{j+1}, \ldots$, в которой любые два соседних оператора связаны преобразованиями Дарбу–Лапласа указанного выше вида. Тогда соответствующая система операторных уравнений сводится к цепочке

$$(\ln h(j))_{xy} = h(j-1) - 2h(j) + h(j+1), \tag{7}$$

[1]Функции k и h называются инвариантами, поскольку они инвариантны относительно калибровочных преобразований $\mathcal{L} \mapsto \bar{\mathcal{L}} = \omega^{-1}\mathcal{L}\omega$, где $\omega = \omega(x, y)$.

где $h(j)$ и $k(j)$ — инварианты оператора $\mathcal{L}_j$, причем $k(j) = h(j-1)$ для всех j. Нетрудно убедиться в том, что замена $h(j) = \exp(q(j+1) - q(j))$ приводит цепочку (7) к виду

$$q_{xy}(j) = \exp(q(j+1) - q(j)) - \exp(q(j) - q(j-1)), \tag{8}$$

а замена $h(j) = u_{xy}(j)$ — к виду

$$u_{xy}(j) = \exp(u(j-1) - 2u(j) + u(j+1)). \tag{9}$$

Легко заметить, что система (9) (точнее, ее конечное замыкание граничными условиями вида $u(-1) = u(r) = -\infty$ для некоторого натурального r) представляет собой частный случай экспоненциальной системы (2), соответствующий матрице Картана серии A. Уравнения (7)–(9) являются различными формами записи *двумеризованной цепочки Тоды*.

Рассмотрим теперь конечные цепочки Тоды, т.е. системы экспоненциального типа (2), где K — матрица Картана одной из бесконечных серий A–D простых алгебр Ли (мы не будем здесь рассматривать цепочки Тоды, соответствующие исключительным алгебрам Ли). Каждая из этих систем получается наложением некоторых граничных условий на бесконечную цепочку Тоды (8). Приведем в явном виде условия обрыва, соответствующие сериям A–D в терминах переменной $q(j)$. Цепочка серии A порождается граничными условиями вида

$$q(-1) = \infty, \quad q(r+1) = -\infty \tag{10}$$

для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Цепочка серии B порождается граничными условиями вида

$$q(0) = 0, \quad q(r+1) = -\infty \tag{11}$$

для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Цепочка серии C задается условиями вида

$$q(0) = -q(1), \quad q(r+1) = -\infty, \tag{12}$$

а цепочка серии D — несколько более сложным условием:

$$q(0) = -\ln\left(e^{q(2)} - \frac{q_x(1)q_y(1)}{2\operatorname{sh} q(1)}\right), \quad q(r+1) = -\infty. \tag{13}$$

В одномерном случае условие обрыва (13) для серии D было найдено в работе [19], а в двумерном — в работе [20].

2.2 Нелокальные переменные

Хорошо известно, что симметрии бесконечной цепочки Тоды в двумерном случае (в отличии от одномерного случая) не выражаются в терминах динамических переменных — для их построения необходимо ввести дополнительные нелокальные переменные.

Введем обозначение $q_x(j) = b(j)$; тогда цепочка Тоды (8) может быть записана следующим образом:

$$b_y(j) = h(j) - h(j-1). \tag{14}$$

Определим нелокальные переменные $b^{(1)}(j)$ равенствами

$$\partial_x b(j) = b^{(1)}(j) - b^{(1)}(j-1), \quad \partial_y b^{(1)}(j) = \partial_x h(j),$$

совместность которых гарантируется цепочкой Тоды (14):

$$\partial_y \partial_x b(j) = \partial_y \left(b^{(1)}(j) - b^{(1)}(j-1)\right) = \partial_x \left(h(j) - h(j-1)\right) = \partial_x \partial_y b(j).$$

Далее, необходимо определить производные $\partial_x b^{(1)}(j)$, однако это потребует введения нелокальностей $b^{(2)}(j)$ следующего порядка. Положим

$$\partial_x b^{(1)}(j) = b^{(1)}(j)\,(b(j+1) - b(j)) + b^{(2)}(j) - b^{(2)}(j-1);$$

тогда условие совместности $\partial_y \partial_x b^{(1)}(j) = \partial_x \partial_y b^{(1)}(j)$, как нетрудно проверить, приведет к следующему соотношению:

$$\partial_y b^{(2)}(j) = h(j) b^{(1)}(j+1) - h(j+1) b^{(1)}(j).$$

Непосредственное индуктивное рассуждение показывает, что справедливо следующее

Предложение 1. *Нелокальные переменные $b^{(k)}(j)$, где $k = 2, 3, \ldots$, связаны соотношениями*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_y b^{(k)}(j) & = & h(j) b^{(k-1)}(j+1) - h(j+k-1) b^{(k-1)}(j) \\ \partial_x b^{(k)}(j) & = & b^{(k)}(j)\,(b(j+k) - b(j)) + b^{(k+1)}(j) - b^{(k+1)}(j-1) \end{array} \right. , \tag{15}$$

причем совместность этих равенств для каждого k обеспечивается первым из равенств (15) для $k+1$.

Формулы (15) были получены А. Б. Шабатом в работе [16] для построения иерархии высших симметрий бесконечной двумеризованной цепочки Тоды.

Будем говорить, что функция $I = I(x, y, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx}, \ldots)$ является *y-интегралом* гиперболической системы

$$\mathbf{u}_{xy} = F(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx}, \ldots), \tag{16}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_r)$, если ее полная производная по y в силу системы (16) равна нулю: $D_y(I) = 0$ (при этом предполагается, что функция I зависит не только от переменной x). Аналогичным образом вводится понятие x-интеграла.

Пример 1. Нетрудно проверить, что функции

$$I = u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 \quad \text{и} \quad J = u_{yy} - \frac{1}{2} u_y^2 \tag{17}$$

являются y- и x-интегралами уравнения Лиувилля

$$u_{xy} = \exp u \tag{18}$$

соответственно.

Формальные интегралы и симметрии бесконечной цепочки Тоды могут быть выражены в терминах нелокальных переменных $b^{(k)}(j)$. Например, формулы

$$\begin{array}{rcl} q_t(j) & = & b^2(j) + b^{(1)}(j) + b^{(1)}(j-1), \\ q_t(j) & = & b^3(j) + b^{(2)}(j) + b^{(2)}(j-1) + b^{(2)}(j-2) + \\ & + & b^{(1)}(j)\,(2b(j) + b(j+1)) + b^{(1)}(j-1)\,(2b(j) + b(j-1)) \end{array}$$

задают симметрии цепочки (8), а функции

$$I_2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(b^2(j) + 2b^{(1)}(j) \right) \quad \text{и} \quad I_3 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(b^3(j) + 3b^{(1)}(j)(b(j) + b(j+1)) + 3b^{(2)}(j) \right)$$

являются ее y-интегралами (см. [16]). Однако, важнейшим обстоятельством является то, что в случае цепочек Тоды серий A–D все нелокальности исчезают. Более точно, имеет место следующая

Теорема 1. *При обрыве бесконечной цепочки Тоды с помощью граничных условий (10), соответствующих серии A, все нелокальные переменные могут быть выражены через динамические переменные $b(j)$ и их производные по переменной x.*

Доказательство.

Легко заметить, что из вида уравнений (15) следует, что если мы знаем все функции $b^{(k)}(j)$ при некотором фиксированном j, то мы можем выразить через них и через динамические переменные все нелокальности вида $b^{(k)}(j+1)$, затем — вида $b^{(k)}(j+2)$, и т.д. Поскольку в терминах переменных $h(j)$ условие обрыва (10) принимает вид $h(-1) = h(r) = 0$, имеют место равенства

$$0 = \partial_y b^{(1)}(-1) = \partial_y b^{(2)}(-1) = \partial_y b^{(3)}(-1) = \dots$$

Поэтому, полагая на левом конце

$$0 = b^{(1)}(-1) = b^{(2)}(-1) = b^{(3)}(-1) = \dots, \tag{19}$$

мы, во-первых, не придем к противоречию, а, во-вторых, сможем последовательно выразить $b^{(1)}(j)$ через динамические переменные, затем $b^{(2)}(j)$ — через динамические переменные и уже найденные нелокальности, и т.д. Теорема доказана.

Пример 2. Нетрудно проверить, что для цепочки серии A в предположении (19), имеют место следующие явные формулы для нелокальностей:

$$b^{(1)}(j) = \sum_{i=0}^{j} b_x(i), \quad b^{(2)}(j) = \sum_{i=0}^{j} \left((j-i+1)b_{xx}(i) + b_x(i)(b(i) - b(j+1))\right), \tag{20}$$

где $j = 0, 1, \dots, r$.

Предложение 2. *Обобщенные цепочки Тоды серий B–D являются редукциями цепочки серии A.*

Доказательство.

Условия обрыва (11) на левом конце в терминах переменных $h(j)$ записывается в виде $h(-1) = h(0)$. Нетрудно проверить, что отсюда вытекают равенства

$$q(-j) = -q(j), \quad h(-j) = h(j-1), \quad j = 1, 2, \dots, r+1.$$

Легко видеть, что эта инволюция сводит цепочку серии A длины $2r+1$, задаваемую условием $h(-r-1) = h(r) = 0$ к цепочке серии B длины r отражением относительно полуцелой точки $-1/2$ (в терминах переменной h). Таким образом, цепочка серии B является редукцией цепочки серии A. Аналогично, условия обрыва (12) приводят к инволюции

$$q(-j) = -q(j+1), \quad h(-j) = h(j), \quad j = 0, 1, \dots, r,$$

т.е. цепочка серии C длины r является редукцией цепочки серии A длины $2r$, задаваемой условием $h(-r) = h(r) = 0$. С цепочкой серии D дело обстоит несколько сложнее, поскольку из явных формул 13 не следует, что она является редукцией цепочки серии A, и долгое время этот вопрос оставался открытым. Однако положительный ответ на него был дан Хабибуллиным в работе [21].

Следствие 1. *При обрыве бесконечной цепочки Тоды с помощью любого из граничных условий (11)–(13), все нелокальные переменные могут быть выражены через динамические переменные $b(j)$ и их производные по переменной x.*

В непрерывном случае разными авторами предлагались различные подходы, позволяющие находить интегралы вдоль характеристик для цепочек Тоды, соответствующих простым алгебрам Ли (см. [22, 23]). В работе [22] были построены полные наборы y-интегралов для всех цепочек серий A–D с помощью вронскианных формул, а в работе [23] были получены формулы для x- и y-интегралов этих цепочек при помощи обобщенных инвариантов Лапласа систем лиувиллевского типа. Однако, наша конструкция, основанная на использовании нелокальных переменных, позволяет очень просто находить y-интегралы для цепочек серий A–C и может быть обобщена на полудискретный случай. А именно, имеет место следующая

Теорема 2. *Функции $b^{(k)}(r)$, соответствующие любой из обобщенных цепочек серий A–D, являются y-интегралами этой цепочки.*

Доказательство.
Как мы уже показали, для этих цепочек все нелокальные переменные выражаются через динамические переменные и их производные по x. А то обстоятельство, что они являются y-интегралами, тривиально. В самом деле, для цепочки серии A имеет место равенство $h(j) = 0$ при $j \geqslant r$. Поэтому равенство $\partial_y b^{(k)}(r) = 0$ немедленно вытекает из первой из формул (15). Для остальных цепочек утверждение теоремы является следствием того факта, что они являются редукциями цепочки серии A.

Замечание 1. Поскольку в непрерывном случае цепочка Тоды симметрична относительно замены $x \leftrightarrow y$, x-интегралы находятся аналогично. Точнее, достаточно просто взять формулы для y-интегралов и поменять в них местами переменные y и x.

Определение 1. *Порядком* y-интеграла системы гиперболических уравнений вида (16) будем называть максимальный из порядков производных функций u_j, где $j = 1, 2, \ldots, r$, по переменной x, от которых этот интеграл зависит. Набор y-интегралов $I_1, I_2, \ldots, I_k$ порядков $d_1, d_2, \ldots d_k$ соответственно будем называть *независимым в главном*[2], если матрица

$$\frac{\partial(I_1, I_2, \ldots, I_k)}{\partial(\mathbf{u}^{(d_1)}_{x\ldots x}, \mathbf{u}^{(d_2)}_{x\ldots x}, \ldots, \mathbf{u}^{(d_k)}_{x\ldots x})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial I_1}{\partial u^{(d_1)}_{1,x\ldots x}} & \frac{\partial I_1}{\partial u^{(d_1)}_{2,x\ldots x}} & \cdots & \frac{\partial I_1}{\partial u^{(d_1)}_{r,x\ldots x}} \\ \frac{\partial I_2}{\partial u^{(d_2)}_{1,x\ldots x}} & \frac{\partial I_2}{\partial u^{(d_2)}_{2,x\ldots x}} & \cdots & \frac{\partial I_2}{\partial u^{(d_2)}_{r,x\ldots x}} \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial I_k}{\partial u^{(d_k)}_{1,x\ldots x}} & \frac{\partial I_k}{\partial u^{(d_k)}_{2,x\ldots x}} & \cdots & \frac{\partial I_k}{\partial u^{(d_k)}_{r,x\ldots x}} \end{pmatrix} \tag{21}$$

имеет ранг k. При этом систему (16) будем называть *интегрируемой по Дарбу*, если она обладает полными наборами

$$I_1, I_2, \ldots, I_r \quad \text{и} \quad J_1, J_2, \ldots, J_r$$

независимых в главном y- и x-интегралов соответственно.

Замечание 2. Отметим, что под интегрируемостью по Дарбу иногда подразумевается наличие явной формулы для общего решения рассматриваемого уравнения (см., например, [25]). Эта терминология, в некотором смысле, является более обоснованной, поскольку сам Дарбу, скорее, использовал именно такой подход. Тем не менее, мы будем называть интегрируемость по Дарбу наличие полного набора интегралов по обоим направлениям. Эти подходы, вообще говоря, не являются эквивалентными, но наличие достаточного количества x- и y-интегралов позволяет свести исходное уравнение в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которые в некоторых случаях удается проинтегрировать в квадратурах. Например, с помощью интегралов (17) можно получить общее решение

$$u(x, y) = \ln \frac{2f'(x)g'(y)}{(f(x) + g(y))^2}$$

[2] Терминология заимствована из работы [24].

уравнения Лиувилля (18), где f и g — произвольные функции одного аргумента. Есть и еще один подход к интегрируемости гиперболических уравнений, связанный с конечностью ряда Лапласа для линеаризованного уравнения [25, 26].

Приведем явные выражения для двух простейших y-интегралов порядков 1 и 2 соответственно для цепочки серии A произвольной длины:

$$b^{(1)}(r) = \sum_{j=0}^{r} b_x(j), \quad b^{(2)}(r) = \sum_{j=0}^{r} \left((r-j+1)b_{xx}(j) + b_x(j)b(j)\right). \tag{22}$$

Нетрудно видеть, что оба этих интеграла являются полными производными по x, так что в обоих случаях порядки можно понизить на единицу. Можно показать, что все y-интегралы, получаемые таким образом, являются полными производными по x.

Интегрируемость по Дарбу конечных цепочек Тоды хорошо известна. Сформулируем соответствующий результат и продемонстрируем, как наш подход позволяет его очень просто получить.

Теорема 3. *Двумеризованные цепочки Тоды серий A, B и C интегрируемы по Дарбу.*

Доказательство.

Мы уже показали, что функции $b^{(k)}(r)$, являются y-интегралами цепочки Тоды серии A длины r. Покажем, что для $k = 1, 2, \ldots r$ они независимы в главном. Выражения для интегралов $b^{(k)}(r)$ достоточно громоздки даже уже при небольших k, поэтому мы не будем пытаться получить явные формулы, а лишь посмотрим на зависимость этих интегралов от старших производных. Легко видеть, что порядок интеграла $b^{(k)}(r)$ равен k и что зависимость от старших производных линейна; тогда при $j = 0, 1, \ldots, r$ нелокальности выражаются через динамические переменные следующим образом:

$$b^{(k)}(j) = \sum_{i=0}^{j} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial^k b(i)}{\partial x^k} + \ldots, \tag{23}$$

где $a_{ij}^{(k)}$ — некоторые коэффициенты. Из формул (15) немедленно вытекает, что эти коэффициенты — числовые (т.е. не зависят от x и y) и что они удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij-1}^{(k)} + a_{ij}^{(k-1)} \quad \text{при} \quad i < j, \quad a_{jj}^{(k)} = a_{jj}^{(k-1)}, \quad a_{ij}^{(k)} = 0 \quad \text{при} \quad i > j.$$

Кроме того, из первой формулы (20) следует, что $a_{ij}^{(1)} = 1$ при любых $i \leqslant j$. Это означает, что, записывая при фиксированном i коэффициенты $a_{ij}^{(k)}$ в матрицу (где k — строчный индекс, а j — столбцовый), мы получим кусок треугольника Паскаля, повернутого на 45° против часовой стрелки:

$$i=0: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \ldots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & \ldots \\ 1 & 5 & 15 & 35 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad i=1: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \\ 0 & 1 & 3 & 6 & \ldots \\ 0 & 1 & 4 & 10 & \ldots \\ 0 & 1 & 5 & 15 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad i=2: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 5 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \ldots$$

Но поскольку нас интересуют функции $b^{(k)}(r)$, в каждой из этих матриц нам нужен лишь последний столбец. Таким образом,

$$\frac{\partial\left(b^{(1)}(r), b^{(2)}(r), \ldots, b^{(r+1)}(r)\right)}{\partial\left(\mathbf{b}_x, \mathbf{b}_{xx}, \ldots, \mathbf{b}_{x\ldots x}^{(r+1)}\right)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ r+1 & r & \ldots & 2 & 1 \\ \frac{(r+1)(r+2)}{2} & \frac{r(r+1)}{2} & \ldots & 3 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & r+1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Нетрудно показать, что определитель такой матрицы равен ± 1 в зависимости от r. Таким образом, построенный набор y-интегралов является независимым в главном. Легко заметить, что поскольку цепочка Тоды симметрична относительно замены $x \leftrightarrow y$, аналогичная конструкция даст полный набор независимых в главном x-интегралов. Таким образом, цепочки Тоды серии A интегрируема по Дарбу.

Поскольку цепочки Тоды серий B и C получаются из цепочки Тоды серии A удвоенной длины с помощью редукций, нам осталось показать, как выбрать полный набор интегралов, который после редукции окажется независимым в главном. Рассмотрим сперва цепочку серии B; поскольку она получается из цепочки серии A длины $2r+1$ редукцией

$$q(0) = 0, \quad q(-j) = -q(j), \quad h(-j) = h(j-1), \quad j = 1, 2, \ldots, r+1, \tag{25}$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, r$ и любого k имеем:

$$\frac{\partial^k b(-j)}{\partial x^k} = -\frac{\partial^k b(j)}{\partial x^k}. \tag{26}$$

Рассматриваемой редукции соответствует переход от переменных $b(-r), \ldots, b(r)$ к переменным $b(1), b(2), \ldots b(r)$; при этом ввиду формул (26) и (23) в соответствующей квадратной матрице вида (24) и размера $2r+1$ из столбца с номером $r+j$ будет вычитаться столбец с номером $r-j$ для всех $j = 1, 2, \ldots, r$. Поскольку столбцы исходной матрицы были линейно независимыми, столбцы полученной матрицы размера $(2r+1) \times r$ также будут линейно независимыми. А это означает, что в этой матрице можно выбрать r строк таким образом, что соответствующий минор будет ненулевым. Таким образом, полученная в результате редукции (25) цепочка серии B обладает полным набором независимых в главном y-интегралов, откуда в силу симметрии $x \leftrightarrow y$ следует ее интегрируемость по Дарбу.

Теперь рассмотрим цепочку серии C; она получается из цепочки серии A длины $2r$ редукцией

$$q(-j) = -q(j+1), \quad h(-j) = h(j), \quad j = 0, 1, \ldots, r.$$

Аналогично уже рассмотренному случаю, такой редукции соответствует переход от переменных $b(-r+1), \ldots, b(r)$ к переменным $b(1), b(2), \ldots b(r)$, причем в соответствующей матрице размера $2r \times 2r$ из столбца с номером $r+j$ будет вычитаться столбец с номером $r-j-1$ при всех $j = 0, 1, \ldots, r-1$. Как и в случае серии B, это дает интегрируемость по Дарбу. Теорема доказана.

Замечание 3. Поскольку явные формулы, задающие редукцию цепочки серии A на цепочку серии D не известны, аналогичный подход для доказательства интегрируемости по Дарбу цепочек Тоды серии D не годится, т.к. при редукции может нарушиться независимость в главном.

2.3 Производящая функция для интегралов

Теперь опишем еще одну конструкцию, позволяющую строить x- и y-интегралы для конечных двумеризованных цепочек Тоды. Особенностью данной конструкции является то, что наличие интегралов является непосредственным следствием того факта, что цепочка Тоды описывает последовательность гиперболических операторов, связанных преобразованиями Дарбу–Лапласа, а тривиальные граничные условия $h(-1) = h(r) = 0$ для серии A позволяют замкнуть эту последовательность с обоих концов факторизующимися операторами. Очень похожая конструкция дает, например, первые интегралы для периодического замыкания одевающей цепочки Веселова–Шабата, которая описывает последовательность одномерных операторов Шредингера, связанных преобразованиями Дарбу [27]. В этом случае производящая функция для первых интегралов также получается из операторного соотношения, которое дают преобразования Дарбу.

Теорема 4. *Коэффициенты дифференциального оператора*

$$\mathcal{B} = (\partial_x - q_x(r))(\partial_x - q_x(r-1)) \dots (\partial_x - q_x(0)) \tag{27}$$

дают полный набор независимых в главном y-интегралов для цепочки Тоды серии A, задаваемой условием $h(-1) = h(r) = 0$.

Доказательство.

Нетрудно проверить, что если гиперболические операторы

$$\mathcal{L} = \partial_x\partial_y + a\partial_x + b\partial_y + c \quad \text{и} \quad \hat{\mathcal{L}} = \partial_x\partial_y + \hat{a}\partial_x + b\hat{\partial}_y + \hat{c}$$

связаны преобразованием Дарбу–Лапласа вида $\mathcal{D} = \partial_x + \gamma$, то $\hat{a} = a$ и что при этом $\gamma = b$ (см. систему (5)). Это означает, что в рассматриваемом нами случае коэффициент при ∂_x у всех операторов в цепочке одинаков; поэтому без ограничения общности его можно положить равным нулю. Кроме того, из уравнений (5) вытекает равенство

$$\hat{b} = b - (\ln h)'_x,$$

которое с точностью до одновременного прибавления произвольной функции $\varphi(x, y)$ немедленно проводит к условию $b(j) = -q_x(j)$[3]. Таким образом, в терминах коэффициентов гиперболических операторов, оператор (27) принимает вид

$$\mathcal{B} = (\partial_x + b(r))(\partial_x + b(r-1)) \dots (\partial_x + b(0)).$$

Поскольку для всех j имеет место равенство $k(j) = h(j-1)$, выполнено соотношение $k(0) = h(-1) = 0$. Поэтому $\mathcal{L}_0 = (\partial_x + b(0))\partial_y$; кроме того, поскольку $h(r) = 0$, имеет место факторизация $\mathcal{L}_r = \partial_y(\partial_x + b(r))$. Значит, применяя последовательно преобразования Дарбу–Лапласа, получаем:

$$\begin{aligned}\mathcal{B} \circ \partial_y = (\partial_x + b(r)) \dots (\partial_x + b(1))(\partial_x + b(0))\partial_y = (\partial_x + b(r)) \dots (\partial_x + b(2))\mathcal{D}_1\mathcal{L}_0 = \\ = (\partial_x + b(r)) \dots (\partial_x + b(2))\mathcal{L}_1\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_r \dots \mathcal{D}_2\mathcal{L}_1\mathcal{D}_0 = \dots = \mathcal{L}_r\mathcal{D}_{r-1}\mathcal{D}_{r-2} \dots \mathcal{D}_0 = \\ = \partial_y(\partial_x + b(r)) \dots (\partial_x + b(0)) = \partial_y \circ \mathcal{B}.\end{aligned}$$

Таким образом, операторы $\mathcal{B}$ и ∂_x коммутируют, а это возможно лишь в том случае, если все коэффициенты оператора $\mathcal{B}$ не зависят от y в силу уравнений цепочки Тоды серии A, т.е. являются ее y-интегралами.

[3]Некоторое неудобство состоит в конфликте обозначений с разделом 2.2, где символ $b(j)$ обозначал функцию $q_x(j)$, но, тем не менее, это неудобство менее существенно, нежели конфликт в обозначениях со статьями [16] или [13], который был бы неизбежен при попытке согласовать обозначения внутри данной статьи; при таком подходе формулы в данной работе и в одной из работ [16] или [13] бы существенно отличались, что хуже.

Пусть $\mathcal{B} = \partial_x^{r+1} + I_0\partial_x^r + \dots + I_{r-1}\partial_x + I_r$; независимость в главном построенных y-интегралов следует из того, что соответствующая матрица частных производных

$$\frac{\partial\left(I_0, I_1, \dots, I_r\right)}{\partial\left(\mathbf{b}, \mathbf{b}_x, \dots, \mathbf{b}^{(r)}_{x\dots x}\right)}$$

является верхнетреугольной относительно побочной диагонали, причем все ее диагональные элементы отличны от нуля. Теорема доказана.

Пример 3. Приведем в явном виде полный набор y-интегралов для цепочки серии A при $r = 2$. Из формулы (27) имеем:

$$\begin{aligned}
&I_0 = -(q_x(0) + q_x(1) + q_x(2)),\\
&I_1 = q_x(0)q_x(1) + q_x(0)q_x(2) + q_x(1)q_x(2) - 2q_{xx}(0) - q_{xx}(1),\\
&I_2 = -q_x(0)q_x(1)q_x(2) + q_{xx}(0)(q_x(1) + q_x(2)) + q_{xx}(1)q_x(0) - q_{xxx}(0).
\end{aligned}$$

Замечание 4. Легко заметить, что построенные y-интегралы отличаются от тех, которые были получены с помощью нелокальных переменных в предыдущем разделе.

3 Полудискретный случай

3.1 Преобразования Дарбу–Лапласа

В полудискретном случае, как и в непрерывном, инварианты Лапласа гиперболических дифференциальных операторов второго порядка, связанных преобразованиями Дарбу-Лапласа, удовлетворяют системе дифференциально-разностных уравнений, называемой *полудискретной цепочкой Тоды*. Следуя работе [10], получим из этих соображений уравнения полудискретной цепочки Тоды.

Рассмотрим последовательность гиперболических дифференциально-разностных операторов

$$\mathcal{L}_j = \partial_x T + a_n(j)\partial_x + b_n(j)T + c_n(j),$$

где $a_n(j)$, $b_n(j)$ и $c_n(j)$ — функции, зависящие от дискретной переменной $n \in \mathbb{Z}$ и непрерывной переменной $x \in \mathbb{R}$, а T — оператор сдвига: $T\psi_n(x) = \psi_{n+1}(x)$. Легко видеть, что оператор $\mathcal{L}_j$ можно представить в следующих видах:

$$\mathcal{L}_j = (\partial_x + b_n(j))(T + a_n(j)) + a_n(j)k_n(j) = (T + a_n(j))(\partial_x + b_{n-1}(j)) + a_n(j)h_n(j),$$

где $k_n(j) = \frac{c_n(j)}{a_n(j)} - (\ln a_n(j))'_x - b_n(j)$ и $h_n(j) = \frac{c_n(j)}{a_n(j)} - b_{n-1}(j)$ — *инварианты Лапласа* дифференциально-разностного оператора $\mathcal{L}_j$.

Предположим, что любые два соседних оператора $\mathcal{L}_j$ и $\mathcal{L}_{j+1}$ связаны *преобразованием Дарбу–Лапласа*, т.е. удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{L}_{j+1}\mathcal{D}_j = \mathcal{D}_{j+1}\mathcal{L}_j,$$

где $\mathcal{D}_j = \partial_x + b_{n-1}(j)$. Тогда, записав последнее уравнение в терминах коэффициентов операторов, после преобразований получаем следующую систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l}
k_n(j+1) = h_n(j)\\
\left(\ln\frac{h_n(j)}{h_{n+1}(j)}\right)'_x = h_{n+1}(j+1) - h_{n+1}(j) - h_n(j) + h_n(j-1)
\end{array}\right. .$$

Вводя теперь новые переменные равенством $h_n(j) = \exp(q_{n+1}(j+1) - q_n(j))$, приходим к уравнениям *полудискретной цепочки Тоды*:

$$q_{n,x}(j) - q_{n+1,x}(j) = \exp(q_{n+1}(j+1) - q_n(j)) - \exp(q_{n+1}(j) - q_n(j-1)). \tag{28}$$

По аналогии с непрерывным случаем введем еще один набор переменных $u_n(j)$ равенством $h_n(j) = u_{n,x}(j) - u_{n+1,x}(j)$. Тогда цепочка Тоды перепишется в следующем виде:

$$u_{n,x}(j) - u_{n+1,x}(j) = \exp(u_{n+1}(j+1) - u_{n+1}(j) - u_n(j) + u_n(j-1)). \tag{29}$$

В статье [14] был предложен полудискретный аналог систем экспоненциального типа, который строится следующим образом. Пусть $K = (a_{jk})$ — некоторая квадратная матрица; тогда система

$$u_{n,x}(j) - u_{n+1,x}(j) = \exp\left(\sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}u_n(k) + \frac{a_{jj}}{2}(u_n(j) + u_{n+1}(j)) + \sum_{k=j+1}^{r} a_{jk}u_{n+1}(k)\right), \tag{30}$$

где $j = 1, 2, \ldots, r$, является естественным полудискретным аналогом экспоненциальной системы (2), соответствующей матрице K. Нетрудно видеть, что выражение внутри экспоненты в формуле (30) соответствует представлению матрицы K в виде суммы вернхе- и нижнетреугольных матриц, у которых соответствующие диагональные элементы равны. В континуальном пределе полудискретная экспоненциальная система (30) сходится к соответствующему непрерывному аналогу.

Как и в непрерывном случае, в полудискретном тоже интересно задаться вопросом об интегрируемых редукциях бесконечной цепочки Тоды. Нетрудно проверить, что тривиальные граничные условия $h_n(-1) = h_n(r) = 0$ приводят к экспоненциальной системе, соответствующей матрице Картана серии A. В терминах переменной q это замыкание задается условием обрыва $q_n(-1) = \infty$, $q_n(r+1) = -\infty$, а в терминах переменной u серии A соответствует система (29) с нулевыми граничными условиями $u(0) = u(r+1) = 0$.

Выясним, какие инволюции допускает полудискретная цепочка Тоды, записанная в инвариантах Лапласа, т.е. цепочка

$$\left(\ln \frac{h_n(j)}{h_{n+1}(j)}\right)'_x = h_{n+1}(j+1) - h_{n+1}(j) - h_n(j) + h_n(j-1). \tag{31}$$

Легко убедиться в том, что отражение $h_n(-j) = h_{n+j+c}(j-d)$ задает редукцию цепочки (31) лишь при $d = -2c$, т.е. в данном случае ситуация несколько отличается от непрерывного случая, где отражения относительно полуцелой и целой точек порождали редукции бесконечной цепочки, отвечающие сериям B и C соответственно. Полагая $c = 0$, получаем граничное условие $h_n(-j) = h_{n+j}(j)$ (это равенство должно быть выполнено при всех $n \in \mathbb{Z}$). При $j = 1$ в терминах переменной q это приводит к условию обрыва

$$q_{n+1}(0) - q_n(-1) = q_{n+2}(2) - q_{n+1}(1). \tag{32}$$

Цепочка (28), оборванная с помощью условия (32) на левом конце и с помощью тривиального условия $q_n(r+1) = -\infty$ — на правом, приводит к экспоненциальной системе с матрицей Картана серии C. Как и в непрерывном случае, цепочка серии C является редукцией не только бесконечной полудискретной цепочки, но и цепочки серии A удвоенной длины. В самом деле, нетрудно проверить, что инволюция $h_n(-j) = h_{n+j}(j)$ сводит цепочку серии A, задаваемую условием $h_n(-r) = h(r) = 0$, к цепочке серии C. Вопрос о том, являются ли полудискретные системы (30), соответствующие сериям B и D, редукциями цепочки серии A, до сих пор остается открытым.

Замечание 5. При редукции от цепочки серии A к цепочке серии C условия $h_n(-j) = h_{n+j}(j)$ позволяют выразить переменные $q_n(-r), q_n(-r+1), \dots, q_n(-1)$ через переменные

$$q_n(0), q_n(1), \dots, q_n(r)$$

и их сдвиги по n. Однако, на самом деле этот набор переменных не является независимым, поскольку соотношение

$$q_{n,x}(0) - q_{n+1,x}(0) = \exp(q_{n+1}(1) - q_n(0)) - \exp(q_{n+2}(2) - q_n(1))$$

позволяет выразить $q_n(0)$ через переменные $q_n(1), q_n(2), \dots, q_n(r)$ с точностью до констант интегрирования $\varkappa_n$, которые без ограничения общности можно считать нулевыми ввиду того, что замена $q_n(j) \to q_n(j) + \varkappa_{n-j}$ переводит решения цепочки Тоды в решения.

3.2 Нелокальные переменные и построение n-интегралов

Нахождение симметрий двумеризованной цепочки Тоды в полудискретном случае, точно также, как и в непрерывном, требует введения нелокальных переменных. Следуя работе [13], сформулируем основные утверждения и приведем формулы, аналогичные утверждениям и формулам раздела 2.2. Введем следующие обозначения: $\partial_n = I - T$, где I — тождественный оператор, и $b_n(j) = q_{n,x}(j)$. Тогда цепочка (28) запишется в следующем виде:

$$\partial_n b_n(j) = h_n(j) - h_n(j-1). \tag{33}$$

Определим нелокальные переменные $b_n^{(1)}(j)$ равенствами

$$\partial_x b_n(j) = b_n^{(1)}(j) - b_n^{(1)}(j-1), \quad \partial_n b_n^{(1)}(j) = \partial_x h_n(j),$$

совместность которых гарантируется цепочкой Тоды (33):

$$\partial_n \partial_x b_n(j) = \partial_n \left(b_n^{(1)}(j) - b_n^{(1)}(j-1) \right) = \partial_x \left(h_n(j) - h_n(j-1) \right) = \partial_x \partial_n b_n(j).$$

Далее, необходимо определить производные $\partial_x b_n^{(1)}(j)$, однако это потребует введения нелокальностей $b_n^{(2)}(j)$ следующего порядка. Положим

$$\partial_x b_n^{(1)}(j) = b_n^{(1)}(j) \left(b_{n+1}(j+1) - b_n(j) \right) + h_n(j) \left(b_n^{(1)}(j-1) - b_n^{(1)}(j) \right) + b_n^{(2)}(j) - b_n^{(2)}(j-1);$$

тогда условие совместности $\partial_n \partial_x b_n^{(1)}(j) = \partial_x \partial_n b_n^{(1)}(j)$, как нетрудно проверить, приведет к следующему соотношению:

$$\partial_n b_n^{(2)}(j) = h_n(j) b_{n+1}^{(1)}(j+1) - h_{n+1}(j+1) b_{n+1}^{(1)}(j).$$

Непосредственное индуктивное рассуждение показывает, что справедливо следующее

Предложение 3. *Нелокальные переменные $b_n^{(k)}(j)$, где $k = 2, 3, \dots$, связаны соотношениями*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_n b_n^{(k)}(j) & = & h_n(j) b_{n+1}^{(k-1)}(j+1) - h_{n+k-1}(j+k-1) b_{n+1}^{(k-1)}(j) \\ \partial_x b_n^{(k)}(j) & = & b_n^{(k)}(j) \left(b_{n+k}(j+k) - b_n(j) \right) + \\ & + & h_{n+k-1}(j+k-1) \left(b_n^{(k)}(j-1) - b_n^{(k)}(j) \right) + b_n^{(k+1)}(j) - b_n^{(k+1)}(j-1) \end{array} \right. , \tag{34}$$

причем совместность этих равенств для каждого k обеспечивается первым из равенств (34) для $k+1$.

В этой работе мы не будем обсуждать симметрии полудискретной цепочки Тоды и ее редукций (см. [13]), а сосредоточимся на изучении n- и x-интегралов этой системы. Будем называть функцию I, зависящую от динамических переменных, *n-интегралом* дифференциально-разностной системы, если ее разностная производная в силу системы раны нулю: $\partial_n I = 0$. Мы покажем, как с помощью нелокальных переменных построить полный набор n-интегралов для полудискретных цепочек серий A и C, а затем в следующем разделе предъявим явную формулу для x-интегралов этих цепочек.

Определение 2. *Порядком n-интеграла* дифференциально-разностной системы будем называть максимальный из порядков производных динамических переменных $u_n(j)$, где $j = 1, 2, \dots, r$, по переменной x, от которой этот интеграл зависит. Набор n-интегралов $I_1, I_2, \dots, I_k$ порядков $d_1, d_2, \dots d_k$ соответственно будем называть *независимым в главном*, если соответствующая матрица (21) из частных производных имеет ранг k. *Порядком x-интеграла* дифференциально-разностной системы будем называть максимальный из сдвигов d динамических переменных $u_{n+d}(j)$, где $j = 1, 2, \dots, r$, по переменной n, от которой этот интеграл зависит (при этом предполагается, что этот интеграл зависит от переменных $u_n(j)$, но не зависит от $u_{n-1}(j), u_{n-2}(j), \dots$). Набор x-интегралов $I_1, I_2, \dots, I_k$ порядков $d_1, d_2, \dots d_k$ соответственно будем называть *независимым в главном*, если матрица

$$\frac{\partial(I_1, I_2, \dots, I_k)}{\partial(\mathbf{u}_{n+d_1}, \mathbf{u}_{n+d_2}, \dots, \mathbf{u}_{n+d_k})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial I_1}{\partial u_{n+d_1}(1)} & \frac{\partial I_1}{\partial u_{n+d_1}(2)} & \cdots & \frac{\partial I_1}{\partial u_{n+d_1}(r)} \\ \frac{\partial I_2}{\partial u_{n+d_2}(1)} & \frac{\partial I_2}{\partial u_{n+d_2}(2)} & \cdots & \frac{\partial I_2}{\partial u_{n+d_2}(r)} \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial I_k}{\partial u_{n+d_k}(1)} & \frac{\partial I_k}{\partial u_{n+d_k}(2)} & \cdots & \frac{\partial I_k}{\partial u_{n+d_k}(r)} \end{pmatrix} \tag{35}$$

имеет ранг k. При этом дифференциально-разностную систему будем называть *интегрируемой по Дарбу*, если она обладает полными наборами

$$I_1, I_2, \dots, I_r \quad \text{и} \quad J_1, J_2, \dots, J_r$$

независимых в главном n- и x-интегралов соответственно.

Совершенно аналогично непрерывному случаю доказываются следующие утверждения.

Теорема 5. *При обрыве бесконечной полудискретной цепочки Тоды (28) с помощью тривиальных граничных условий, соответствующих серии A, все нелокальные переменные выражаются через динамические переменные $b_n(j)$ и их производные по переменной x.*

Поскольку полудискретная цепочка серии C длины r является редукцией цепочки серии A длины $2r + 1$, имеет место

Следствие 2. *В случае полудискретной цепочки серии C все нелокальные переменные выражаются через динамические переменные $b_n(j)$ и их производные по переменной x.*

Теорема 6. *Функции $b_n^{(k)}(r)$, соответствующие любой обобщенной цепочке серий A или C, является n-интегралами этой цепочки.*

Приведем явные выражения для двух простейших n-интегралов цепочки серии A произвольной длины r:

$$b_n^{(1)}(r) = \sum_{j=0}^{r} b_{n,x}(j), \quad b_n^{(2)}(r) = \sum_{j=0}^{r} \left((r - j + 1) b_{n,xx}(j) + b_{n,x}(j) b_n(j)\right)). \tag{36}$$

Замечание 6. Легко заметить, что явные формулы (36) для n-интегралов цепочек серии A совпадают с формулами (22) для y-интегралов в непрерывном случае, и это обстоятельство не является случайностью. При построении дискретных аналогов уже известных интегрируемых систем обычно ищут такие дискретизации, при которых сохраняются какие-нибудь атрибуты интегрируемости, такие, как, например, симметрии или интегралы. Именно этот эмпирический принцип был использован в работе [14] при построении полудискретных систем экспоненциального вида: искались такие полудискретные системы (при малых r), для которых y-интегралы соответствующих непрерывных аналогов являются n-интегралами.

Замечание 7. В работах [14, 28] вводится понятие характеристической алгебры для полудискретных систем экспоненциального типа. Как и в непрерывном случае, конечномерность характеристической алгебры по какому-то из направлений эквивалентна существованию интегралов по этому направлению. В работе [14] явно описаны характеристические алгебры для полудискретных систем экспоненциального типа некоторых малых размерностей. Из теоремы 5, в частности, следует конечномерность характеристической алгебры по направлению n для цепочек любой длины, соответствующих сериям A и C.

Замечание 8. Естественно было бы ожидать, что для полудискретной цепочки Тоды можно построить второй набор нелокалькых переменных, "зеркальный" относительно замены дискретной переменной n на непрерывную переменную x, который бы аналогичным образом позволил построить x-интегралы для цепочек серии A. Однако, на самом деле все оказывается не так просто: если такая конструкция и возможна, она далеко не очевидна — рассуждения, параллельные приведенным выше, наталкиваются на препятствия при попытке построения второго набора нелокальностей.

3.3 Явные формулы для интегралов

Совершенно аналогично непрерывному случаю, в полудискретноим случае тоже можно построить производящие функции для n- и x-интегралов цепочки серии A и ее редукций, наличие которых является непосредственным следствием структуры цепочки Тоды, связанной с преобразованиями Дарбу–Лапласа. Однако, поскольку переменные n и x не совсем симметрично входят в уравнения полудискретной цепочки, необходимо рассматривать преобразования Дарбу–Лапласа двух типов. Нетрудно проверить, что операторное соотношение $\hat{\mathcal{L}}\mathcal{D} = \hat{\mathcal{D}}\mathcal{L}$, где $\mathcal{D} = \alpha_n\partial_x + \beta_n T + \gamma_n$ и $\hat{\mathcal{D}} = \hat{\alpha}_n\partial_x + \hat{\beta}_n T + \hat{\gamma}_n$, эквивалентно следующей системе дифференциально-разностных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} - \hat{\alpha}_n = 0 \\ \beta_{n+1} - \hat{\beta}_n = 0 \\ \alpha_n \hat{a}_n - \hat{\alpha}_n a_n = 0 \\ \beta_{n+1,x} + \beta_{n+1}\hat{b}_n - \hat{\beta}_n b_{n+1} = 0 \\ \alpha_{n+1,x} + \alpha_{n+1}\hat{b}_n - \hat{\alpha}_n b_n + \beta_n \hat{a}_n - \hat{\beta}_n a_{n+1} + \gamma_{n+1} - \hat{\gamma}_n = 0 \\ \hat{a}_n \alpha_{n,x} + \hat{c}_n \alpha_n - \hat{\alpha}(c_n + a_{n,x}) + \hat{a}_n \gamma_n - \hat{\gamma}_n a_n = 0 \\ \hat{a}_n \beta_{n,x} + \hat{c}_n \beta_n - \hat{\beta}_n c_n - \hat{\alpha}_n b_{n,x} + \gamma_{n+1,x} + \hat{b}_n \gamma_{n+1} - \hat{\gamma}_n b_n = 0 \\ \hat{a}_n \gamma_{n,x} + \hat{c}_n \gamma_n - \hat{\alpha}_n c_{n,x} - \hat{\gamma}_n c_n = 0 \end{cases} . \tag{37}$$

Выбор $\alpha_n \equiv 1, \beta_n \equiv 0$, соответствующий преобразованиям Дарбу–Лапласа первого типа (по непрерывной переменной), приводит к условию $\gamma_n = b_{n-1}$. Как мы уже отмечали выше, для последовательности преобразований Дарбу–Лапласа из этой системы уравнений вытекают уравнения полудискретной цепочки Тоды (31) на переменную h, являющуюся одним из инвариантов Лапласа. При этом оказывается, что при всех j выполнены равенства $k_n(j+1) = h_n(j)$ и

$a_n(j+1)=a_n(j)$; последнее из этих равенств позволяет считать все коэффициенты $a_n(j)$ равными некоторой константе $\varkappa_n$[4]. Тогда, аналогично непрерывному случаю, операторы $\mathcal{B}=\mathcal{D}_r\mathcal{D}_{r-1}\dots\mathcal{D}_0$ и $T+\varkappa_n I$, где I — тождественный оператор, будут коммутировать, откуда, в свою очередь, следует, что коммутируют операторы $\mathcal{B}$ и T. Кроме того, из уравнений (37) вытекает, что

$$\hat{b}_n=b_{n-1}-(\ln h_n)'_x\,,$$

откуда нетрудно получить, что $b_n(j)=-q_{n+1,x}(j)$. Из этих соображений, как и в непрерывном случае, вытекает следующая

Теорема 7. *Коэффициенты дифференциального оператора*

$$\mathcal{B}=(\partial_x-q_{n,x}(r))(\partial_x-q_{n,x}(r-1))\dots(\partial_x-q_{n,x}(0))$$

дают полный набор независимых в главном n-интегралов для полудискретной цепочки Тоды серии A, задаваемой условием $h_n(-1)=h_n(r)=0$.

Рассмотрим теперь другой тип преобразований Дарбу–Лапласа, соответствующий выбору $\alpha_n\equiv 0,\beta_n\equiv 1$, при котором из системы (37) немедленно вытекает условие $\gamma_n=a_n$; кроме того, как и раньше, без ограничения общности можно считать все коэффициенты b_n нулевыми. Разница с уже рассмотренным случаем состоит в том, что соответствующая система дифференциально-разностных уравнений в данном случае сводится к следующему соотношению на инварианты Лапласа:

$$\left(\ln\frac{k_n(j)}{k_{n+1}(j)}\right)'_x=k_{n+1}(j-1)-k_{n+1}(j)-k_n(j)+k_n(j+1), \tag{38}$$

причем $h_n(j+1)=k_n(j)$ для всех j. Легко заметить, что система (38) сводится к цепочке Тоды (31) заменой $j\leftrightarrow -j$, так что второй тип преобразований Дарбу–Лапласа также приводит к полудискретной цепочке Тоды. Введем новые переменные $p_n(j)$ условием

$$k_n(j)=\exp(p_{n+1}(j)-p_n(j+1)),$$

тогда система (38) перепишется в виде

$$p_{n,x}(j)-p_{n+1,x}(j)=k_n(j-1)-k_n(j).$$

Полученное уравнение, как нетрудно проверить, заменой $q_n(j)=p_n(-j)$ сводится к уравнению (28). Отметим также, что в рассматриваемом нами случае из системы (37) вытекает соотношение

$$\hat{a}_n=\frac{a_{n+1}k_{n+1}}{k_n},$$

откуда следует, что $a_n(j)=\exp(p_n(j)-p_{n+1}(j))$. Все это вместе означает, что и в данном случае преобразования Дарбу–Лапласа приводят к производящей функции для x-интегралов полудискретной цепочки Тоды серии A с той лишь разницей, что порядок сомножителей в соответствующем операторе будет обратным из-за замены $j\leftrightarrow -j$. Таким образом, доказана

Теорема 8. *Коэффициенты разностного оператора*

$$\mathcal{A}=(T+\exp(q_n(0)-q_{n+1}(0)))(T+\exp(q_n(1)-q_{n+1}(1)))\dots(T+\exp(q_n(r)-q_{n+1}(r))) \tag{39}$$

дают полный набор независимых в главном x-интегралов для полудискретной цепочки Тоды серии A, задаваемой условием $h_n(-1)=h_n(r)=0$.

[4]Считать эти коэффициенты нулевыми, как мы делали в непрерывном случае, здесь нельзя, поскольку в определении инвариантов Лапласа для полудискретного оператора есть деление на a_n.

Замечание 9. Интегралы, даваемые формулой (39), нетрудно записать в явном виде. В самом деле, если $\mathcal{A} = T^{r+1} + J_r T^r + \dots + J_1 T + J_0$, то для коэффициентов J_k имеет место следующая формула:

$$J_k = \sum_{0 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant r} \exp(c_n(0) + \dots + c_n(i_1 - 1) + c_{n+1}(i_1 + 1) + \dots + c_{n+1}(i_2 - 1) +$$

$$+ c_{n+2}(i_2 + 1) + \dots + c_{n+k-1}(i_r - 1) + c_{n+k}(i_k + 1) + \dots + c_{n+k}(r)),$$

где $c_n(j) = q_n(j) - q_{n+1}(j)$. Простейшие из этих интегралов (при $r = 2$) были найдены в статье [14].

Предложение 4. *Полудискретные цепочки Тоды, соответствующие серии C, интегрируемы по Дарбу.*

Доказательство.

Поскольку цепочка серии C является редукцией цепочки серии A удвоенной длины, нам достаточно показать, что при этой редукции полные наборы n- и x-интегралов не теряют независимость в главном (точнее, что из этих наборов можно выбрать такие поднаборы, которые будут независимыми для редуцированной цепочки). Рассмотрим сперва полный набор n-интегралов для цепочки серии A и соответствующую матрицу размера $2r \times 2r$, составленную из их частных производных. Нам необходимо понять, что произойдет с ее правыми r столбцами после редукции. Легко заметить, что производные старших порядков входят в выражения для n-интегралов линейно, причем соответствующие коэффициенты постоянны. Кроме того, формулы, позволяющие выразить переменные $q_n(-r), q_n(-r+1), \dots, q_n(-1)$ и их сдвиги по n через динамические переменные $q_n(1), q_n(2), \dots, q_n(r)$ и их сдвиги, линейны. При дифференцировании этих формул будет появляться нелинейность, вызванная необходимостью выражать производные “сдвинутых” переменных в силу системы, однако на уровне старших производных формулы все равно будут оставаться линейными, поскольку выражение в силу цепочки Тоды понижает порядок производных на единицу. Все это означает, что при редукции к каждому из правых r интересующих нас столбцов рассматриваемой матрицы прибавится некоторая линейная комбинация других ее столбцов. Опишем явно это преобразование столбцов.

Легко видеть, что в силу условий замыкания для всех $j = 1, 2 \dots, r-1$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} b_n(-j) = b_{n+1}(-j+1) + b_{n+j}(j) - b_{n+j+1}(j+1) = b_n(-j+1) + b_n(j) - b_n(j+1) + \dots = \\ = \dots = b_n(0) + b_n(1) - b_n(j+1) + \dots, \quad (40) \end{aligned}$$

где троеточие обозначает зависимость от производных $q_n(j)$ нулевого порядка. Учитывая теперь очевидное соотношение

$$\partial_n \left(\sum_{j=-r+1}^{r} b_n(j) \right) = 0, \tag{41}$$

получаем, что сумма, стоящая в скобках в формуле (41), не зависит от n, т.е. является функцией от x. Поскольку одновременное прибавление ко всем динамическим переменным некоторой функции $\varphi(x)$ переводит решения в решения, без ограничения общности можно считать, что

$$\sum_{j=-r+1}^{r} b_n(j) = 0.$$

Подставляя теперь сюда выражения (40), на уровне старших по порядку производных слагаемых получаем следующее равенство:

$$0 = (r-1)(b_n(0) + b_n(1)) - (b_n(2) + b_n(3) + \dots + b_n(r)) + \sum_{j=0}^{r} b_n(j) + \dots$$

Таким образом, $b_n(0) = -b_n(1) + \dots$. Подставляя теперь полученное равенство в (40), окончательно получаем, что $b_n(-j) = -b_n(j+1) + \dots$, откуда следует, что искомое преобразование столбцов матрицы из частных производных n-интегралов, состоит в вычитании из столбца с номером $r + j$ столбца с номером j для всех $j = 1, 2, \dots, r$. А это означает, что полученные r столбцов будут линейно независимыми, т.е. из соответствующей матрицы размера $2r \times r$ можно выбрать ненулевой минор размера r. Значит, после редукции к серии C из набора n-интегралов можно выбрать r независимых в главном.

Покажем теперь, что при редукции не теряет независимость и построенный выше полный набор x-интегралов. Нетрудно видеть, что порядок x-интеграла J_k равен k, где $k = 0, 1, \dots 2r$, причем максимальный сдвиг d, с которым входит в явное выражение для J_k переменная $c_{n+d}(j)$, определяется формулой

$$d = \begin{cases} j + r - 1, & \text{если} \quad j < k - r + 1 \\ k, & \text{если} \quad j \geqslant k - r + 1 \end{cases},$$

где $j = -r + 1, \dots, r$. Покажем, что после редукции к серии C интегралы $J_{r+1}, J_{r+2}, \dots J_{2r}$ останутся независимыми. В самом деле, условие замыкания (32) приводит к соотношению

$$c_n(-j) = \sum_{i=0}^{j} c_{n+j}(i) - \sum_{i=2}^{j+1} c_{n+j+1}(i),$$

где $j = 1, 2, \dots, r - 1$. Это означает, что после редукции в выражения для интегралов J_k добавятся переменные $c_{n+d}(j)$ с максимальным сдвигом $d = n+r$ при $j = 2, 3, \dots r$ и с максимальным сдвигом $d = n + r - 1$ при $j = 0, 1$. Но переменная $c_n(0)$ выражается из соотношения

$$c_{n,x}(0) = h_n(0) - h_{n+1}(1),$$

причем эта подстановка не увеличивает порядок интегралов. Таким образом, редукция никак не повлияет на старшие сдвиги в выражениях для x-интегралов $J_{r+1}, J_{r+2}, \dots J_{2r}$. А поскольку исходная матрица (35) из частных производных была треугольной, соответствующая матрица, полученная после редукции, также будет треугольной и потому невырожденной. Значит, x-интегралы $J_{r+1}, J_{r+2}, \dots J_{2r}$ после редукции к серии C оказываются независимыми в главном. Предложение доказано.

4 Чисто дискретный случай

По аналогии с полудискретным случаем, в чисто дискретном случае, у гиперболических операторов второго порядка тоже определяются инварианты Лапласа и последовательность таких операторов, связанных преобразованиями Дарбу–Лапласа, сводится к чисто дискретной двумеризованной цепочке Тоды. Точнее, получаемая система уравнений на коэффициенты этих операторов после исключения некоторых неизвестных приводится к системе разностных уравнений на инварианты Лапласа, которая и называется чисто дискретной цепочкой Тоды. Следуя работе [10], выпишем основные формулы.

Рассмотрим последовательность гиперболических разностных операторов

$$\mathcal{L}_j = T_1 T_2 + a(j) T_1 + b(j) T_2 + c(j),$$

где $a(j)$, $b(j)$ и $c(j)$ — функции, зависящие от двух дискретных переменных $n, m \in \mathbb{Z}$, а T_1 и T_2 — операторы сдвига:

$$T_1 \psi_{n,m} = \psi_{n+1,m} \quad T_2 \psi_{n,m} = \psi_{n,m+1}.$$

Легко видеть, что оператор $\mathcal{L}_j$ можно представить в следующих видах:

$$\mathcal{L}_j = (T_1 + b_{n,m}(j))(T_2 + a_{n-1,m}(j)) + a_{n-1,m}(j)b_{n,m}(j)k_{n,m}(j) = \\ = (T_2 + a_{n,m}(j))(T_1 + b_{n,m-1}(j)) + a_{n,m}(j)b_{n,m-1}(j)h_{n,m}(j),$$

где $k_{n,m}(j) = \frac{c_{n,m}(j)}{a_{n-1,m}(j)b_{n,m}(j)} - 1$ и $h_{n,m}(j) = \frac{c_{n,m}(j)}{a_{n,m}(j)b_{n,m-1}(j)} - 1$ — *инварианты Лапласа* разностного оператора $\mathcal{L}_j$.

Предположим, что любые два соседних оператора $\mathcal{L}_j$ и $\mathcal{L}_{j+1}$ связаны *преобразованием Дарбу–Лапласа*, т.е. удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{L}_{j+1}\mathcal{D}_j = \mathcal{D}_{j+1}\mathcal{L}_j,$$

где $\mathcal{D}_j = T_1 + b_{n,m-1}(j)$. Тогда, записав последнее уравнение в терминах коэффициентов операторов, после преобразований получаем следующую систему уравнений на инварианты Лапласа:

$$\frac{h_{n,m+1}(j)h_{n-1,m}(j)}{h_{n,m}(j)h_{n-1,m+1}(j)} = \frac{(1 + h_{n,m}(j+1))(1 + h_{n-1,m+1}(j-1))}{(1 + h_{n,m}(j))(1 + h_{n-1,m+1}(j))}. \tag{42}$$

Вводя теперь новые переменные равенством $h_{n,m}(j) = \exp(q_{n+1,m-1}(j+1) - q_{n,m}(j))$, приходим к уравнениям

$$\exp(q_{n+1,m+1}(j) + q_{n,m}(j) - q_{n+1,m}(j) - q_{n,m+1}(j)) = \frac{1 + \exp(q_{n+1,m}(j+1) - q_{n,m+1}(j))}{1 + \exp(q_{n+1,m}(j) - q_{n,m+1}(j-1))}. \tag{43}$$

Замена $q_{n,m}(j) = u_{n,m}(j) - u_{n,m}(j-1)$ приводит последнюю цепочку к виду

$$\exp(u_{n+1,m+1}(j) + u_{n,m}(j) - u_{n+1,m}(j) - u_{n,m+1}(j)) = \\ = 1 + \exp(u_{n,m+1}(j-1) - u_{n,m+1}(j) - u_{n+1,m}(j) + u_{n+1,m}(j+1)). \tag{44}$$

Уравнения (42)–(44) представляют собой различные формы записи бесконечной чисто дискретной двумеризованной цепочки Тоды. Цепочка (44) является частным случаем введенных в работе [15] *дискретных экспоненциальных систем*, являющихся чисто дискретным аналогом систем (2),(30):

$$\exp(u_{n+1,m+1}(j) + u_{n,m}(j) - u_{n+1,m}(j) - u_{n,m+1}(j)) = \\ = 1 + \exp\left(\sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}u_{n,m+1}(k) + \frac{a_{jj}}{2}(u_{n,m+1}(j) + u_{n+1,m}(j)) + \sum_{k=j+1}^{r} a_{jk}u_{n+1,m}(k)\right),$$

где $j = 1, 2, \ldots, r$.

Замечание 10. Чисто дискретная двумеризованная цепочка Тоды (44) является частным случаем известного уравнения Хироты, см. [29].

Чисто дискретный аналог цепочки, соответствующей серии A, получается наложением тривиальных граничных условий $h_{n,m}(-1) = h_{n,m}(r) = 0$, которые в терминах переменной $q_{n,m}$ переписываются следующим образом:

$$q_{n,m}(-1) = \infty, \quad q_{n,m}(r+1) = -\infty. \tag{45}$$

В чисто дискретном случае, как и в полудискретном, цепочка (42) допускает отражение лишь относительно целой точки. На языке инвариантов Лапласа эта инволюция при $j = 0$ имеет вид

$$h_{n,m}(-j) = h_{n+j,m-j}(j)$$

(здесь мы рассматриваем отражение относительно нуля); переписывая ее в терминах переменной $q_{n,m}$, приходим к следующему условию (при $j = 1$):

$$q_{n+1,m-1}(0) - q_{n,m}(-1) = q_{n+2,m-2}(2) - q_{n+1,m-1}(1). \tag{46}$$

Дискретная цепочка, оборванная на левом конце этим условием, а на правом — тривиальным, является чисто дискретным аналогом цепочки Тоды, соответствующей серии C, сходится к ней в континуальном пределе и является редукцией цепочки серии A удвоенной длины. Граничное условие (46) было найдено в работе [12].

Замечание 11. Естественно было бы ожидать, что как и в непрерывном и полудискретном случаях, в данном случае для нахождения симметрий и интегралов вдоль характеристик можно было бы использовать нелокальные переменные. Однако, построение нелокальных переменных наталкивается на определенные препятствия. Другой метод для построения симметрий дискретных экспоненциальных систем небольшого порядка, соответствующих простым алгебрам Ли, был использован в работе [15].

Структура двумеризованной цепочки Тоды, связанная с последовательностью преобразований Дарбу–Лапласа, позволяет построить полный набор независимых в главном m- и n-интегралов и в чисто дискретном случае. Совершенно аналогично уже разобранным случаям доказывается следующая

Теорема 9. *Цепочка (43) с тривиальными граничными условиями (45) интегрируема по Дарбу. Коэффициенты разностного оператора*

$$\mathcal{A} = (T_1 + \exp(q_{n,m}(0) - q_{n+1,m}(0)))(T_1 + \exp(q_{n,m}(1) - q_{n+1,m}(1)))\dots(T_1 + \exp(q_{n,m}(r) - q_{n+1,m}(r)))$$

дают полный набор независимых в главном m-интегралов этой системы. Явный вид этих m-интегралов определяется формулой

$$J_k = \sum_{0 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant r} \exp(c_{n,m}(0) + \dots + c_{n,m}(i_1 - 1) + c_{n+1,m}(i_1 + 1) + \dots + c_{n+1,m}(i_2 - 1) + \\ + c_{n+2,m}(i_2 + 1) + \dots + c_{n+k-1,m}(i_r - 1) + c_{n+k,m}(i_k + 1) + \dots + c_{n+k,m}(r)), \tag{47}$$

где $c_{n,m}(j) = q_{n,m}(j) - q_{n+1,m}(j)$.

Замечание 12. В отличии от непрерывного случая, в чисто дискретном случае переменные n и m входят в уравнение (43) не совсем симметрично. Поэтому для получения явных выражений для n-интегралов в формуле (47) необходимо не только поменять ролями переменные n и m, но и сделать дополнительную замену $q_{n,m}(j) \to -q_{n,m}(-j)$.

Пример 4. Приведем в явном виде полный набор независимых в главном интегралов по обоим направлениям для чисто дискретной цепочки серии A при $r = 3$:

$$
\begin{aligned}
J_0 &= \exp(c_{n,m}(0) + c_{n,m}(1) + c_{n,m}(2) + c_{n,m}(3)),\\
J_1 &= \exp(c_{n,m}(0) + c_{n,m}(1) + c_{n,m}(2)) + \exp(c_{n,m}(0) + c_{n,m}(1) + c_{n+1,m}(3)) +\\
&+ \exp(c_{n,m}(0) + c_{n+1,m}(2) + c_{n+1,m}(3)) + \exp(c_{n+1,m}(1) + c_{n+1,m}(2) + c_{n+1,m}(3)),\\
J_2 &= \exp(c_{n,m}(0) + c_{n,m}(1)) + \exp(c_{n,m}(0) + c_{n+1,m}(2)) + \exp(c_{n,m}(0) + c_{n+2,m}(3)) +\\
&+ \exp(c_{n+1,m}(1) + c_{n+1,m}(2)) + \exp(c_{n+1,m}(1) + c_{n+2,m}(3)) + \exp(c_{n+2,m}(2) + c_{n+2,m}(3)),\\
J_3 &= \exp(c_{n,m}(0)) + \exp(c_{n+1,m}(1)) + \exp(c_{n+2,m}(2)) + \exp(c_{n+3,m}(3)),\\
I_0 &= \exp(-b_{n,m}(3) + b_{n,m}(2) + b_{n,m}(1) + b_{n,m}(0)),\\
I_1 &= \exp(-b_{n,m}(3) - b_{n,m}(2) - b_{n,m}(1)) + \exp(-b_{n,m}(3) - b_{n,m}(2) - b_{n,m+1}(0)) +\\
&+ \exp(-b_{n,m}(3) - b_{n,m+1}(1) - b_{n,m+1}(0)) + \exp(-b_{n,m+1}(2) - b_{n,m+1}(1) - b_{n,m}(0)),\\
I_2 &= \exp(-b_{n,m}(3) - b_{n,m}(2)) + \exp(-b_{n,m}(3) - b_{n,m+1}(1)) + \exp(-b_{n,m}(3) - b_{n,m+2}(0)) +\\
&+ \exp(-b_{n,m+1}(2) - b_{n,m+1}(1)) + \exp(-b_{n,m+1}(2) - b_{n,m+2}(0)) + \exp(-b_{n,m+2}(1) - b_{n,m+2}(0)),\\
I_3 &= \exp(-b_{n,m}(3)) + \exp(-b_{n,m+1}(2)) + \exp(-b_{n,m+2}(1)) + \exp(-b_{n,m+3}(0)),
\end{aligned}
$$

где $b_{n,m}(j) = q_{n,m}(j) - q_{n,m+1}(j)$.

Следствие 3. *Чисто дискретная двумеризованная цепочка Тоды серии C интегрируема по Дарбу.*

Замечание 13. Как и в двух предыдущих случаях, доказательство последнего утверждения вытекает из того факта, что цепочки серии C являются редукциями цепочек серии A. Однако, использовать эту идею для доказательства интегрируемости по Дарбу чисто дискретным экспоненциальных систем, соответствующих алгебрам Ли серий B и D не получается, поскольку вопрос о том, являются ли они редукциями цепочки серии A в дискретном случае, является открытым.

Замечание 14. Полученные результаты полностью соответствуют общей идеологии работ [14, 15], которая, грубо говорят, состоит в том, что правильной дискретизацией является такая, которая сохраняет, например, интегралы вдоль характеристик и симметрии. Легко видеть, что в данном случае один и то же метод построения интегралов, основанный на использовании преобразований Дарбу–Лапласа, работает в непрерывном, полудискретном и дискретном случаях и что явные формулы для x-интегралов полудискретной системы (28) дают m-интегралы для ее полной дискретизации (43).

5 Благодарности

В заключение я хочу поблагодарить И. Т. Хабибуллина за полезные обсуждения и ценные замечания. Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента РФ НШ-4833.2014.1, гранта Правительства РФ 2010-220-01-077 и гранта РФФИ №14-01-00012-а.

Список литературы

[1] M. Toda. Vibration of a chain with non-linear interaction. *J. Phys. Soc. Jpn.*, **22** (1967), 431–436.

[2] O. I. Bogoyavlensky. On perturbations of the periodic Toda lattice. *Commun. Math. Phys.*, **51** (1976), 201–209.

[3] А. В. Михайлов. Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Тода. *Письма в ЖЭТФ*, **30** (1979), вып. 7, 443-448.

[4] А. Н. Лезнов. О полной интегрируемости одной нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных в двумерном пространстве. *ТМФ*, **42** (1980), вып. 3, 343–349.

[5] A. V. Mikhailov, M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov. Two-dimensional generalized Toda Lattice. *Commun. Math. Phys.*, **79** (1981), 473–488.

[6] А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов. Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана. *Препринт. Уфа: БФАН СССР*, 1981.

[7] А. Н. Лезнов, В. Г. Смирнов, А. Б. Шабат. Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем. *ТМФ*, **51** (1982), вып. 1, 10–22.

[8] Ю. Б. Сурис. Обобщенные цепочки Тоды в дискретном времени. *Алгебра и Анализ*, **2** (1990), вып. 2, 141–157.

[9] J. Liouville. Sur l'equation aux differences parteielles $\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial u \partial v} \pm 2\lambda q^2 = 0$. *J. Math. Pure Appl.*, **18** (1853), 71–74.

[10] В. Э. Адлер, С. Я. Старцев. О дискретных аналогах уравнения Лиувилля. *ТМФ*, **121** (1999), вып. 2, 271–284.

[11] R. S. Ward. Discrete Toda field equations. *Phys. Lett. A*, **199** (1995), 45-48.

[12] И. Т. Хабибуллин. Дискретные цепочки серии C. *ТМФ*, **146** (2006), вып. 2, 208–221.

[13] С. В. Смирнов. Полудискретная цепочка Тоды. *ТМФ*, **172** (2012), вып. 3, 387–404.

[14] I. Habibullin, K. Zheltukhin, M. Yangubaeva. Cartan matrices and integrable lattice Toda field equations. *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44** (2011), 465202.

[15] R. Garifullin, I. Habibullin, M. Yangubaeva. Affine and finite Lie algebras and integrable Toda field equations on discrete time-space. *SIGMA*, **8** (2012), 062.

[16] A. B. Shabat. Higher symmetries of two-dimensional lattices. *Phys. Lett. A*, **200** (1995), 121-133.

[17] G. Darboux. Leçons sur la théorie générale des surfaces. V.II, Paris, Hermann, 1915.

[18] А. Б. Шабат. К теории преобразований Лапласа–Дарбу. *ТМФ*, **103** (1995), вып. 1, 170–175.

[19] V. E Adler, I. T. Habibullin. Integrable boundary conditions for the Toda lattice. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **28** (1995), 67116129.

[20] B. Gürel, I. Habibullin. Boundary conditions for two-dimensional integrable chains. *Phys. Lett. A*, **233** (1997), 68-72.

[21] И. Т. Хабибуллин. Обрывы цепочки Тоды и проблема редукций. *ТМФ*, **143** (2005), вып. 1, 33–48.

[22] Д. К. Демской. Интегралы открытых двумеризованных цепочек. *ТМФ*, **163** (2010), вып. 1, 79–85.

[23] А. М. Гурьева, А. В. Жибер. Инварианты Лапласа двумеризованных открытых цепочек Тоды. *ТМФ*, **138** (2004), вып. 3, 401–421.

[24] В. В. Соколов, С. Я. Старцев. Симметрии нелинейных гиперболических систем типа цепочек Тоды. *ТМФ*, **155** (2008), вып. 2, 344–355.

[25] С. П. Царев. О нелинейных уравнениях с частными производными, интегрируемых по Дарбу. *Труды МИАН*, **225** (1999), 389–399.

[26] А. В. Жибер, В. В. Соколов. Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа. *УМН*, **56** (2001), вып. 1, 63–106.

[27] А. П. Веселов, А. Б. Шабат. Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шрёдингера. *Функ. Анализ*, **27** (1993), вып. 2, 1–21.

[28] И. Т. Хабибуллин, А. Пекан. Характеристическая алгебра Ли и классификация полудискретных моделей. *ТМФ*, **151** (2007), вып. 3, 413–423.

[29] А. В. Забродин. Разностные уравнения Хироты. *ТМФ*, **113** (1997), вып. 2, 179–230.