Введение в теорию интегрируемых систем

О. И. Мохов, С. В. Смирнов[1]

Компиляция: 15 июня 2015 г.

Оглавление

1 Конечномерные динамические системы **5**

1.1 Лагранжев формализм . . . 5

1.1.1 Элементы вариационного исчисления . . . 5

1.1.2 Лагранжев формализм в ньютоновой механике . . . 10

1.1.3 Вариационная природа геодезических . . . 11

1.1.4 Обобщенная вариационная задача . . . 12

1.1.5 Теорема Нетер . . . 13

1.2 Гамильтонов формализм . . . 17

1.2.1 Уравнения Гамильтона . . . 17

1.2.2 Скобка Пуассона и первые интегралы . . . 18

1.3 Симплектическая и пуассоновы структуры . . . 19

1.3.1 Симплектические и пуассоновы многообразия . . . 19

1.3.2 Гамильтоновы векторные поля . . . 22

1.3.3 Функции Казимира . . . 24

1.3.4 Канонические преобразования . . . 26

1.4 Теорема Лиувилля . . . 27

1.4.1 Наводящие соображения . . . 28

1.4.2 Независимость первых интегралов . . . 29

1.4.3 Интегрируемость по Лиувиллю . . . 31

1.5 Примеры из классической механики . . . 38

1.5.1 Задача Кеплера . . . 38

1.5.2 Волчок Эйлера . . . 41

1.5.3 Волчок Лагранжа . . . 42

1.6 Представление Лакса . . . 43

1.6.1 Нахождение первых интегралов . . . 43

1.6.2 Пары Лакса со спектральным параметром . . . 45

1.7 Цепочка Тоды . . . 46

1.7.1 Представление Лакса . . . 46

1.7.2 Интегрируемость по Лиувиллю . . . 48

1.7.3 Метод обратной задачи . . . 50

1.7.4 Связь с QR-алгоритмом . . . 55

1.8 Бигамильтоновы системы . . . 56

1.8.1 Согласованные пуассоновы структуры . . . 56

1.8.2 Оператор рекурсии . . . 57

1.8.3 Схема Ленарда–Магри . . . 59

1.8.4 Вырожденные пуассоновы структуры . . . 62

1.8.5 Бигамильтонова структура цепочки Тоды . . . 62

1.9 Одевающая цепочка Веселова–Шабата . . . 64

1.9.1 Дифференциальные операторы и преобразования Дарбу . . . 64

1.9.2 Одевающая цепочка . . . 66

1.9.3 Представление Лакса и первые интегралы 69
1.9.4 Полная интегрируемость при $\alpha = 0$ 71
1.9.5 Связь с уравнениями Пенлеве 73

2 Теория КдФ: быстроубывающий случай 75
2.1 Метод Фурье 75
2.2 Иерархия КдФ 77
2.2.1 Изоспектральная деформация оператора Шредингера 77
2.2.2 Солитонное решение уравнения КдФ 79
2.2.3 Подход Гельфанда–Дикого 80
2.3 Теория рассеяния для оператора Шредингера 82
2.3.1 Функции Йоста 83
2.3.2 Данные рассеяния 85
2.3.3 Свойства спектральных данных 88
2.4 Интегрирование КдФ методом обратной задачи 93
2.4.1 Прямая задача 93
2.4.2 Эволюция спектральных данных 97
2.4.3 Решение обратной задачи 99
2.5 Многосолитонные решения КдФ 101
2.5.1 Безотражательные потенциалы 102
2.5.2 Взаимодействие солитонов 103
2.6 Прямые методы интегрирования 105
2.6.1 Метод Хироты 105
2.6.2 Преобразования Бэклунда 108
2.7 Полная интегрируемость КдФ 110
2.7.1 Теоретико-полевые скобки Пуассона 110
2.7.2 Скобка Гарднера–Захарова–Фаддеева 112
2.7.3 Интегралы Крускала 113
2.7.4 Переменные “действие-угол” 117
2.8 Бигамильтонова теория КдФ 117

3 Другие примеры интегрируемых систем 119
3.1 Гиперболические уравнения 119
3.1.1 Уравнение Лиувилля 119
3.1.2 Преобразования Дарбу–Лапласа 121
3.1.3 Явная интегрируемость по Дарбу 124
3.2 Двумеризованная цепочка Тоды 128
3.2.1 Цепочка Тоды в разных формах 128
3.2.2 Представление Лакса 129
3.2.3 Системы экспоненциального типа 131
3.2.4 Характеристические алгебры 133
3.3 Уравнение sin-Гордон 135
3.4 Трехмерная совместность уравнений на квад-графах 135

Список литературы 137

Предметный указатель 138

Глава 1

Конечномерные динамические системы

1.1 Лагранжев формализм

1.1.1 Элементы вариационного исчисления

В различных задачах естествознания очень часто возникает необходимость найти траекторию движения (частицы, материальной точки и т.п.), минимизирующую некоторую числовую характеристику. Например, найти траекторию, по которой шарик будет скатываться за кратчайшее время из точки A в точку B под действием силы тяжести. Опыт изучения математического анализа подсказывает нам, что для решения подобной задачи надо эту характеристику в каком-то смысле продифференцировать, и тогда мы получим необходимое условие экстремальности (правда, в след за этим еще надо задуматься и о достаточных условиях). Однако, возникает серьезная проблема: роль функции, которую мы собираемся дифференцировать, в данном случае играет *функционал*, т.е. некая функция, определенная на множестве всех траекторий (всех гладких траекторий, всех гладких траекторий с фиксированными концами, бесконечно гладких траекторий и т.п. в зависимости от решаемой задачи), а множество таких функций, как правило, является бесконечномерным линейным пространством. Таким образом, грубо говоря, нам необходимо научиться дифференцировать функционалы, определенные на бесконечномерных пространствах. Изучением экстремальных свойств подобных функционалов занимается *вариационное исчисление*, краткий экскурс в которое мы вынуждены предпринять (увы, пренебрегая при этом иногда всей необходимой строгостью).

Начнем с того, что введем несколько важных определений.

Определение 1.1. Линейное пространство V над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ называется *нормированным*, если на нем задано отображение $\|\cdot\| : V \to \mathbb{K}$, называемое *нормой* и удовлетворяющее следующим условиям:

i) $\|v\| \geqslant 0$ для всех $v \in V$, причем $\|v\| = 0$ тогда и только тогда, когда $v = 0$;
ii) $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ для всех $u, v \in V$;
iii) $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$ для всех $v \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Пример 1.1. На линейном пространстве $C[a, b]$ вещественнозначных функций на некотором отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ можно ввести норму следующим образом:

$$\|f\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)|.$$

Пример 1.2. На линейном пространстве $C[a, b]$ можно еще ввести и такую норму:

$$\|f\| = \left(\int\limits_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $p \geqslant 1$.

Отображения из нормированных пространств в поле скаляров будем называть функционалами. Если такое отображение линейно, то функционал называется линейным, что согласуется с принятой в линейной алгебре терминологией.

Определение 1.2. Пусть V — нормированное пространство, а $\mathcal{S}$ — некоторый функционал на нем. Функционал $\mathcal{S}$ называется *дифференцируемым по Фреше в точке* $x \in V$, если существует такой линейный функционал A_x на пространстве V, что

$$\mathcal{S}(x+h) - \mathcal{S}(x) = A_x(h) + \alpha_x(h)$$

где

$$\frac{\alpha_x(h)}{\|h\|} \to 0 \quad \text{при} \quad \|h\| \to 0.$$

Линейный функционал A_x при этом называется *производной Фреше* функционала $\mathcal{S}$ в точке x.

Предложение 1.1. *Если некоторый функционал $\mathcal{S}$ является дифференцируемым по Фреше в точке x, то его производная определена однозначно.*

Доказательство.

Предположим противное, т.е. что у функционала $\mathcal{S}$ в точке x есть две различных производных Фреше:

$$\mathcal{S}(x+h) - \mathcal{S}(x) = A_x^{(1)}(h) + \alpha_x^{(1)}(h) = A_x^{(2)}(h) + \alpha_x^{(2)}(h). \tag{1.1}$$

Тогда выполнено условие

$$\frac{A_x^{(1)}(h) - A_x^{(2)}(h)}{\|h\|} \to 0 \quad \text{при} \quad \|h\| \to 0;$$

но если линейные функционалы $A_x^{(1)}$ и $A_x^{(2)}$ различны, то найдется такой h, что

$$\frac{A_x^{(1)}(h) - A_x^{(2)}(h)}{\|h\|} = \lambda \neq 0.$$

В силу линейности отсюда следует, что

$$\frac{A_x^{(1)}(\varepsilon h) - A_x^{(2)}(\varepsilon h)}{\|\varepsilon h\|} = \lambda \neq 0$$

для любого $\varepsilon \neq 0$, но это противоречит условию (1.1). $\mathfrak{Q.e.d.}$

Нас в дальнейшем, конечно, будет интересовать не общий случай функционалов на абстрактных нормированных пространствах, а частный случай интегрального функционала на пространстве параметризованных кривых в $\mathbb{R}^n$. Более точно, рассмотрим всевозможные простые параметризованные точками отрезка $[a,b]$ регулярные кривые[1] γ в $\mathbb{R}^n$ и введем на этом множестве норму следующим образом:

$$\|\gamma\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \{|\mathbf{x}(t)|, |\dot{\mathbf{x}}(t)|\}, \tag{1.2}$$

[1] Под регулярной кривой мы понимаем кривую, параметризованную бесконечно-дифференцируемыми функциями и такую, что ее вектор скорости всюду отличен от нуля.

где $\mathbf{x}(t)$ — параметризация кривой γ. Пусть $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [a,b] \to \mathbb{R}$ — некоторая бесконечно-дифференцируемая функция; тогда рассмотрим функционал следующего вида:

$$\mathcal{S}(\gamma) = \int\limits_a^b L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t)dt. \tag{1.3}$$

В механике и смежных областях подобные функционалы называются *действием*, а соответствующая функция L — *лагранжианом.*

Предложение 1.2. *Функционал действия (1.3) дифференцируем по Фреше в любой точке γ и его производная Фреше задается следующей формулой:*

$$A_\gamma(\eta) = \int\limits_a^b \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\right) h^i \right) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} h^i \Bigg|_a^b , \tag{1.4}$$

где $\mathbf{h} = (h^1, h^2, \ldots, h^n)$ — параметризация кривой η.

Доказательство.

Запишем приращение функционала и воспользуемся формулой Тейлора:

$$\mathcal{S}(\gamma+\eta) - \mathcal{S}(\gamma) = \int\limits_a^b \Big(L(\mathbf{x}+\mathbf{h}, \dot{\mathbf{x}}+\dot{\mathbf{h}}, t) - L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)\Big)\, dt = \int\limits_a^b \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} h^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \dot{h}^i \right) + \alpha_\gamma(\eta) \right) dt;$$

поскольку сумма, стоящая под интегралом, линейна по $\mathbf{h}$, а

$$\int\limits_a^b \alpha_\gamma(\eta) dt = o(\|\mathbf{h}\|),$$

получаем производную функционала:

$$A_\gamma(\eta) = \int\limits_a^b \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} h^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \dot{h}^i \right) \right) dt.$$

Интегрируя последнее выражение по частям, получаем формулу (1.4), $\mathfrak{Q.e.d.}$

По аналогии с точкой экстремума в дифференциальном исчислении введем понятие экстремали дифференцируемого функционала.

Определение 1.3. Экстремалью дифференцируемого по Фреше функционала называется такая точка $x \in V$, что $A_x \equiv 0$.

Теорема 1.1. *Кривая γ, параметризованная вектор-функцией $\mathbf{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$, является экстремалью дифференцируемого по Фреше функционала действия вида (1.3) на подпространстве всех кривых, удовлетворяющих условиям $\mathbf{x}(a) = A$, $\mathbf{x}(b) = B$, тогда и только тогда, когда во всех точках кривой выполнены равенства*

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Доказательство.

Достаточность утверждения теоремы немедленно вытекает из формулы (1.4), поскольку внеинтегральный член обращается в нуль в силу введенных нами граничных условий. Докажем теперь необходимость. Пусть γ — экстремаль функционала $\mathcal{S}$, тогда для любого приращения η, параметризованного вектор-функцией $\mathbf{h}(t)$ и такого, что $\mathbf{h}(a) = \mathbf{h}(b) = 0$, выполнено условие

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \right) h^i \right) dt = 0. \tag{1.6}$$

Предположим, что условия (1.5) не выполнены, т.е. для некоторого $i = 1, 2, \ldots, n$ найдется такое $t_0 \in [a, b]$, что $f(t_0) \neq 0$, где

$$f(t) = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right).$$

Без ограничения общности можно считать, что $f(t_0) > 0$. Тогда в силу непрерывности функции f это неравенство выполнено также и в некоторой окрестности U точки t_0 в интервале $[a, b]$. Выберем теперь приращение η следующим образом: пусть $h^j \equiv 0$ при $j \neq i$, а h^i принимает неотрицательные значения внутри U и тождественно равно нулю вне U. Легко видеть, что при таком выборе приращения в сумме, стоящей под интегралом в левой части равенства (1.6), будет лишь одно ненулевое слагаемое, причем внутри U оно будет положительно, а вне U будет тождественно обращаться в нуль. Но это противоречит тому, что интеграл от этого выражения равен нулю. Таким образом, $f(t) \equiv 0$, т.е. уравнения (1.5) выполнены на экстремали, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Определение 1.4. Уравнения (1.5) называются *уравнениями Эйлера–Лагранжа.*

Замечание 1.1. Для функционалов на нормированных пространствах, кроме производной Фреше, также определяются и производные в других смыслах. Систематическое изложение дифференциального исчисления в нормированных пространствах можно найти в стандартных учебниках по функциональному анализу (см., например, [11]). Мы лишь кратко обсудим еще один вид производной для функционалов в нормированных пространствах.

Определение 1.5. Пусть V — линейное пространство, а $\mathcal{S}$ — некоторый функционал на нем. Функционал $\mathcal{S}$ называется *дифференцируемым по Гато в точке $x \in V$ в направлении вектора $h \in V$*, если существует

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathcal{S}(x + th) - \mathcal{S}(x)}{t}.$$

Этот предел $D_h\mathcal{S}(x)$ при этом называется *производной Гато* функционала $\mathcal{S}$ в точке x в направлении вектора $h \in V$. Экстремалью дифференцируемого по Гато функционала называется такая точка $x \in V$, что $D_h\mathcal{S}(x) = 0$ для всех $h \in V$).

Замечание 1.2. Понятие производной Фреше требует нормированности пространства, в то время как производная Гато может быть определена для функционалов на произвольном линейном пространстве.

Замечание 1.3. Легко видеть, что производная Фреше является бесконечномерным аналогом дифференциала функции, а производная Гато — аналогом производной по направлению. Естественно, как и в случае функций нескольких переменных, дифференцируемость по Фреше является существенно более сильным требованием, чем дифференцируемость по Гато (даже в любом направлении): если некий функционал является дифференцируемым по Фреше в точке $x \in V$, то у него существует производная Гато по любому направлению в этой точке, но обратное, вообще говоря, неверно. Очевидно также, что для производной Фреше дифференцируемого функционала $\mathcal{S}$ имеет место равенство

$$A_x(h) = D_h\mathcal{S}(x).$$

Замечание 1.4. При работе с интегральным функционалом действия вида (1.3) производную Гато часто называют *вариацией* этого функционала и обозначают $\delta\mathcal{S}$:

$$\delta\mathcal{S}[\eta] = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{S}(\mathbf{x} + t\mathbf{h}),$$

где $\mathbf{h} = (h^1, h^2, \dots, h^n)$ — параметризация кривой η, а вектор

$$\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\mathbf{x}(t)} = \frac{\partial L}{\partial\mathbf{x}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{x}}}\right)$$

называют *вариационной производной* этого функционала. Таким образом, кривая γ, параметризованная функциями $\mathbf{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$, является экстремалью функционала $\mathcal{S}$ если и только если соответствующая вариационная производная $\delta\mathcal{S}/\delta\mathbf{x}(t)$ равна нулю. Легко заметить, что вариационная производная является бесконечномерным аналогом градиента, поскольку в случае гильбертова пространства мы имеем

$$\delta\mathcal{S}[\eta] = \left(\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\mathbf{x}(t)}, \mathbf{h}\right),$$

где

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_a^b \sum_{i=1}^n x^i(t) y^i(t) dt$$

обозначает скалярное произведение.

Задача 1.1. Доказать, что регулярная кривая γ, параметризованная вектор-функцией $\mathbf{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$, является экстремалью дифференцируемого по Гато функционала действия вида (1.3) на подпространстве всех кривых, удовлетворяющих условиям $\mathbf{x}(a) = A$, $\mathbf{x}(b) = B$, тогда и только тогда, когда во всех точках кривой выполнены уравнения Эйлера–Лагранжа (1.5).

Замечание 1.5. Подход, связанный с дифференцируемостью по Гато, иногда оказывается более удобным не только своей большей общностью, но и тем, что при вычислениях вариаций часто бывает достаточно выбрать некоторое определенное направление h.

Пример 1.3. Рассмотрим лагранжиан $L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) = \sqrt{(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}})}$. Тогда геометрический смысл соответствующего функционала действия — длина кривой γ. Легко видеть, что в этом случае имеют место равенства

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\dot{x}^i}{\sqrt{(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}})}}, \qquad \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0,$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{\ddot{x}^i(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) - \dot{x}^i(\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}})}{(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}})^{3/2}} = 0 \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots, n.$$

отсюда следует, что для каждого i либо $\ddot{x}^i = 0$, либо $\dot{x}^i = c_i \cdot \exp\left((\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}})/(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}})\right)$, где $c_i = \mathrm{const}$. Но любое из этих условий является линейным, т.е. их совокупность задает прямую в $\mathbb{R}^n$. Значит, экстремалями этого функционала действия являются прямые и только они. Таким образом, мы удостоверились в справедливости известного нам утверждения: экстремалями функционала длины в евклидовом пространстве являются прямые и только они.

Определение 1.6. Лагранжиан $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ называется *невырожденным*, если матрица Гессе

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right)$$

является невырожденной.

1.1.2 Лагранжев формализм в ньютоновой механике

Согласно классической ньютоновой механике, движение k точек масс $m_1, m_2 \dots, m_k$ в потенциальном поле с потенциалом U задается системой дифференциальных уравнений

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \tag{1.7}$$

где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор i-той точки. Оказывается, уравнения Ньютона можно переписать в виде уравнений Эйлера–Лагранжа для некоторого лагранжиана, т.е. уравнения Ньютона эквивалентны уравнениям экстремалей некоторого функционала действия. Это — так называемый *принцип наименьшего действия Гамильтона* (в некоторых случаях траектории движения этой механической системы не только являются экстремалями функционала действия, но и доставляют ему наименьшее значение). Сформулируем его более точно.

Теорема 1.2. *Траектории движения механической системы (1.7) совпадают с экстремалями функционала действия с лагранжианом $L = T - U$, где*

$$T = \sum_{i=1}^{k} m_i \frac{(\dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_i)}{2}$$

— кинетическая энергия системы.

Доказательство.

Легко видеть, что поскольку потенциал зависит только от положения точек, а не от их скоростей, имеет место равенство

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = m_i \dot{\mathbf{r}}_i.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i},$$

откуда немедленно вытекает эквивалентность уравнений (1.7) уравнениям Эйлера–Лагранжа.
$\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 1.6. Свойство некоторой кривой быть экстремалью функционала действия не зависит от выбора системы координат. Это позволяет сразу записывать уравнения движения механических систем в форме Лагранжа в той системе координат, в которой это удобно в каждой конкретной ситуации. Поэтому, если $(q^1, q^2, \dots, q^n)$ — произвольные координаты в конфигурационном пространстве, то траектории движения удовлетворяют уравнениям Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{1.8}$$

переменные q^i называются *обобщенными координатами*, переменные $\dot{q}^i$ — *обобщенными скоростями*, а $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ — *обобщенными импульсами.*

Более подробное изложение применений лагранжева формализма в ньютоновой механике можно найти в книге [2].

1.1.3 Вариационная природа геодезических

Пусть M — риманово многообразие (или n-мерная поверхность в евклидовом пространстве), а $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — локальная система координат на нем. Выберем две произвольные точки A и B на нем и рассмотрим функционал действия

$$\mathcal{S}(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)|^2 dt = \int_a^b \sum_{i,j=1}^n g_{ij}\dot x^i \dot x^j dt, \tag{1.9}$$

определенный на множестве регулярных кривых, таких что $\gamma(a) = A$, $\gamma(b) = B$ (здесь g_{ij} — риманова метрика).

Теорема 1.3. *Кривая γ является экстремалью функционала (1.9) тогда и только тогда, когда она является натурально параметризованной геодезической на многообразии M.*

Доказательство.

Покажем, что уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала (1.9) в точности совпадают с уравнениями геодезических. В самом деле, если $L = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}\dot x^i \dot x^j$, то для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ выполнены равенства

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot x^i \dot x^j, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot x^k} = 2\sum_{j=1}^n g_{kj}\dot x^j.$$

Поэтому,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x^k}\right) = 2\sum_{j=1}^n \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l}\dot x^l \dot x^j + g_{kj}\ddot x^j\right);$$

записывая теперь уравнения Эйлера–Лагранжа и заменяя индексы суммирования, получаем уравнения

$$\sum_{j=1}^n g_{kj}\ddot x^j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \left(2\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot x^i \dot x^j = 0.$$

Обращая теперь матрицу g_{kj} и пользуясь ее симметричностью, приходим к уравнениям геодезических:

$$\ddot x^l + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^n g^{lk}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot x^i \dot x^j = 0,$$

Q.e.d.

Замечание 1.7. Легко видеть, что функционал действия (1.9) изменяется при заменах параметра на кривой, т.е., строго говоря, он определен не на множестве регулярных кривых, а на множестве регулярно параметризованных кривых. Это вполне согласуется с тем, что в определении геодезической участвует натуральный параметр. Из дифференциальной геометрии известно, что геодезические являются локально кратчайшими, т.е. среди всех регулярных кривых, соединяющих достаточно близкие точки, геодезическая имеет наименьшую длину. Это означает, что геодезическая является экстремалью не только функционала действия (1.9), но и функционала длины:

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)|dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\dot x^i \dot x^j}dt, \tag{1.10}$$

который, очевидно, не зависит от выбора параметра на кривой.

Задача 1.2. Доказать, что экстремалями функционала длины (1.10) являются регулярные кривые, получающиеся из геодезических всевозможными гладкими заменами параметра, и только они.

1.1.4 Обобщенная вариационная задача

В ньютоновой механике вектор ускорения, т.е. вторая производная радиус-вектора элемента механической системы, является функцией от радиус-векторов элементов системы и их скоростей (первых производных). С этим связан именно такой вид рассмотренного нами интегрального функционала действия: лагранжиан в этом случае зависел от радиус-векторов и их первых производных. Однако, вне рамок ньютоновой механики ничто не мешает рассматривать лагранжианы более общего вида, которые зависят от большего количества производных:

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}, t). \tag{1.11}$$

Отметим, что в этом случае вместо нормы (1.2) придется рассматривать норму

$$\|\gamma\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \{|\mathbf{x}(t)|, |\dot{\mathbf{x}}(t)|, |\ddot{\mathbf{x}}(t)|, \ldots, |\mathbf{x}^{(k)}(t)|\}.$$

Выясним, как устроены экстремали такого обобщенного действия и как выглядят в этом случае аналоги уравнений Эйлера–Лагранжа.

Теорема 1.4. *Кривая γ, параметризованная вектор-функцией $\mathbf{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$, является экстремалью функционала действия вида (1.11) на подпространстве всех кривых, удовлетворяющих условиям*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}(a) = A, \quad \mathbf{x}(b) = B, \\
&\dot{\mathbf{x}}(a) = A^{(1)}, \quad \dot{\mathbf{x}}(b) = B^{(1)}, \\
&\ddot{\mathbf{x}}(a) = A^{(2)}, \quad \ddot{\mathbf{x}}(b) = B^{(2)}, \\
&\ldots \\
&\mathbf{x}^{(k-1)}(a) = A^{(k-1)}, \quad \mathbf{x}^{(k-1)}(b) = B^{(k-1)},
\end{aligned} \tag{1.12}$$

тогда и только тогда, когда во всех точках кривой выполнены равенства

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i}\right) - \cdots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{\partial L}{\partial (x^i)^{(k)}}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.13}$$

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы 1.1 с той лишь разницей, что в данном случае нужно интегрировать по частям k раз. Более сложные граничные условия (1.12) обязаны своим появлением необходимости сократить внеинтегральные члены, получающиеся от многократного интегрирования по частям. Уравнения (1.13) являются аналогами уравнений Эйлера–Лагранжа для обобщенной вариационной задачи. Иногда эти уравнения записывают в виде

$$\mathbf{E}(L) = 0,$$

где

$$\mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \circ \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}} + \frac{d^2}{dt^2} \circ \frac{\partial}{\partial \ddot{\mathbf{x}}} - \cdots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \circ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}$$

— так называемый *оператор Эйлера.*

Замечание 1.8. Здесь и далее под $\partial/\partial\mathbf{x}$ мы будем понимать векторно-значный дифференциальный оператор, компонентами которого являются частные производные по компонентам вектора $\mathbf{x}$.

Замечание 1.9. Язык вариационных производных используется и при решении обобщенных вариационных задач. Для функционалов действия вида

$$\mathcal{S}(\gamma) = \int\limits_a^b L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}, t)dt$$

вариационная производная определяется аналогичным образом:

$$\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\mathbf{x}(t)} = \frac{\partial L}{\partial\mathbf{x}} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{x}}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial L}{\partial\ddot{\mathbf{x}}}\right) + (-1)^k\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\frac{\partial L}{\partial\mathbf{x}^{(k)}}\right).$$

Пример 1.4. Рассмотрим лагранжиан $L = x^2\ddot{x} + 2x(\dot{x})^2$ и запишем для него обобщенные уравнения Эйлера–Лагранжа. Вычислим производные:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2(\dot{x})^2 + 2x\ddot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = 4x\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial\ddot{x}} = x^2;$$

поэтому

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right) = 4(\dot{x})^2 + 4x\ddot{x}, \quad \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial\ddot{x}}\right) = 2(\dot{x})^2 + 2x\ddot{x}.$$

Легко заметить, что в данном случае $\mathbf{E}(L) \equiv 0$, т.е. все кривые являются экстремалями соответствующего функционала действия. На самом деле, это неудивительно, поскольку в данном случае лагранжиан является полной производной,

$$L = \frac{d}{dt}(x^2\dot{x}),$$

и потому значение функционала действия не зависит от выбора кривой:

$$\mathcal{S}(\gamma) = \int\limits_a^b \frac{d}{dt}(x^2\dot{x})dt = x^2\dot{x}\Big|_a^b = B^2B^{(1)} - A^2A^{(1)}.$$

Лагранжианы, для которых уравнения Эйлера–Лагранжа выполнены тождественно, иногда называются *нулевыми.*

Задача 1.3. Описать все нулевые лагранжианы.

Подробное изложение вариационного исчисления в наиболее общей ситуации можно найти в книге [18].

1.1.5 Теорема Нетер

Определение 1.7. Непостоянная функция I, определенная на (расширенном) фазовом пространстве системы дифференциальных уравнений, называется *первым интегралом* этой системы, если она не изменяется вдоль всех интегральной траектории системы.

Замечание 1.10. Иногда для краткости первые интегралы называют просто интегралами системы; другие их названия — *законы сохранения* или *константы движения.*. Еще иногда говорят, что первые интегралы — это такие величины, что их *производная в силу системы* равна нулю.

Пример 1.5. Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}.$$

Нетрудно проверить, что функция $I = x^2 + y^2$ является первым интегралом этой системы:

$$D_t(I) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2xy - 2xy = 0.$$

Если считать, что локально y является функцией переменной x и выразить $y' = \dot{y}/\dot{x}$, то мы получим следующее уравнение с разделяющимися переменными:

$$y' = -\frac{y}{x}.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $x^2 + y^2 = c$, где $c = \mathrm{const}$, т.е. фазовыми траекториями исходной системы являются всевозможные окружности с центром в начале координат. Это проясняет геометрический смысл найденного нами интеграла: при движении по таким окружностям расстояние до начала координат сохраняется.

Определение 1.8. *Полной энергией* лагранжевой системы с лагранжианом L называется выражение

$$E = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L.$$

Определение 1.9. Лагранжева система называется *консервативной*, если ее лагранжиан явно не зависит от времени t.

Предложение 1.3. *Полная энергия консервативной лагранжевой системы является ее первым интегралом.*

Доказательство.

Если лагранжева система автономна, т.е. ее лагранжиан явно не зависит от времени, то согласно правилу дифференцирования сложной функции, имеем:

$$\frac{d}{dt}(E) = \sum_{i=1}^{n} \left(\ddot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \dot{q}^i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i \right) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}^i \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) = 0$$

в силу уравнений Эйлера–Лагранжа, **Q.e.d.**

Определение 1.10. Обобщенная координата q^i называется *циклической* для лагранжевой системы, если лагранжиан L не зависит от нее: $\frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$.

Предложение 1.4. *Если обобщенная координата q^i является циклической, то соответствующий обобщенный импульс $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ является первым интегралом системы.*

Доказательство.

Продифференцируем обобщенный импульс в силу системы:

$$\frac{d}{dt}(p_i) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0,$$

Q.e.d.

Пример 1.6. Рассмотрим стандартно параметризованную поверхность вращения в трехмерном пространстве:
$$r(\varphi, u) = (f(u)\cos\varphi, f(u)\sin\varphi, g(u)).$$
Поскольку риманова метрика в этих координатах имеет вид
$$ds^2 = f^2(\varphi)d\varphi^2 + ((f'(u))^2 + (g'(t))^2)du^2,$$
соответствующий лагранжиан для уравнений геодезических записывается следующим образом:
$$\tilde{L} = f^2(u)\dot{\varphi}^2 + ((f'(u))^2 + (g'(u))^2)\dot{u}^2.$$
Мы, однако, рассмотрим не этот лагранжиан, а лагранжиан
$$L = \sqrt{f^2(u)\dot{\varphi}^2 + ((f'(u))^2 + (g'(u))^2)\dot{u}^2}.$$
соответствующий функционалу длины, поскольку в этом примере нас интересует геометрическая сторона вопроса, а экстремалями функционала длины, как мы знаем, являются геодезические, по после произвольных репараметризаций. Легко заметить, что в данном случае координата φ является циклической, что, впрочем, совершенно очевидно из геометрической природы задачи: на поверхности вращения ничего не может зависеть от полярного угла φ. Это означает, что соответствующий обобщенный импульс
$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{f^2(u)\dot{\varphi}}{\sqrt{f^2(u)\dot{\varphi}^2 + ((f'(u))^2 + (g'(u))^2)\dot{u}^2}}$$
является первым интегралом уравнений геодезических; выясним его геометрический смысл. Легко видеть, что для точки (φ, u) на поверхности вращения величина $f(u)$ равна расстоянию ρ до оси вращения, а величина $f^2(u)\dot{\varphi}^2$ равна скалярному произведению вектора скорости $(\dot{\varphi}, \dot{u})$ кривой и вектора скорости $(1, 0)$ параллели. Поэтому, нетрудно заметить, что
$$I = \rho\cos\psi,$$
где ψ — угол между кривой и параллелью на поверхности вращения. Таким образом, в данном случае обобщенный импульс I есть не что иное как хорошо известный из дифференциальной геометрии *интеграл Клеро*.

Мы убедились в том, что если лагранжиан явно не зависит от одной из обобщенных координат, то это дает нам первый интеграл для соответствующей системы уравнений Эйлера–Лагранжа. На самом деле, это обстоятельство является частным проявлением более общего факта: каждой *непрерывной симметрии* лагранжевой системы соответствует первый интеграл.

Определение 1.11. Пусть $\{g_s\}$ — гладко зависящее от параметра s однопараметрическое семейство диффеоморфизмов $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ фазового пространства. Эта однопараметрическая группа преобразований задает *непрерывную симметрию* лагранжевой системы с лагранжианом L, если лагранжиан инвариантен относительно нее:
$$L\left(g_s(\mathbf{q}), \frac{d}{dt}(g_s(\mathbf{q})), t\right) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$
для всех значений параметра $s \in \mathbb{R}$.

Замечание 1.11. Непрерывные симметрии часто называют просто *симметриями* (еще рассматривают *дискретные* симметрии, т.е. инволюции, сохраняющие систему, но в этом случае, слово "дискретная", как правило, не опускают). Однако, математическое понятие дискретной симметрии намного больше соответствует нашим бытовым представлениям о симметрии, чем математическое понятие непрерывной симметрии. В самом деле, мы говорим что некоторый объект симметричен, если он допускает отражение относительно какой-нибудь оси (или относительно какой-нибудь точки), т.е. если он инвариантен относительно дискретной симметрии; в случае, когда тот или иной объект допускает некоторую непрерывную группу преобразований (например, является телом вращения), мы скорее говорим не о симметрии, а, например, о вращательной инвариантности, хотя это гораздо больше соответствует математическому понятию симметрии.

Пример 1.7. Если лагранжева система имеет циклическую координату, то она обладает непрерывной симметрией. В самом деле, если обобщенная координата q^i является циклической, то положим

$$g_s(q^1, q^2, \dots, q^n) = (q^1, q^2, \dots, q^{i-1}, q^i + s, q^{i+1}, \dots, q^n).$$

Легко видеть, что в из-за цикличности координаты q^i лагранжиан L инвариантен относительно такой группы преобразований, т.е. допускает непрерывную симметрию.

Теперь мы можем сформулировать теорему Нетер о связи симметрий и первых интегралов лагранжевых систем.

Теорема 1.5. *Пусть лагранжева система с лагранжианом L обладает непрерывной симметрией $\{g_s\}$. Тогда функция*

$$I = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot q^i} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} g_s(q^i). \tag{1.14}$$

является ее первым интегралом.

Доказательство.

Рассмотрим отображение $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, задаваемое условием $\Phi(t, s) = g_s(\mathbf{q}(t))$. Тогда инвариантность лагранжиана относительно потока $\{g_s\}$ эквивалентна условию

$$0 = \frac{d}{ds}\left(L\left(\Phi(t,s), \Phi_t(t,s)\right)\right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\Phi_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\Phi_{ts}, \tag{1.15}$$

где частные производные лагранжиана взяты в точке $(\Phi(t,s), \Phi_t(t,s), t)$.

Поскольку симметрия $\{g_s\}$ сохраняет лагранжиан, эти диффеоморфизмы переводят решения уравнений Эйлера–Лагранжа в решения, т.е. при каждом фиксированном s функция $L(\Phi(t,s), \Phi_t(t,s))$ удовлетворяет уравнениям Эйлера–Лагранжа. Продифференцируем теперь функцию I по t и воспользуемся уравнениями Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{dI}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\right)\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} g_s(q^i) + \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} g_s(\dot q^i)\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} g_s(q^i) + \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} g_s(\dot q^i)\right) =$$
$$= \left.\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\Phi_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\Phi_{ts}\right)\right|_{s=0} = 0$$

в силу равенства (1.15), $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 1.12. Отметим, что если на фазовом пространстве ввести другие координаты $\tilde{\mathbf{q}}$ таким образом, чтобы траектории $g_s(\mathbf{q})$ фиксированной точки $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ под действием потока $\{g_s\}$ были координатными линиями (например, линиями $\tilde{q}^1$), то условие инвариантности лагранжиана относительно группы $\{g_s\}$ превращается в условие цикличности соответствующей координаты $\tilde{q}^1$, а интеграл (1.14) — в закон сохранения соответствующего обобщенного импульса.

Задача 1.4. Интерпретировать полную энергию автономной лагранжевой системы как интеграл, порождаемый непрерывной симметрией системы.

1.2 Гамильтонов формализм

Уравнения Эйлера–Лагранжа проливают свет на вариационную природу многих физических законов, но это — уравнения второго порядка. Зачастую бывает удобнее переписать эти n уравнений в гамильтоновой форме, т.е. в виде системы из $2n$ уравнений первого порядка. Уравнения Гамильтона сами по себе не имеют вариационной природы, но они в некотором смысле более симметричны и с ними, как правило, удобнее работать.

1.2.1 Уравнения Гамильтона

Определение 1.12. *Канонической гамильтоновой системой* на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами (p_i, q^i) где $i = 1, 2, \ldots, n$, называется система вида

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \\ \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.16}$$

Функция H при этом называется *гамильтонианом.*

Теорема 1.6. *Система уравнений Эйлера–Лагранжа (1.8) с невырожденным лагранжианом эквивалентна канонической гамильтоновой системе (1.16) с гамильтонианом*

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = (\mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \tag{1.17}$$

где $(\cdot, \cdot)$ — стандартное евклидово скалярное произведение.

Доказательство.

Обобщенные импульсы $p_i = \frac{\partial L}{\partial q^i}$ являются функциями от компонент векторов $\mathbf{q}$ и $\dot{\mathbf{q}}$; по теореме об обратной функции мы можем выразить обобщенные скорости через компоненты $\mathbf{p}$, если соответствующая матрица Якоби невырождена, т.е. когда лагранжиан L является невырожденным. Теперь, когда мы показали, что можно перейти от координат $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ к координатам $\mathbf{p}, \mathbf{q}$, легко видеть, что первое из канонических уравнения Гамильтона для гамильтониана (1.17) равносильно уравнениям Эйлера–Лагранжа, а второе — определению обобщенного импульса:

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = \dot{p}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial p^i} = \dot{q}^i,$$

Q.e.d.

1.2.2 Скобка Пуассона и первые интегралы

Определение 1.13. *Канонической скобкой Пуассона* двух функций f и g, определенных на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами (p_i, q^i) где $i = 1, 2, \ldots, n$, называется функция

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q^i} \right).$$

Предложение 1.5. *Скобка Пуассона $\{\cdot, \cdot\} : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ билинейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби:*

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

для любых функций f, g, h на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$.

Доказательство.

Первые два утверждения очевидны, а тождество Якоби доказывается прямой проверкой, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Легко видеть, что в терминах скобки Пуассона уравнения Гамильтона (1.16) можно переписать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_i = \{H, p_i\} \\ \dot{q}^i = \{H, q^i\} \end{array} \right. , \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Предложение 1.6. *Функция $I(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, не зависящая явно от t, является первым интегралом гамильтоновой системы (1.16) тогда и только тогда, когда ее скобка Пуассона с гамильтонианом равна нулю: $\{H, I\} = 0$.*

Доказательство.

Функция I является первым интегралом системы (1.16) если и только если ее полная производная по t в силу системы равна нулю:

$$0 = D_t(I) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial I}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial I}{\partial q^i} \dot{q}^i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial I}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial I}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = \{H, I\},$$

$\mathfrak{Q.e.d.}$

Следствие 1.1. *Если гамильтониан системы (1.16) не зависит явно от времени t, то он является первым интегралом этой системы.*

Следствие 1.2. *Скобка Пуассона любых двух первых интегралов I_1 и I_2 системы (1.16), явно не зависящих от t, тоже является первым интегралом системы (1.16).*

Доказательство.

Воспользовавшись тождеством Якоби, вычислим скобку Пуассона функции $\{I_1, I_2\}$ с гамильтонианом системы:

$$\{H, \{I_1, I_2\}\} = -\{I_1, \{I_2, H\}\} - \{I_2, \{H, I_1\}\} = 0,$$

поскольку функции I_1 и I_2 являются первыми интегралами, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 1.13. Доказанное следствие может быть переформулировано следующим образом: скобка Пуассона вводит структуру алгебры Ли на множестве автономных (т.е. не зависящих явно от времени) первых интегралов произвольной гамильтоновой системы. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь автономные гамильтоновы системы и не будем каждый раз специально это оговаривать.

Пример 1.8. Рассмотрим механическую систему, подчиняющуюся уравнениям Ньютона

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Мы уже выяснили, что поведение этой системы описывается уравнениями Эйлера–Лагранжа с лагранжианом, равным разности кинетической и потенциальной энергий системы: $L = T - U$. Выясним, каков физический смысл гамильтониана $H = (\mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}) - L$ для этой системы. Перейдем к обобщенным координатам q^i, где $i = 1, 2, \dots nk$, в конфигурационном пространстве. Имеем:

$$H = \sum_{i=1}^{nk} p_i\dot{q}^i - T + U = \sum_{i=1}^{nk} \dot{q}^i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - T + U = \sum_{i=1}^{nk} m_i(\dot{q}^i)^2 - \sum_{i=1}^{nk} m_i\frac{(\dot{q}^i)^2}{2} + U = T + U.$$

(здесь мы воспользовались тем, что потенциал U не зависит от $\dot{q}^i$). Таким образом, гамильтониан H равен сумме потенциальной и кинетической энергий системы, т.е. равен ее полной энергии. Мы уже выяснили, что для автономных гамильтоновых систем гамильтониан является первым интегралом. В данном случае, его сохранение вдоль траекторий рассматриваемой нами механической системы эквивалентно закону сохранения энергии.

1.3 Симплектическая и пуассоновы структуры

Мы определили каноническую гамильтонову систему, каноническую скобку Пуассона и описали их простейшие свойства. Теперь нам потребуется более общий подход к гамильтоновым системам. Дадим несколько важных определений.

1.3.1 Симплектические и пуассоновы многообразия

Определение 1.14. Гладкое вещественное многообразие, на котором задана невырожденная замкнутая дифференциальная 2-форма $\Omega = \sum \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$ (т.е. кососимметрическое тензорное $\omega_{ij}(\mathbf{x})$ с двумя нижними индексами), называется *симплектическим*, а форма Ω — *симплектической структурой.*

Замечание 1.14. Легко видеть, что все симплектические многообразия четномерны, поскольку кососимметрическая 2-форма на нечетномерном многообразии всегда вырождена.

Пример 1.9. Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $(p^1, p^2, \dots, p^n, q^1, q^2, \dots, q^n)$ и зададим на нем невырожденную кососимметрическую 2-форму

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dp^i \wedge dq^i.$$

Это — простейший пример симплектического многообразия.

Определение 1.15. Пусть на гладком n-мерном многообразии M задан кососимметрический бивектор ω (т.е. кососимметрический тензор с двумя верхними индексами). Тогда *скобкой Пуассона* двух гладких функций f и g, определенных на M, называется выражение, заданное в координатах формулой

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^{n} \omega^{ij}(\mathbf{x})\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^i}\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x^j}, \tag{1.18}$$

если для любых трех функций $f, g, h \in C^\infty(M)$ выполнено тождество Якоби

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0.$$

Гладкое многообразие, снабженное скобкой Пуассона, называется *пуассоновым многообразием*. Бивектор ω при этом называется *пуассоновой структурой*.

Замечание 1.15. Поскольку выражение (1.18) не зависит от выбора локальных координат на многообразии M, данное определение корректно.

Понятно, что тождество Якоби накладывает ограничения на бивектор ω, т.е. для того, чтобы определить Пуассонову структуру, недостаточно просто задать кососимметрический бивектор, поскольку для произвольного такого тензора тождество Якоби, вообще говоря, выполнено не будет. Найдем соответствующие необходимые и достаточные условия на тензор ω^{ij}.

Предложение 1.7. *Бивектор ω^{ij} задает пуассонову структуру на многообразии M тогда и только тогда, когда выполнено условие Схоутена:*

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\omega^{il}\frac{\partial\omega^{jk}}{\partial x^l} + \omega^{jl}\frac{\partial\omega^{ki}}{\partial x^l} + \omega^{kl}\frac{\partial\omega^{ij}}{\partial x^l}\right) = 0 \tag{1.19}$$

для всех $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство.

Выпишем левую часть тождества Якоби:

$$\begin{aligned}\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} &= \sum_{i,l=1}^{n}\left(\omega^{il}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sum_{j,k=1}^{n}\omega^{jk}\frac{\partial g}{\partial x^j}\frac{\partial h}{\partial x^k}\right)\right) + \\ &+ \sum_{j,l=1}^{n}\left(\omega^{jl}\frac{\partial g}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sum_{k,i=1}^{n}\omega^{ki}\frac{\partial h}{\partial x^k}\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\right) + \sum_{k,l=1}^{n}\left(\omega^{kl}\frac{\partial h}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\omega^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}\right)\right) = \\ &+ \sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}\frac{\partial h}{\partial x^k}\sum_{l=1}^{n}\left(\omega^{il}\frac{\partial\omega^{jk}}{\partial x^l} + \omega^{jl}\frac{\partial\omega^{ki}}{\partial x^l} + \omega^{kl}\frac{\partial\omega^{ij}}{\partial x^l}\right) + \\ &+ \sum_{i,j,k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^l}\frac{\partial g}{\partial x^j}\frac{\partial h}{\partial x^k}\left(\omega^{kl}\omega^{ij} + \omega^{jl}\omega^{ki}\right) + \sum_{i,j,k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 g}{\partial x^j\partial x^l}\frac{\partial h}{\partial x^k}\frac{\partial f}{\partial x^i}\left(\omega^{il}\omega^{jk} + \omega^{kl}\omega^{ij}\right) + \\ &+ \sum_{i,j,k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 h}{\partial x^k\partial x^l}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}\left(\omega^{jl}\omega^{ki} + \omega^{il}\omega^{jk}\right).\end{aligned}$$

Легко заметить, что три последние суммы — нулевые. В самом деле, если в них поменять индексы i и l, j и l, k и l соответственно, то выражения, стоящие в скобках, занулятся в силу кососимметричности бивектора ω. Таким образом, тождество Якоби эквивалентно условию Схоутена, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 1.16. Если M — пуассоново многообразие, то в силу своей кососимметричности, скобка Пуассона вводит на пространстве $C^\infty(M)$ структуру бесконечномерной алгебры Ли.

Прямой проверкой доказывается следующее

Предложение 1.8. *Скобка Пуассона удовлетворяет свойству Лейбница: пусть $f, g, h \in C^\infty(M)$ — произвольные гладкие функции на пуассоновом многообразии. Тогда справедливо тождество*

$$\{fg, h\} = f\{g,h\} + g\{f,h\}.$$

Предложение 1.9. *Если $(M, \sum_{i<j} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j)$ — симплектическое многообразие, то бивектор ω^{ij}, где ω^{ij} — матрица, обратная к ω_{ij}, задает на нем пуассонову структуру.*

Доказательство.

По определению симплектического многообразия, 2-форма Ω замкнута, т.е. выполнено равенство

$$0 = d\Omega = \sum_{k=1,i<j}^{n} \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j = \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} \left(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k,$$

откуда вытекает, что

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x^j} = 0 \tag{1.20}$$

для любых $i < j < k$. Используя теперь правило дифференцирование обратной матрицы $(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}$, где $A = (\omega^{ij})$, получаем:

$$\sum_{p,q=1}^{n} \left(\omega_{ip} \frac{\partial \omega^{pq}}{\partial x^k} \omega_{qj} + \omega_{jp} \frac{\partial \omega^{pq}}{\partial x^i} \omega_{qk} + \omega_{kp} \frac{\partial \omega^{pq}}{\partial x^j} \omega_{qi} \right) = 0.$$

Домножим теперь полученное соотношение на матрицу A^3:

$$\sum_{p,q,i,j,k=1}^{n} \left(\omega_{ip} \frac{\partial \omega^{pq}}{\partial x^k} \omega_{qj} + \omega_{jp} \frac{\partial \omega^{pq}}{\partial x^i} \omega_{qk} + \omega_{kp} \frac{\partial \omega^{pq}}{\partial x^j} \omega_{qi} \right) \omega^{i\alpha} \omega^{j\beta} \omega^{k\gamma} =$$

$$= - \sum_{p,q,i,j,k=1}^{n} \left(\delta_p^\alpha \delta_q^\beta \omega^{k\gamma} \frac{\partial \omega^{pq}}{\partial x^k} + \delta_p^\beta \delta_q^\gamma \omega^{i\alpha} \frac{\partial \omega^{pq}}{\partial x^i} + \delta_p^\gamma \delta_q^\alpha \omega^{j\beta} \frac{\partial \omega^{pq}}{\partial x^j} \right) =$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} \left(\omega^{\gamma k} \frac{\omega^{\alpha\beta}}{\partial x^k} + \omega^{\alpha i} \frac{\partial \omega^{\beta\gamma}}{\partial x^i} + \omega^{\beta j} \frac{\partial \omega^{\gamma\alpha}}{\partial x^j} \right)$$

(здесь мы дважды воспользовались кососимметричностью бивектора ω^{ij}). Легко видеть, что после замены всех индексов суммирования на один индекс l последняя сумма превращается в левую часть равенства (1.19). Таким образом, из замкнутости симплектической формы Ω вытекает выполнение условия Схоутена, т.е. матрица, обратная к ω_{ij}, задает пуассонову структуру на M, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 1.17. Мы показали, что всякое симплектическое многообразие является пуассоновым, т.е. что класс пауссоновых многообразий шире, чем класс симплектических многообразий. Интересным обстоятельством является то, что в терминах симплектической структуры тождество Якоби эквивалентно простому линейному условию (1.20) замкнутости симплектической формы, а в терминах пуассоновой структуры — нелинейному условию Схоутена (1.19). В этом смысле подход, связанный с симплектической структурой, более удобен. Но, с другой стороны, понятие пуассоновой структуры, в некотором смысле, является первичным по отношению к понятию симплектической структуры, поскольку бивектор, задающий пуассонову структуру, вполне может быть вырожденным, и в этом случае, подход, связанный с симплектической структурой, не работает (а случай вырожденных скобок Пуассона представляет ничуть не меньший интерес, чем случай невырожденных).

Замечание 1.18. В дальнейшем, говоря о скобке Пуассона на симплектическом многообразии M, мы будем иметь ввиду естественную пуассонову структура, задаваемую бивектором w^{ij}, где $\Omega = \sum_{i<j} w_{ij} dx^i \wedge dx^j$ — симплектическая структура на M.

Приведем теперь без доказательства один важнейший результат о симплектических многообразиях — *теорему Дарбу*. Доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге [2].

Теорема 1.7 (Дарбу). *Пусть Ω — симплектическая структура на $2n$-мерном многообразии M. Тогда в окрестности любой его точки можно выбрать такие локальные координаты $(p^1, p^2, \ldots, p^n, q^1, q^2, \ldots, q^n)$, в которых форма Ω примет канонический вид:*

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dp^i \wedge dq^i.$$

Определение 1.16. Координаты $(p^1, p^2, \ldots, p^n, q^1, q^2, \ldots, q^n)$, в которых симплектическая форма приводится к каноническому виду, называются *симплектическими*, а атлас многообразия M, состоящий из таких карт, называется *симплектическим атласом*.

Замечание 1.19. Отметим одно очень важное обстоятельство. Как известно из линейной алгебры, любую кососимметрическую невырожденную билинейную функцию можно привести к каноническому виду, т.е. найти такой базис, в котором ее матрица будет иметь блочно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

где E — единичная матрица. Поэтому приведение симплектической структуры к каноническому виду *в одной точке* — это тривиальный вопрос. Теорема Дарбу утверждает много больше: оказывается можно выбрать такие координаты, что симплектическая структура приведется к каноническому виду сразу в *некоторой окрестности* любой точки симплектического многообразия. В этом принципиальное отличие симплектических многообразий от римановых — в любой точке риманова метрика может быть приведена к каноническому виду (т.е. в такому виду, что ее матрица станет единичной), однако, как известно из дифференциальной геометрии, если тензор кривизны риманова многообразия отличен от нуля, невозможно выбрать такие координаты, что риманова метрика станет единичной сразу в целой окрестности точки риманова многообразия.

1.3.2 Гамильтоновы векторные поля

Определение 1.17. Пусть M — пуассоново многообразие с пуассоновой структурой ω^{ij}, а f — гладкая функция на нем. *Гамильтоновым векторным полем*, соответствующим функции f, называется векторное поле вида

$$\xi_f^i = -\sum_{j=1}^{n} \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Предложение 1.10. *Пусть (M, Ω) — симплектическое многообразие, а $f, g \in C^\infty(M)$ — произвольные гладкие функции на нем. Тогда их естественная скобка Пуассона равна значению симплектической формы Ω на паре соответствующих гамильтоновых векторных полей ξ_g и ξ_f.*

Доказательство.

По определению скобки Пуассона имеем:

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^{n} \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}.$$

С другой стороны,

$$\Omega(\xi_g,\xi_f)=\sum_{k,l=1}^{n}\omega_{kl}\xi_g^k\xi_f^l=\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\omega_{kl}\omega^{kj}\omega^{li}\frac{\partial g}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i}=\sum_{i,j,k=1}^{n}\delta_k^i\omega^{kj}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}=\sum_{i,j=1}^{n}\omega^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}.$$

Таким образом, $\{f,g\}=\Omega(\xi_g,\xi_f)$,

Q.e.d.

Замечание 1.20. Невырожденная пуассонова структура (как и риманова метрика) отождествляет векторные и ковекторные поля на пуассоновом многообразии. В частности, в случае симплектического многообразия, когда симплектическая форма приведена к каноническому виду, гамильтоново векторное поле имеет компоненты

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial q^1},-\frac{\partial f}{\partial q^2},\ldots,-\frac{\partial f}{\partial q^n},\frac{\partial f}{\partial p^1},\frac{\partial f}{\partial p^2},\ldots,\frac{\partial f}{\partial p^n}\right).$$

Поэтому иногда гамильтоновы векторные поля называются *косыми градиентами.*

Пусть M — пуассоново многообразие со скобкой Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$, а H — некоторая гладкая функция на нем. Тогда траектории соответствующего гамильтонова векторного поля задаются дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}^i=\{H,x^i\}. \tag{1.21}$$

Система (1.21) называется *гамильтоновой системой*, соответствующей *гамильтониану* H.

Замечание 1.21. Если M — симплектическое многообразие, то, как нетрудно убедиться, при переходе к симплектическим координатам (которые всегда существуют согласно теореме Дарбу), любая гамильтонова система приведется к каноническому виду (1.16). Таким образом, если не выходить за рамки симплектической геометрии (как это делается, например, в книгах [2, 24]), достаточно рассматривать канонические гамильтоновы системы. Однако, в этом случае фазовое пространство может быть только четномерным, что значительно сужает класс рассматриваемых объектов. Мы не будем ограничиваться рассмотрением скобок Пуассона, соответствующих симплектическим структурам, что позволит нам обсудить ряд важных примеров нечетномерных гамильтоновых систем.

Замечание 1.22. По аналогии со случаем канонический гамильтоновой системы, функция $I\in C^\infty(M)$, определенная на пуассоновом многобразии M, является первым интегралом общей гамильтононой системы (1.21) если и только если ее скобка Пуассона с соответствующим гамильтонианом равна нулю:

$$\frac{dI}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial I}{\partial x^i}\dot{x}^i=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial I}{\partial x^i}\omega^{ji}\frac{\partial H}{\partial x^j}=\{H,I\}.$$

Отсюда, в частности, следует, что гамильтониан всегда сохраняется вдоль траекторий соответствующего гамильтонова векторного поля.

Предложение 1.11. *На пуассоновом многообразии гамильтоново векторное поле, соответствующее скобке Пуассона двух гамильтоновых векторных полей, является их коммутатором.*

Доказательство.

Рассмотрим гамильтоново векторное поле, соответствующее $\{f, g\}$:

$$\xi^i_{\{f,g\}} = -\sum_{j=1}^{n} \omega^{ij} \frac{\partial\{f,g\}}{\partial x^j} =$$

$$= -\sum_{j,k,l=1}^{n} \omega^{ij} \frac{\partial \omega^{kl}}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial g}{\partial x^l} - \sum_{j,k,l=1}^{n} \omega^{ij} \omega^{kl} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j} \frac{\partial g}{\partial x^l} + \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial^2 g}{\partial x^l \partial x^j} \right). \quad (1.22)$$

С другой стороны, компоненты коммутатора гамильтоновых векторных полей имеют следующий вид:

$$[\xi_f, \xi_g]^i = -\sum_{j,k=1}^{n} \omega^{jk} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(-\sum_{l=1}^{n} \omega^{il} \frac{\partial g}{\partial x^l} \right) + \sum_{j,l=1}^{n} \omega^{jl} \frac{\partial g}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(-\sum_{k=1}^{n} \omega^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) =$$

$$= \sum_{j,k,l=1}^{n} \left(\omega^{jk} \frac{\partial \omega^{il}}{\partial x^j} - \omega^{jl} \frac{\partial \omega^{ik}}{\partial x^j} \right) \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial g}{\partial x^l} + \sum_{j,k,l=1}^{n} \left(\omega^{jk} \omega^{il} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial^2 g}{\partial x^j \partial x^l} - \omega^{jl} \omega^{ik} \frac{\partial g}{\partial x^l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j} \right). \quad (1.23)$$

Сравним теперь выражения (1.22) и (1.23). Легко видеть, что после замены индексов суммирования последняя сумма в (1.23) превращается в последнюю сумму в (1.22) в силу кососимметричности бивектора ω^{ij}. А первую сумму в (1.23) преобразуем с помощью кососимметричности и условия Схоутена (1.19):

$$\omega^{jk} \frac{\partial \omega^{il}}{\partial x^j} - \omega^{jl} \frac{\partial \omega^{ik}}{\partial x^j} = \omega^{lj} \frac{\partial \omega^{ik}}{\partial x^j} + \omega^{kj} \frac{\partial \omega^{li}}{\partial x^j} = -\omega^{ij} \frac{\partial \omega^{kl}}{\partial x^j},$$

т.е. выражения (1.22) и (1.23) совпадают. Таким образом,

$$\xi_{\{f,g\}} = [\xi_f, \xi_g],$$

Q.e.d.

Замечание 1.23. Доказанное предложение позволяет ввести на множестве гамильтоновых векторных полей на произвольном пуассоновом многообразии M структуру алгебры Ли. При этом отображение $f \mapsto \xi_f$, где $f \in C^\infty(M)$, задает гомоморфизм из алгебры Ли $C^\infty(M)$ в эту построенную алгебру Ли гамильтоновых векторных полей.

Задача 1.5. Пусть (M, Ω) — симплектическое многообразие. Доказать, что поток, соответствующий произвольному гамильтонову векторному полю (т.е. однопараметрическая группа сдвигов вдоль траекторий этого векторного поля), сохраняет симплектическую структуру Ω.

1.3.3 Функции Казимира

Мы уже отмечали, что на всяком симплектическом многообразии имеется естественная невырожденная пуассонова структура, задаваемая обращением симплектической формы и что класс пуассоновых многообразий является более широким, чем класс симплектических многообразий. Во многих важных примерах, как мы увидим ниже, скобки Пуассона оказываются вырожденными. Тем не менее, всегда оказывается возможным ограничить систему на некоторое подмногообразие, на котором скобка Пуассона уже является невырожденной.

Определение 1.18. Пусть M — n-мерное пуассоново многообразие. Тогда функция $J \in C^\infty(M)$ называется *функцией Казимира* или *аннулятором* скобки Пуассона, если $\{J, f\} \equiv 0$ для всех $f \in C^\infty(M)$. Если k — максимальное количество независимых функций Казимира, то число $r = n - k$ называется *рангом* скобки Пуассона.

Замечание 1.24. Вырожденность скобки Пуассона на всем многообразии M эквивалентна наличию функций Казимира.

Предложение 1.12. *Пусть M — пуассоново многообразие с вырожденной скобкой Пуассона, а J — некоторая функция Казамира. Тогда все подмногообразия уровня $J = \mathrm{const}$ инвариантны для произвольного гамильтонова векторного поля ξ_H на многообразии M.*

Доказательство.

Продифференцируем функцию Казимира в силу нашей гамильтоновой системы (1.21):

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial x^i} = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial x^i} \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j} = \{H, J\} = 0,$$

т.е. функции Казимира не изменяются вдоль траекторий гамильтонова векторного поля ξ_H, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Следствие 1.3. *Наличие k независимых функций Казимира у гамильтоновой системы (1.21) позволяет понизить ее порядок на k.*

Определение 1.19. Пусть $J_1, J_2, \ldots, J_k$ — максимальный набор независимых функций Казимира на пуассоновом многообразии. Тогда любое их совместное подмногообразие уровня называется *симплектическим листом.*

Естественно предположить, что после того, как мы "отсекли" вырожденную часть скобки Пуассона, ограничившись на некоторый ее симплектический лист, мы получим невырожденную скобку Пуассона и, соответственно, симплектическую структуру. Это, действительно, так, хотя здесь требуется определенная аккуратность. Вообще говоря, операция ограничения тензорного поля не является корректно определенной — в самом деле, даже линейный оператор можно ограничить лишь на инвариантное подпространство (никаких проблем не возникает лишь с ковариантными тензорными полями, т.е. с тензорами с нижними индексами). Однако, в случае пуассоновой структуры при ограничении на симплектические листы таких проблем не возникает. Сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 1.8. *Пусть M — $2n + k$-мерное пуассоново многообразие и ранг скобки Пуассона во всех его точках равен $2n$. Тогда пуассонова структура корректно органичивается на любой симплектический лист N, на котором можно ввести симплектическую структуру с помощью матрицы $\tilde{\omega}_{ij}$, обратной к ограничению пуассоновой структуры на N.*

Замечание 1.25. Может так получиться, что на пуассоновом многообразии с скобкой Пуассона ранга r в некоторой окрестности какой-нибудь точки этот ранг оказывается меньше, чем r. Это означает, что в этой окрестности есть дополнительные функции Казимира, которые не продолжаются на все многообразие M. В такой ситуации говорят о *локальных функциях Казимира.* Однако, рассмотрение скобок Пуассона непостоянного ранга значительно усложняет ситуацию; поэтому мы в дальнейшем будем предполагать, что все рассматриваемые скобки Пуассона имеют постоянный ранг (во всяком случае, на множестве полной меры).

Замечание 1.26. Смысл сформулированной нами теоремы состоит в следующем: если нам удалось найти полный набор независимых функций Казимира для некоторого пуассонова многообразия, то ограничив произвольное гамильтоново векторное поле на любой симплектический лист, мы можем получить гамильтонову систему уже на *симплектическом многообразии*, что при необходимости позволяет использовать весь аппарат симплектической геометрии. Таким образом, для гамильтоновых систем на пуассоновых многообразиях задача поиска функций Казимира является даже, в некотором смысле, более важной, чем задача поиска первых интегралов.

1.3.4 Канонические преобразования

При изучении симплектических многообразий важнейшую роль играют *симплектоморфизмы*, т.е. отображения симплектических многообразий, сохраняющие симплектическую структуру. Следуя традиции, пришедшей из классической механики, иногда (особенно если рассматривается симплектическое многообразие $\mathbb{R}^{2n}$) симплектоморфизмы называют *каноническими преобразованиями*.

Определение 1.20. Пусть Ω_1 и Ω_2 — две симплектические структуры в $\mathbb{R}^{2n}$. Отображение $g:$ $,\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ называется *каноническим преобразованием*, если оно сохраняет симплектическую структуру: $\Omega_1 = g^*\Omega_2$.

Пример 1.10. Пусть в $\mathbb{R}^2$ задана стандартная симплектическая структура $\Omega = dp \wedge dq$. Легко видеть, что преобразование $P(p,q) = q$, $Q(p,q) = p$ не является каноническим, поскольку $dP \wedge dQ = dq \wedge dp = -\Omega$. А вот преобразование $P(p,q) = -q$, $Q(p,q) = p$, очевидно, является каноническим. Нетрудно найти необходимое и достаточное условие, при котором преобразование $P = P(p,q)$, $Q = Q(p,q)$ будет каноническим. В самом деле, поскольку

$$dP \wedge dQ = \left(\frac{\partial P}{\partial p}dp + \frac{\partial P}{\partial q}dq\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial p}dp + \frac{\partial Q}{\partial q}dq\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p}\right) dp \wedge dq,$$

условием каноничности преобразования является требование

$$\left(\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p}\right) = 1.$$

Предложение 1.13. *Канонические преобразования сохраняют гамильтонов вид уравнений.*

Доказательство.

Пусть $g : (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_1) \to (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_2)$ — каноническое преобразование, а $\omega^{ij}(\mathbf{x})$ и $\tilde{\omega}^{kl}(\mathbf{y})$ — пуассоновы структуры, соответствующие симплектическим формам Ω_1 и Ω_2 соответственно. Тогда гамильтонова система

$$\dot{x}^j = \sum_{i=1}^{2n} \omega^{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad j = 1, 2, \dots, 2n$$

в новых координатах $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$ запишется в виде

$$\dot{y}^l = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial y^l}{\partial x^j}\dot{x}^j = \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial y^l}{\partial x^j}\omega^{ij}(\mathbf{x})\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad l = 1, 2, \dots, 2n.$$

С другой стороны, гамильтониан $\tilde{H}$ имеет вид $\tilde{H}(\mathbf{y}) = H(g^{-1}(\mathbf{y}))$, поэтому

$$\sum_{k=1}^{2n} \tilde{\omega}^{kl}(\mathbf{y})\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y^k} = \sum_{i,j,k,s} \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial y^l}{\partial x^j}\omega^{ij}(\mathbf{x})\frac{\partial H}{\partial x^s}\frac{\partial x^s}{\partial y^k} = \sum_{i,j,k,s} \delta_i^s \frac{\partial y^l}{\partial x^j}\omega^{ij}(\mathbf{x})\frac{\partial H}{\partial x^s} = \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial y^l}{\partial x^j}\omega^{ij}(\mathbf{x})\frac{\partial H}{\partial x^i}.$$

Таким образом,

$$\dot{y}^l = \sum_{k=1}^{2n} \tilde{\omega}^{kl}(\mathbf{y})\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y^k}$$

для всех $l = 1, 2, \dots, 2n$. Таким образом, канонические преобразования сохраняют гамильтонов вид уравнений, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 1.27. Легко заметить, что приведенное выше доказательство без каких-либо изменений проходит для общих симплектоморфизмов и гамильтоновых систем на симплектических многообразиях.

Замечание 1.28. В некоторых случаях канонические преобразования позволяют заметно упростить гамильтонову систему. Например, если удалось подобрать каноническое преобразование таким образом, что в новых координатах гамильтониан $\tilde{H}$ будет зависеть от меньшего числа переменных, система станет существенно проще.

Предложение 1.14. *Преобразование* $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ *пространства* $\mathbb{R}^{2n}$ *со стандартной симплектической структурой* $\Omega = \sum dp_i \wedge dq_i$ *является каноническим тогда и только тогда, когда существует функция* $S = S(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ *такая, что*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - \sum_{i=1}^{n} P_i dQ_i = dS. \tag{1.24}$$

Доказательство.

Достаточность условия (1.24) очевидна: в самом деле, беря внешний дифференциал от обеих частей равенства (1.24) немедленно получаем, что преобразование $(p, q) \to (P, Q)$ сохраняет симплектическую форму. Необходимость вытекает из леммы Пуанкаре: поскольку каноническое преобразование сохраняет симплектическую форму, дифференциальная форма $\sum p_i dq_i - \sum P_i dQ_i$ замкнута и, следовательно, точна, $\mathfrak{Q.e.d.}$

1.4 Теорема Лиувилля

Поскольку многие задачи естествознания сводятся к дифференциальным уравнениям, их явное решение представляет огромный интерес с точки зрения приложений. Однако, большинство обыкновенных дифференциальных уравнений не решается в явном виде в терминах элементарных функций или интегралов от них (так называемых *квадратур*). Иногда удается понизить порядок той или иной системы, т.е. исключить одну или несколько переменных, “заработав” при этом константы интегрирования. На самом деле, понижение порядка есть ни что иное как использование первого интеграла. В самом деле, наличие первого интеграла с геометрической точки зрения означает, что все интегральные траектории лежат на его поверхностях уровня, а с алгебраической — что между динамическими переменными есть некоторое алгебраическое соотношение, включающее константу интегрирования. А возможность исключить какую-нибудь переменную — это тоже алгебраическое соотношение. Поэтому, наличие большого количества первых интегралов у системы если и не дает нам явного решения, то, во всяком случае, приближает нас к нему, поскольку любая интегральная траектория лежит на пересечении поверхностей уровня всех первых интегралов. Таким образом, задача поиска первых интегралов представляет особый интерес.

Особенность гамильтоновых систем состоит в следующем: вообще говоря, если n — порядок системы уравнений, то для полного ее интегрирования нужно $n-1$ независимых первых интегралов, поскольку $n-1$ независимое условие, вообще говоря, высекает в n-мерном фазовом пространстве одномерный объект, т.е. кривую. Однако, в случае гамильтоновых систем для полного интегрирования достаточно меньшего количества первых интегралов. Кроме того, для автономных систем один первый интеграл мы уже знаем — это гамильтониан. В дальнейшем, если специально не оговорено противное, мы будем рассматривать общие гамильтоновы системы на пуассоновых многообразиях.

Прежде чем переходить к обсуждению понятия вполне интегрируемой системы отметим одно немаловажное обстоятельство. Как известно из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, всякое гладкое векторное поле ξ без особых точек в $\mathbb{R}^n$ локально можно выпрямить, т.е. в некоторой окрестности произвольной точки $P \in \mathbb{R}^n$, не являющейся особой для векторного поля ξ можно найти такие криволинейные координаты $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$, что в них поле ξ становится постоянным, а соответствующая динамика принимает тривиальный вид:

$$\dot{y}^1 = 1, \quad \dot{y}^2 = \dot{y}^3 = \cdots = \dot{y}^n = 0.$$

Поскольку это утверждение носит локальный характер, его можно распространить на случай гамильтоновых векторных полей на пуассоновом многообразии. Поэтому, в таком смысле любая гамильтонова система интегрируема. Однако, мы будем интересоваться глобальными характеристиками гамильтоновых систем, и из-за этого такой подход не представляет интереса для нас.

1.4.1 Наводящие соображения

Начнем с разбора двух простых, но важных примеров.

Пример 1.11. Рассмотрим *гармонический осциллятор*, т.е. гамильтонову систему с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$ на двумерном фазовом пространстве $\mathbb{R}^2(p, q)$ с канонической скобкой Пуассона, где $\omega = \mathrm{const}$. Легко видеть, что уравнения (1.16) принимают вид

$$\begin{cases} \dot{p} = -\omega^2 q \\ \dot{q} = p \end{cases}, \tag{1.25}$$

откуда $\ddot{q} = -\omega^2 q$. Поэтому общее решений нашей гамильтоновой системы имеет вид

$$q = q(t) = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t, \quad p = p(t) = c_1 \omega \cos \omega t - c_2 \omega \sin \omega t, \tag{1.26}$$

где c_1 и c_2 — константы интегрирования. Таким образом, нам удалось явно решить эту простейшую гамильтоновы системы, но здесь мы целиком и полностью обязаны везению, поскольку эта система свелась к линейному уравнению с постоянными коэффициентами, на что в общем случае надеяться не приходится.

Посмотрим на эту систему с другой стороны: мы уже знаем, что ее гамильтониан является первым интегралом: $H = \mathrm{const}$ вдоль фазовых траекторий. Легко видеть, что это уравнение задает семейство эллипсов $p^2 + \omega^2 q^2 = \mathrm{const}$ на фазовой плоскости (точнее, семейство эллипсов и точку). Таким образом движение происходит по эллипсам, и уже из этого мы можем сделать вывод о том, что наша система может быть проинтегрирована явно (даже если бы мы не знали, что она сводится к линейному уравнению).

Другое важное наблюдение состоит в том, что, поскольку движение происходит по эллипсам, мы можем ввести более удобные координаты ρ, θ, полагая

$$p = \rho \cos \theta, \quad q = \frac{\rho}{\omega} \sin \theta.$$

Легко видеть, что при этом $\rho = \sqrt{2H} = \mathrm{const}$; поэтому, дифференцируя первое из этих равенств по t и пользуясь исходными уравнениями Гамильтона, мы получаем, что

$$\dot{p} = -\rho \dot{\theta} \sin \theta = -\omega^2 q = -\omega \rho \sin \theta,$$

откуда $\dot{\theta} = \omega$, т.е. $\theta = \omega t + \omega_0$, где ω_0 — константа интегрирования. Таким образом, в новых координатах динамика стала линейной. Угадать эти более удобные “выпрямляющие” координаты, конечно, можно было и исходя из явного вида (1.26) решения, заметив, что $\omega\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{2H}$, но приведенная выше процедура, использующая первый интеграл, приводит к этим координатам более естественным образом.

Пример 1.12. Рассмотрим прямую сумму n гармонических осцилляторов, т.е. гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(p_i^2 + \omega_i q_i^2\right).$$

Легко видеть, что соответствующие уравнения распадаются на n независимых пар вида

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\omega_i q_i \\ \dot{q}^i = p_i \end{cases}$$

и что в каждой двумерной плоскости (p^i, q_i) движение происходит по эллипсам, на которые она расслаивается. С одной стороны, это означает, что наша система может быть проинтегрирована в явном виде, а с другой — что каждая фазовая траектория этой лежит на декартовом произведении соответствующих эллипсов, т.е. на многообразии, диффеоморфном n-мерному тору. Более того, в каждой из этих плоскостей можно ввести более удобные координаты ρ_i и θ_i, в которых динамика становится линейной.

Разобранные выше примеры демонстрируют типичную для интегрируемых гамильтоновых систем картину: динамика регулярна и происходит по торам, а уравнения в некотором смысле интегрируются — ниже мы сформулируем и докажем соответствующую теорему, которая, грубо говоря, состоит в том, что все интегрируемые гамильтоновы системы ведут себя в определенном смысле как прямая сумма гармонических осцилляторов. Однако, прежде нам потребуется обсудить одно важное понятие.

1.4.2 Независимость первых интегралов

Ясно, что для того, чтобы понизить порядок системы сразу на несколько единиц, нам необходимо несколько первых интегралов, причем эти интегралы должны высекать в нашем пуассоновом многообразии *различные* подмногообразия уровня. Поэтому нам необходимо, чтобы эти интегралы были в некотором смысле независимы. Разберемся с этим более подробно, поскольку в разных ситуациях под "независимостью системы функций" понимают разные вещи. Можно говорить о функциональной независимости, о линейной независимости или о независимости дифференциалов этих функций, причем эти три понятия, вообще говоря, не эквивалентны.

Определение 1.21. Набор функций $f_1, f_2, \ldots, f_k$, определенных на многообразии M, называется *функционально независимым*, если между этими функциями нет функционального соотношения, т.е. не существует такой гладкой функции Φ, что

$$\Phi(f_1, f_2, \ldots, f_k) \equiv 0.$$

Предложение 1.15. *Если набор функций $f_1, f_2, \ldots, f_k$, определенных в некоторой области на n-мерном многообразии M, является функционально независимым, то матрица Якоби*

$$J = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_k)}{D(x^1, x^2, \ldots, x^n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \frac{\partial f_1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{x^n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x^1} & \frac{\partial f_2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{x^n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^1} & \frac{\partial f_k}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f_k}{x^n} \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

имеет ранг k, где $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — произвольная система локальных координат на M.

Доказательство.

Предположим, что между функциями $f_1, f_2, \ldots, f_k$ есть некоторое функциональное соотношение, т.е. существует такая функция Φ, что

$$\Phi(f_1, f_2, \ldots, f_k) \equiv 0.$$

Продифференцируем это тождество последовательно по все переменным $x^1, x^2, \ldots, x^n$ и получим n тождеств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x^1}\Phi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x^1}\Phi_2 + \cdots + \frac{\partial f_k}{\partial x^1}\Phi_k \equiv 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x^2}\Phi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x^2}\Phi_2 + \cdots + \frac{\partial f_k}{\partial x^2}\Phi_k \equiv 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x^n}\Phi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x^n}\Phi_2 + \cdots + \frac{\partial f_k}{\partial x^n}\Phi_k \equiv 0 \end{array} \right. ,$$

где Φ_j обозначает производную функции Φ по ее j-тому аргументу. Полученную систему можно переписать в виде

$$J^t \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_k \end{pmatrix} = 0; \tag{1.28}$$

поскольку $\Phi \neq \mathrm{const}$, у нее есть нетривиальное решение, откуда следует, что $\mathrm{rk}\, J < k$, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 1.29. Обратное утверждение, вообще говоря, верно лишь локально и является следствием теоремы о неявной функции. В самом деле, если в некоторой точке матрица J имеет ранг $m < k$, то у матрицы J существует минор порядка m, который отличен от нуля в некоторой окрестности этой точки (без ограничения общности можно считать, что это — левый верхний минор), а это означает, что функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$ выражаются через оставшиеся. Тем не менее, глобально обратное утверждение верно, если все функции определены на компакте, поскольку этот компакт можно покрыть окрестностями из теоремы о неявной функции, затем выделить конечное подпокрытие и перемножить соответствующие функциональные соотношения.

Замечание 1.30. Требование линейной зависимости функций, очевидно, сильнее требования функциональной зависимости: если набор функций линейно зависим, то он и функционально зависим. Обратное, опять-таки, неверно, как показывает следующий пример.

Пример 1.13. Рассмотрим функции $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенные следующим образом:

$$f_1(x) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \ x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, \ x > 0 \end{array} \right. , \quad f_2(x) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \ x \geqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, \ x < 0 \end{array} \right. .$$

Легко видеть, что они являются линейной независимыми, но функционально зависимыми, поскольку, например, $f_1 \cdot f_2 \equiv 0$.

Таким образом, и из линейной, и даже из функциональной независимости вытекает независимость дифференциалов, т.е. максимальность ранга матрицы Якоби (или, что эквивалентно, регулярность соответствующего отображения во всех точках). В дальнейшем, применительно к первым интегралам, мы будем пользоваться именно этим понятием независимости. Сформулируем это в виде точного определения.

Определение 1.22. Пусть $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — локальные координаты на n-мерном пуассоновом многообразии M и пусть $k < n$. Тогда набор $I_1, I_2, \ldots, I_k$ первых интегралов гамильтоновой системы на M называется *независимым*, если матрица Якоби

$$J = \frac{D(I_1, I_2, \ldots, I_k)}{D(x^1, x^2, \ldots, x^n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial I_1}{\partial x^1} & \frac{\partial I_1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial I_1}{x^n} \\ \frac{\partial I_2}{\partial x^1} & \frac{\partial I_2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial I_2}{x^n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial I_k}{\partial x^1} & \frac{\partial I_k}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial I_k}{x^n} \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

имеет ранг k.

1.4.3 Интегрируемость по Лиувиллю

Определение 1.23. Говорят, что первые интегралы I_1 и I_2 гамильтоновой системы (1.21) находятся *в инволюции*, если их скобка Пуассона тождественно равна нулю: $\{I_1, I_2\} \equiv 0$.

Предложение 1.16. *Пусть (M, Ω) — $2n$-мерное симплектическое многообразие. Тогда любое гамильтоново векторное поле ξ_H на нем не может иметь более чем n независимых первых интегралов в инволюции.*

Доказательство.

Пусть $I_1, I_2, \ldots, I_k$ — независимые первые интегралы гамильтонова векторного поля ξ_H и пусть любые два из них находятся в инволюции. Тогда соответствующие гамильтоновы векторные поля $\xi_{I_1}, \xi_{I_2}, \ldots, \xi_{I_k}$ независимы и коммутируют или, что эквивалентно, порождают в касательном пространстве $T_P M$ к многообразию M в каждой его точке $P \in M$ изотропное подпространство относительно кососимметрической билинейной функции $\Omega(P)$. Но, как известно, если соответствующая билинейная функция невырождена, то размерность изотропного подпространства не может превышать n. Таким образом, $k \leqslant n$, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Определение 1.24. Гамильтонова система (1.21) на $2n$-мерном симплектическом многообразии M называется *вполне интегрируемой* (или *интегрируемой по Лиувиллю*), если она имеет n независимых первых интегралов в инволюции.

Замечание 1.31. Доказанное выше предложение 1.16 объясняет смысл понятия “полная интегрируемость”: вполне интегрируемая система имеет *максимально возможное* количество независимых первых интегралов в инволюции.

Определение 1.25. Система дифференциальных уравнений называется *интегрируемой в квадратурах*, если ее общее решение выражается через задающие ее функции при помощи алгебраических операций (включая подстановку), операций дифференцирования и интегрирования и решения систем неявных уравнений.

Теперь мы готовы к тому, чтобы сформулировать основную теорему этого раздела — теорему Лиувилля об полной интегрируемости гамильтоновых систем. Доказательство будет разделено на несколько этапов, некоторые из которых будут проведены не в максимальной общности.

Теорема 1.9 (Лиувилль). *Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — набор независимых функций в инволюции на $2n$-мерном симплектическом многообразии (M, Ω). Рассмотрим совместное многообразие уровня*

$$N_{\mathbf{c}} = \{H_1(\mathbf{x}) = c_1, H_2(\mathbf{x}) = c_2, \ldots, H_n(\mathbf{x}) = c_n\}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *При любых значениях вектора констант* $\mathbf{c}$ *многообразие* $N_{\mathbf{c}}$ *инвариантно относительно всех потоков, порожденных гамильтоновыми векторными полями* $\xi_{H_1}, \xi_{H_2}, \ldots, \xi_{H_n}$, *и является лагранжевым подмногообразием в* M *(т.е. ограничение симплектической структуры на* $N_{\mathbf{c}}$ *является тождественным нулем).*

2. *Для произвольной точки подмногообразия* $N_{\mathbf{c}}$ *существует такая ее окрестность в* M, *в которой можно ввести "выпрямляющие" локальные координаты вида*

$$(H_1, H_2, \ldots, H_n, t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

т.е. такие, что в них динамика, соответствующая любому из гамильтоновых векторных полей ξ_{H_i}, *становится тривиальной:*

$$\dot{H}_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad \dot{t}_i = 1, \quad \dot{t}_j = 0 \quad \textit{при } j \neq i. \tag{1.30}$$

При этом скобки Пуассона этих координат имеют вид

$$\{H_i, H_i\} = 0, \quad \{t_i, H_j\} = \delta_{ij} \quad \textit{для всех } i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.31}$$

3. *Если многообразие* $N_{\mathbf{c}}$ *связно и траектории всех векторных полей* $\xi_{H_1}, \xi_{H_2}, \ldots, \xi_{H_n}$ *продолжаются на все* $\mathbb{R}$, *то это многообразие диффеоморфно декартову произведению* k*-мерного тора и евклидова пространства:* $N_{\mathbf{c}} \simeq T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ *для некоторого* $k = 0, 1, \ldots, n$. *В частности, если* $N_{\mathbf{c}}$ *еще и компактно, то оно диффеоморфно* n*-мерному тору.*

4. *Если все многообразия* $N_{\mathbf{c}}$ *для некоторой окрестности точки* $\mathbf{c}_0$ *в пространстве параметров связны и компактны, то в окрестности подмногообразия* $N_{\mathbf{c}_0}$ *посредством квадратур можно построить симплектические координаты*

$$I_1, I_2, \ldots, I_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \tag{1.32}$$

такие, что $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *— это стандартные угловые координаты на торах* $N_{\mathbf{c}}$, *а* $I_1, I_2, \ldots, I_n$ *являются функциями гамильтонианов* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *(и потому постоянны вдоль траекторий любого из гамильтоновых векторных полей), а динамика, порождаемая соответствующими векторными полями на торах в этих координатах становится условно-периодической:* $\dot{\varphi}_i = \lambda_i = \mathrm{const}$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство.

Начнем с первого из утверждений теоремы. Поскольку функции $H_1, H_2, \ldots, H_n$ независимы, в силу теоремы о неявной функции из совместная поверхность уровня $N_{\mathbf{c}}$ является n подмногообразием в M. Кроме того, так как любые две функции H_i и H_j находятся в инволюции, производная функции H_i по направлению векторного поля ξ_{H_j} равна нулю; поэтому подмногообразие $N_{\mathbf{c}}$ инвариантно относительно потока, порождаемого любым из векторных полей H_j. Это означает поля ξ_{H_j} образуют базис в каждом касательном пространстве к $N_{\mathbf{c}}$, причем в силу Предложения 1.11 все эти векторные поля коммутируют между собой. А из Предложения 1.10 немедленно вытекает, что ограничение симплектической формы Ω на подмногообразие $N_{\mathbf{c}}$ является тождественным нулем, поскольку все функции H_i находятся в инволюции. А это означает, что $N_{\mathbf{c}}$ — лагранжево подмногообразие. Таким образом, первое из утверждений теоремы Лиувилля доказано.

Мы показали, что на $N_{\mathbf{c}}$ есть n независимых и попарно коммутирующих векторных полей. Это означает, что коммутируют и порождаемые ими потоки $g_i^{t_i}$. Рассмотрим произвольную точку $P \in N_{\mathbf{c}}$; тогда если все t_i достаточно малы, то корректно определено отображение

$$g^{\mathbf{t}}(P) = g_1^{t_1} g_2^{t_2} \ldots g_n^{t_n}(P), \quad \text{где } P \in N_{\mathbf{c}},\ \mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots t_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{1.33}$$

Геометрически это означает, что сперва мы сдвинули точку на время t_1 вдоль первого гамильтонова потока, затем — на время t_2 вдоль второго и т.д. Поскольку векторные поля коммутируют, порядок, в котором осуществлять сдвиги, не имеет значения. Фиксируем произвольную точку $P_0 \in N_{\mathbf{c}}$ и зададим отображение

$$g : \mathbb{R}^n \to N_{\mathbf{c}}, \quad g(\mathbf{t}) = g^{\mathbf{t}}(P_0). \tag{1.34}$$

Поскольку $g(\mathbf{0}) = P_0$ и гамильтоновы векторные поля $\xi_{H_1}, \xi_{H_2}, \ldots, \xi_{H_n}$ независимы, матрица Якоби отображения g в точке $\mathbf{0}$ имеет максимальный ранг. Поэтому отображение g осуществляет диффеоморфизм некоторой окрестности $U \subset \mathbb{R}^n$ точки $\mathbf{0}$ на окрестность $V \subset N_{\mathbf{c}}$ точки P_0. В силу теоремы о гладкой зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных отсюда следует, функции

$$H_1, H_2, \ldots, H_n, t_1, t_2, \ldots, t_n$$

задают локальные координаты в некоторой окрестности точки P_0 в многообразии M. Легко видеть, что поскольку t_i — это время вдоль траекторий векторного поля ξ_{H_i} динамика, соответствующая этому векторному полю, становится тривиальной, т.е. принимает вид (1.30). Гамильтонианы H_i по условию находятся в инволюции, а $\{t_i, H_j\}$ — есть производная функции t_i вдоль векторного поля ξ_{H_j}, откуда немедленно вытекает, что $\{t_i, H_j\} = \delta_{ij}$. Второе утверждение теоремы Лиувилля доказано.

Для доказательства третьего утверждения теоремы Лиувилля нам потребуется следующая алгебраическая лемма.

Лемма 1.1. *Пусть Γ — дискретная подгруппа $\mathbb{R}^n$. Тогда существует линейно независимые векторы $e_1, e_2, \ldots, e_k \in \Gamma$, где $1 \leqslant k \leqslant n$, что Γ есть в точности множество целочисленных линейных комбинаций этих векторов.*

Доказательство.

Пусть Γ — непустое множество. В силу его дискретности существует вектор $e_1 \in \Gamma$, на котором достигается минимум нормы. Тогда вместе с этим вектором в Γ содержатся и всевозможные векторы вида me_1, где $m \in \mathbb{Z}$. Если подгруппа Γ исчерпывается этими векторами, то все доказано. В противном случае найдется вектор $e \in \Gamma$, не принадлежащий целочисленной линейной оболочке e_1. Очевидно, что e не коллинеарен e_1, поскольку это бы противоречило условию минимальности нормы. Значит вектор e не принадлежит прямой, задаваемой вектором e_1; спроектируем его на эту прямую. Проекция попадет на отрезок вида $[me_1, (m+1)e_1]$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. Возьмем прямоугольник, основанием которого является этот отрезок и противоположная сторона которого проходит через конец вектора e. В силу компактности этого прямоугольника и дискретности подгруппы Γ, найдется такой вектор $e_2 \in \Gamma$, конец которого попадает в этот прямоугольник и расположен на минимальном расстоянии от прямой, задаваемой вектором e_1, среди всех элементов группы Γ (не коллинеарных e_1). Таким образом, произвольная целочисленная линейная комбинация векторов e_1 и e_2 принадлежит подгруппе Γ. Кроме того, легко заметить, что в двумерной плоскости, порождаемой этими векторами, нет других точек Γ кроме тех, которые имеют вид $m_1e_1 + m_2e_2$ для некоторых $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ (такую точку целочисленными сдвигами мы всегда могли бы сместить в рассматриваемый прямоугольник).

Далее аналогично: если Γ не исчерпывается векторами вида $m_1e_1+m_2e_2$, то в Γ найдется элемент, не представимый в таком виде. Спроектируем его на плоскость, порождаемую векторами e_1 и e_2, проекция попадет в некоторый параллелограмм из целочисленной решетки, задаваемой векторами e_1 и e_2. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед, одним из оснований которого является этот параллелограмм, а другое проходит через конец найденного элемента из Γ. В параллелепипеде найдется элемент Γ, ближайший к плоскости, его и возьмем в качестве e_3, и т.д. На каждом шагу мы, очевидно, получаем линейно независимую систему векторов. Если при некотором $k < n$ подгруппа Γ исчерпается целочисленными линейными комбинациями векторов $e_1, e_2, \dots e_k$, то лемма доказана. В противном случае мы аналогичным образом строим базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ всего пространства $\mathbb{R}^n$. Целочисленная решетка, порожденная этими векторами, разбивает все $\mathbb{R}^n$ на равные параллелепипеды. Если предположить, что в подгруппе Γ если точки, отличные от узлов этой решетки, то легко понять, что любая из них, после сдвига на вектор, целочисленно кратный e_n, окажется ближе к плоскости $\langle e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\rangle$, чем конец вектора e_n — противоречие, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Пусть теперь n-мерное многообразие $N_{\mathbf{c}}$ связно, а траектории всех гамильтоновых векторных полей ξ_{H_j} продолжаются на бесконечность. Тогда отображение g корректно определено на всем $\mathbb{R}^n$, т.е. формула (1.33) задает действие группы $\mathbb{R}^n$ на подмногообразии $N_{\mathbf{c}}$ (поскольку соответствующие векторные поля коммутируют). Покажем, что отображение g сюръективно. Рассмотрим произвольную точку $P \in N_{\mathbf{c}}$. Поскольку многообразие $N_{\mathbf{c}}$ связно, существует путь γ, соединяющий точки P_0 и P. Для каждой точки этого пути построим соответствующее отображение сдвига вдоль траекторий типа (1.34) и получим окрестность этой точки, на которую оно осуществляет диффеоморфизм окрестности начала координат в $\mathbb{R}^n$. Из построенного покрытия кривой γ выделим конечное подпокрытие $V_0, V_1, \dots, V_r$ с центрами в точках $P_0, P_1, \dots, P_r$, где $V_0 = V$ и $P_r = P$. Теперь, выбирая теперь каким-нибудь образом точки Q_i на пересечении последовательных окрестностей V_{i-1} и V_i, будем отображать их обратно в окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$ с помощью соответствующего отображения g_{P_i}:

$$g_{P_i}^{-1}(Q_i) = \mathbf{t}_-^i, \quad g_{P_i}^{-1}(Q_{i+1}) = \mathbf{t}_+^i.$$

Тогда

$$Q_1 = g^{\mathbf{t}_+^0}(P_0), \quad Q_2 = g^{\mathbf{t}_+^1}(P_1), \quad \dots, \quad Q_r = g^{\mathbf{t}_+^{r-1}}(P_{r-1}).$$

С другой стороны,

$$Q_1 = g^{\mathbf{t}_-^1}(P_1), \quad Q_2 = g^{\mathbf{t}_+^2}(P_2), \quad \dots, \quad Q_r = g^{\mathbf{t}_-^r}(P_r).$$

Поэтому

$$P_1 = g^{-\mathbf{t}_-^1} \circ g^{\mathbf{t}_+^0}(P_0), \quad P_2 = g^{-\mathbf{t}_-^2} \circ g^{\mathbf{t}_+^1}(P_1), \quad \dots, \quad P_r = g^{-\mathbf{t}_-^r} \circ g^{\mathbf{t}_+^{r-1}}(P_{r-1}).$$

Таким образом, беря композицию этих сдвигов вдоль траекторий наших гамильтоновых векторных полей, находим прообраз

$$\mathbf{t} = -\mathbf{t}_-^1 - \mathbf{t}_-^2 - \dots - \mathbf{t}_-^r + \mathbf{t}_+^0 + \mathbf{t}_+^1 + \dots + \mathbf{t}_+^{r-1}$$

точки $P = P_r$. Значит, отображение g сюръективно.

Из сюръективности отображения g следует, что действие группы $\mathbb{R}^n$ на многообразии $N_{\mathbf{c}}$ транзитивно. А это означает, что стабилизаторы всех точек одинаковы в силу коммутативности группы $\mathbb{R}^n$. Пусть Γ — этот стабилизатор. Докажем теперь, что Γ — дискретная подгруппа в $\mathbb{R}^n$. В самом деле, поскольку g — диффеоморфизм окрестности нуля U на некоторую окрестность V точки $P \in N_{\mathbf{c}}$, множество U не содержит ненулевых элементов подгруппы Γ. А отсюда немедленно вытекает, что в окрестности $\mathbf{t} + U$ произвольной точки $\mathbf{t} \in \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ нет элементов подгруппы Γ, отличных от $\mathbf{t}$. Таким образом, Γ является дискретной подгруппой в $\mathbb{R}^n$. А согласно лемме 1.1 это означает, что Γ является множеством всех целочисленных линейных комбинаций некоторого набора линейно независимых векторов $e_1, e_2, \dots, e_k$.

Дополним теперь набор векторов $e_1, e_2, \dots, e_k$ до базиса в $\mathbb{R}^n$ какими-нибудь векторами $e_{k+1}, \dots, e_n$. Пусть цилиндр

$$C = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \,|\, 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1, \dots, 0 < x_k < 1\}$$

задан координатами точек в этом базисе. Поскольку стабилизатором действия $\mathbb{R}^n$ является решетка Γ, очевидно, что ограничение отображения g на цилиндр C взаимно-однозначно, а обратное отображение задает карту области на многообразии $N_{\mathbf{c}}$. Рассмотрим декартово произведение k-мерного тора на евклидово пространство $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$; оно параметризуется точками вида

$$(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \ldots, \tilde{\varphi}_k, y_1, y_2, \ldots, y_{n-k}), \quad \tilde{\varphi}_i \mod \pi, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{1.35}$$

Ясно, что отображение

$$h : T^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n, \quad h(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \ldots, \tilde{\varphi}_k, y_1, y_2, \ldots, y_{n-k}) = \left(\frac{\tilde{\varphi}_1}{2\pi}, \frac{\tilde{\varphi}_2}{2\pi}, \ldots, \frac{\tilde{\varphi}_k}{2\pi}, y_1, y_2, \ldots, y_{n-k}\right)$$

взаимно-однозначно отображает область $0 < \tilde{\varphi}_i < 2\pi$, где $i = 1, 2, \ldots, k$, на цилиндр C. А отсюда следует, что отображение $g \circ h$ задает диффеоморфизм $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ на $N_{\mathbf{c}}$ (другие карты на многообразии $N_{\mathbf{c}}$ получаются ограничением отображения g на области, получаемые сдвигом цилиндра C не векторы, не принадлежащие решетке Γ). Третье утверждение теоремы Лиувилля доказано.

Пусть теперь в некоторой окрестности точки $\mathbf{c}_0$ в пространстве параметров все многообразия уровня $N_{\mathbf{c}}$ компактны, т.е. являются торами. Тогда в некоторой окрестности тора $N_{\mathbf{c}_0}$ функции

$$H_1, H_2, \ldots, H_n, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \ldots, \tilde{\varphi}_n \tag{1.36}$$

можно принять за координаты в M (точнее, если брать функции $\tilde{\varphi}_i$ локально на торах, то мы получим локальные координаты в M). Поскольку угловые координаты $\tilde{\varphi}_i$ связаны с "временными" координатами t_i линейной заменой, из (1.31) вытекает, что скобки Пуассона функций (1.36) имеют следующий вид:

$$\{H_i, H_i\} = 0, \quad \{\tilde{\varphi}_i, H_j\} = c_{ij}(\mathbf{H}) \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Вычисляя обратную матрицу к матрице пуассоновой структуры в координатах (1.36) и учитывая наличие в этой матрице нулевого блока, получаем, что в этих координатах симплектическая форма имеет следующий вид:

$$\Omega = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(\mathbf{H}, \tilde{\varphi}) dH_i \wedge dH_j + b_{ij}(\mathbf{H}) dH_i \wedge d\tilde{\varphi}_j\right). \tag{1.37}$$

Достаточно малая окрестность W тора $N_{\mathbf{c}_0}$ стягиваема на этот тор. Отсюда с силу гомотопической инвариантности когомологий де Рама следует, что

$$H^2_{DR}(W, \mathbb{R}) = H^2_{DR}(N_{\mathbf{c}_0}, \mathbb{R});$$

но поскольку тор $N_{\mathbf{c}_0}$ является лагранжевым подмногообразием в M, ограничение симплектической формы Ω на него есть тождественный нуль. А это означает, что класс симплектической формы Ω тривиален уже в когомологиях многообразия W. Таким образом, на многообразии W форма Ω точна, т.е. существует такая 1-форма α, что $\Omega = d\alpha$.

Пусть $\gamma_i(\mathbf{H})$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, — базисные циклы на соответствующем торе. Положим

$$I_i(\mathbf{H}) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\gamma_i(\mathbf{H})} \alpha, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.38}$$

Легко видеть, что эти интегралы не зависят от выбора контура интегрирования $\gamma_i(\mathbf{H})$ в соответствующем классе гомологий. В самом деле, если циклы $\gamma_i(\mathbf{H})$ и $\gamma'_i(\mathbf{H})$ гомологичны и

$\partial\sigma(\mathbf{H}) = \gamma_i(\mathbf{H}) - \gamma_i'(\mathbf{H})$, то согласно формуле Стокса

$$\oint\limits_{\gamma_i(\mathbf{H})} \alpha - \oint\limits_{\gamma_i'(\mathbf{H})} \alpha = \iint\limits_{\sigma(\mathbf{H})} d\alpha = \iint\limits_{\sigma(\mathbf{H})} \Omega = 0,$$

поскольку интегрирование ведется по пленке на торе, на котором симплектическая форма тождественно нулевая.

Пусть в координатах (1.36) форма α имеет вид

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} \left(f_j(\mathbf{H},\varphi)d\varphi_j + g_j(\mathbf{H},\varphi)dH_j\right);$$

тогда, беря внешний дифференциал, получаем:

$$\Omega = d\alpha = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial\tilde{\varphi}_i} d\tilde{\varphi}_i \wedge d\tilde{\varphi}_j + \frac{\partial f_j}{\partial H_i} dH_i \wedge d\tilde{\varphi}_j + \frac{\partial g_j}{\partial\tilde{\varphi}_i} d\tilde{\varphi}_i \wedge dH_j + \frac{\partial g_j}{\partial H_i} dH_i \wedge dH_j\right).$$

Сравнивая теперь последнее равенство с равенством (1.43), имеем:

$$\frac{\partial f_j}{\partial\tilde{\varphi}_i} = 0, \quad \frac{\partial f_j}{\partial H_i} - \frac{\partial g_i}{\partial\tilde{\varphi}_j} = b_{ij} \quad \text{для всех } i,j = 1,2,\ldots,n, \quad i \neq j. \tag{1.39}$$

Кроме того, учитывая, что интегрирование в формуле (1.38) ведется по контурам, целиком расположенным на поверхностях уровня $N_{\mathbf{c}}$, формула (1.38) принимает вид

$$I_i(\mathbf{H}) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\gamma_i(\mathbf{H})} \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(\mathbf{H},\tilde{\varphi})d\tilde{\varphi}_k\right). \tag{1.40}$$

Покажем теперь, что в рассматриваемой нами окрестности тора $N_{\mathbf{c}_0}$ в качестве координат можно взять набор

$$I_1, I_2, \ldots, I_n, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \ldots, \tilde{\varphi}_n. \tag{1.41}$$

Для этого достаточно доказать, что матрица Якоби $(\frac{\partial I_i}{\partial H_j})$ всюду невырождена. Поскольку при вычислении элементов этой матрицы Якоби нам придется дифференцировать по параметру H_j интеграл (1.40), в котором контур интегрирования также зависит от этого параметра, здесь необходимо воспользоваться общим правилом дифференцирования интеграла по параметру (см. [12], т. 2, стр. 240). Однако, нетрудно сообразить, что поскольку в нашем случае контур интегрирования замкнут, слагаемые, появляющиеся от дифференцирования верхнего и нижнего пределов интегрирования, взаимоуничтожатся. Поэтому, имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_i}{\partial H_j} &= \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\gamma_i(\mathbf{H})} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial H_j} d\tilde{\varphi}_k\right) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\gamma_i(\mathbf{H})} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(b_{jk} + \frac{\partial g_j}{\partial\tilde{\varphi}_k}\right) d\tilde{\varphi}_k\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\gamma_i(\mathbf{H})} \sum_{k=1}^{n} b_{jk} d\tilde{\varphi}_k + \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\gamma_i(\mathbf{H})} dg_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} b_{jk} \oint\limits_{\gamma_i(\mathbf{H})} d\tilde{\varphi}_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} b_{jk} \cdot 2\pi\delta_{ik} = b_{ji}.\end{aligned} \tag{1.42}$$

Здесь мы сперва воспользовались формулами (1.39), потом независимостью коэффициентов b_{jk} от угловых переменных, затем использовали то, что интеграл от полного дифференциала функции g_j по циклу равен нулю, и, наконец, применили тот факт, что приращение угловой переменной $\tilde{\varphi}_k$ равно на цикле $\gamma_i(\mathbf{H})$ равно 2π, если $k = i$ и нулю в противном случае. Далее, поскольку симплектическая форма невырождена, матрица b_{ij} тоже невырождена во всех точках. А отсюда следует, что невырождена и матрица Якоби $(\frac{\partial I_i}{\partial H_j})$. Таким образом, функции (1.41) можно взять в качестве переменных в окрестности тора $N_{\mathbf{c}_0}$.

Запишем теперь симплектическую форму в новых координатах (1.41):

$$\Omega = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\tilde{a}_{ij}(\mathbf{I}, \tilde{\varphi}) dI_i \wedge dI_j + \tilde{b}_{ij}(\mathbf{I}) dI_i \wedge d\tilde{\varphi}_j \right). \tag{1.43}$$

Поскольку переход от переменных $H_1, H_2, \ldots, H_n$ к переменным $I_1, I_2, \ldots, I_n$ не затрагивал переменных $\tilde{\varphi}_j$, коэффициенты $\tilde{b}_{ij}$ зависят лишь от переменных $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Из формулы (1.42) следует, что

$$dI_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial I_i}{\partial H_j} dH_j = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} dH_j$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n$; поэтому из (1.43) вытекает, что при переходе к новым координатам $\tilde{b}_{ij} = \delta_{ij}$. Отсюда, в часности, следует, что форма

$$\beta = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(\mathbf{I}, \tilde{\varphi}) dI_i \wedge dI_j$$

замкнута, поскольку замкнута и вся симплектическая форма Ω. Но это возможно лишь если все коэффициенты $\tilde{a}_{ij}$ не зависят от угловых переменных $\tilde{\varphi}_j$. Таким образом,

$$\Omega = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(\mathbf{I}) dI_i \wedge dI_j + \sum_{j=1}^{n} dI_j \wedge d\tilde{\varphi}_j.$$

Поскольку форма β замкнута и на торе $N_{\mathbf{c}_0}$ она является тождественным нулем, ее класс когомологий тривиален в стягиваемой на тор $N_{\mathbf{c}_0}$ его окрестности в $\mathbf{M}$. А это означает, что форма β точка:

$$\beta = d\left(\sum_{j=1}^{n} \theta_j(\mathbf{I}) dI_j \right).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \theta_j(\mathbf{I})}{\partial I_i} = \tilde{a}_{ij}(\mathbf{I}) \quad \text{для всех } i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq j.$$

Сделаем теперь сдвиги вдоль всех угловых координат:

$$\varphi_i = \tilde{\varphi}_i - \theta_i(\mathbf{I}), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

Тогда в переменных $I_1, I_2, \ldots, I_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ симплектическая форма перепишется следующим образом:

$$\Omega = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\tilde{a}_{ij}(\mathbf{I}) - \frac{\partial \theta_j(\mathbf{I})}{\partial I_i} \right) dI_i \wedge dI_j + \sum_{j=1}^{n} dI_j \wedge d\varphi_j = \sum_{j=1}^{n} dI_j \wedge d\varphi_j.$$

Таким образом, построенный набор координат $I_1, I_2, \ldots, I_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ удовлетворяет всем требованием Теоремы Лиувилля: симплектическая форма в этих координатах принимает канонический вид, динамика является условно-пероидической, поскольку в координатах t_i она тривиальна, эти координаты связаны с координатами $\tilde{\varphi}_i$ линейной заменой, а $\dot{\varphi}_i = \dot{\tilde{\varphi}}_i$ вдоль любого из гамильтоновых полей, поскольку θ_i зависят лишь от I_j, которые постоянны на $N_{\mathbf{c}}$. Легко заметить, что построенные координаты вводятся посредством квадратур, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Определение 1.26. В условиях теоремы Лиувилля координаты $I_1, I_2, \ldots, I_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ называются *переменными действие-угол*, а торы $N_{\mathbf{c}}$ — *торами Лиувилля*.

Замечание 1.32. Теорема Лиувилля показывает, что если некоторое гамильтоново векторное поле на симплектическом многообразии можно включить в инволютивное семейство, состоящее из n независимых гамильтоновых векторных полей, то этого в, некотором смысле, достаточно для его полного интегрирования — посредством квадратур можно найти такие локальные координаты, в которых соответствующая гамильтонова система линеаризуется. Более того, при условии связности и компактности, совместные многообразия уровня оказываются устроенными максимально просто — они диффеоморфны торам половинной размерности, причем динамика происходит на этих торах и при этом также устроена максимально просто — движение происходит по их прямолинейным обмоткам.

Замечание 1.33. На самом деле, в такой формулировке теорема Лиувилля впервые появилась, по-видимому, в работах Арнольда. Поэтому иногда ее называют *теоремой Лиувилля–Арнольда*. Лиувиллем же было доказано существенно более частное утверждение.

1.5 Примеры из классической механики

Перед тем, как формулировать и доказывать теорему Лиувилля, мы рассмотрели два модельных, но тривиальных примера вполне интегрируемых систем. Теперь перейдем к рассмотрению примеров, пришедших из классической механики, которые уже не столь тривиальны.

1.5.1 Задача Кеплера

Задача Кеплера — это частный случай *задачи двух тел*, в которой два тела в трехмерном пространстве взаимодействуют посредством центральной силы, зависящей лишь от расстояния между ними[2]. По-видимому, это — исторически первый пример вполне интегрируемой системы.

Пусть $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиус-векторы двух точеченых масс m_1 и m_2 соответственно, а $U(r)$ — потенциал взаимодействия, где $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Как мы уже выяснили, уравнения движения этой механической системы эквивалентны уравнениям Эйлера–Лагранжа для лагранжиана, равного разности кинетической и потенциальной энергий системы:

$$L = m_1 \frac{|\dot{\mathbf{r}}_1|^2}{2} + m_2 \frac{|\dot{\mathbf{r}}_2|^2}{2} - U(r). \tag{1.44}$$

Выберем какую-нибудь систему координат, связанную с центром масс данной системы, т.е. будем считать, что $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$. Тогда

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r};$$

подставляя эти выражения в лагранжиан (1.44), получаем, что

$$L = m\frac{|\dot{\mathbf{r}}|^2}{2} - U(r),$$

где $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Таким образом, формально, т.е. на уровне уравнений, задача Кеплера сводится к задаче о движении материальной точки в центрально-симметричном поле. В случае, когда масса одного из тел пренебрежимо мала по сравнению с массой другого, можно считать, что

[2]В классической постановке потенциал обратно пропорционален расстоянию между телами. Мы, однако, рассмотрим более общую задачу и не будем накладывать никаких ограничений на потенциал взаимодействия.

более тяжелое из тел расположено в начале координат, а движение более легкого описывается радиус-вектором $\mathbf{r}$.

Поскольку наша лагранжева система консервативна, выполняется закон сохранения полной энергии. Но этим не исчерпываются *физические* законы сохранения в задаче Кеплера. В самом деле, имеет место

Предложение 1.17. *При движении в центрально-симметричном поле момент импульса сохраняется.*

Доказательство.

Поскольку лагранжиан не зависит от всевозможных вращений, в частности, он не зависит от вращений вокруг всех координатных осей. Поэтому, согласно теореме Нетер, величина

$$\frac{\partial L}{\partial x}\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}(x\cos s - y\sin s) + \frac{\partial L}{\partial y}\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}(x\sin s + y\cos s) = m(-\dot{x}y + \dot{y}x)$$

сохраняется вдоль траекторий движения. Нетрудно заметить, что это есть не что иное, как третья компонента вектора момента импульса $\mathbf{J} = [\mathbf{r}, m\dot{\mathbf{r}}]$. Аналогично, применяя теорему Нетер к инфинитезимальным генераторам вращений вокруг осей Ox и Oy, получим две другие компоненты вектора $\mathbf{J}$, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Следствие 1.4. *Движение в задаче Кеплера является плоским.*

Замечание 1.34. Проверить, что момент импульса является первым интегралом в задаче Кеплера, разумеется, можно и непосредственно, продифференцировав его в силу системы. Мы, однако, хотим обратить внимание на то, что наличие закона сохранения момента импульса является следствием вращательной инвариантности соответствующего лагранжиана.

Прежде чем переходить к соответствующей гамильтоновой системе и иллюстрировать на ее примере применимость теоремы Лиувилля, следуя классикам, проинтегрируем явно задачу Кеплера. Поскольку динамика является плоской, выберем систему координат так, что движение происходит в плоскости Oxy (это, как нетрудно заметить, эквивалентно фиксированию двух констант движения или выбору совместного многообразия уровня двух первых интегралов) и перейдем на этой плоскости к полярным координатам (r, φ). Тогда лагранжиан примет вид

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r).$$

Легко заметить, что координата φ является циклической, и потому обобщенный импульс $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$ является первым интегралом. (Опять теорема Нетер!) Геометрический смысл этого интеграла очень прост: площадь сектора, заметаемого радиус-вектором $\mathbf{r}$ при движении вдоль траектории, сохраняется. Это — *второй закон Кеплера.* Фиксируем значение M обобщенного импульса p_φ и выразим $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{mr^2}.$$

Теперь воспользуемся законом сохранения полной энергии:

$$\text{const} = E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{M^2}{m^2r^2}\right) + U(r). \tag{1.45}$$

Легко видеть, что переменные разделились, т.е. что нам повезло: наличие двух первых интегралов позволило свести задачу с четырьмя степенями свободы к двум уравнениям первого порядка. Решая уравнение (1.45), находим, что

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2r^2}},$$

откуда

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2 r^2}}}.$$

Далее, пользуясь постоянством обобщенного импульса p_φ, выражаем $\dot{\varphi}$:

$$\frac{M}{mr^2} = \dot{\varphi} = \varphi'_r \cdot \dot{r} = \varphi'_r \cdot \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2 r^2}},$$

откуда

$$\varphi = \int \frac{M dr}{r\sqrt{2mr^2(E - U(r)) - M}}.$$

Таким образом, мы в явном виде проинтегрировали обобщенную задачу Кеплера, не задаваясь вопросом о том, каким должен быть потенциал $U(r)$, причем ответ получается при помощи квадратур.

Задача 1.6. Явно описать траектории движения для потенциала $U(r) = \frac{k}{r}$.

Перейдем теперь от лагранжева формализма в задаче Кеплера к гамильтонову формализму. Нетрудно проверить, что соответствующий гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 + U(|\mathbf{q}|),$$

где $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$, а радиус-вектор $\mathbf{r}$ переобозначен символом $\mathbf{q}$, следуя традиции, принятой при работе с гамильтоновым формализмом. Кроме того, в этом примере не будем придерживаться тензорных обозначений и ставить верхние индексы у координат, чтобы индексы не путались со степенями.

Для того, чтобы показать, что эта система интегрируема по Лиувиллю, нам необходимо найти три ее независимых первых интеграла, находящихся в инволюции. У нас уже есть полная энергия и три компоненты вектора момента импульса J. Выясним, какие из этих интегралов находятся в инволюции. В координатах вектор момента импульса имеет, очевидно, следующий вид:

$$\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3) = (q_2 p_3 - q_3 p_2, q_3 p_1 - q_1 p_3, q_1 p_2 - q_2 p_1);$$

нетрудно видеть, что скобки Пуассона его компонент отличны от нуля:

$$\{J_1, J_2\} = q_2 p_1 - p_2 q_1, \quad \{J_1, J_3\} = q_3 p_1 - p_3 q_1, \quad \{J_2, J_3\} = q_3 p_2 - p_3 q_2.$$

При этом

$$\{J_3, H\} = \frac{\partial J_3}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{\partial J_3}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial q_2} - \frac{\partial J_3}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial J_3}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} = -q_2 \frac{U'(|\mathbf{q}|)}{|\mathbf{q}|} q_1 + q_1 \frac{U'(|\mathbf{q}|)}{|\mathbf{q}|} q_2 - p_2 p_1 + p_1 p_2 = 0,$$

т.е. интегралы J_3 и H находятся в инволюции. Аналогично проверяется, что каждая из двух других компонент вектора момента импульса находится в инволюции с интегралом энергии. Тем не менее, пока у нас есть только два интеграла в инволюции. Оказывается, в качестве третьего недостающего интеграла можно взять квадрат длины вектора момента импульса $|\mathbf{J}|^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$. В самом деле,

$$\{|\mathbf{J}|^2, H\} = \{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2, H\} = 2\left(J_1\{J_1, H\} + J_2\{J_2, H\} + J_3\{J_3, H\}\right) = 0$$

поскольку каждая из компонент вектора $\mathbf{J}$ коммутирует с гамильтонианом; кроме того,

$$\begin{aligned}\{J_3, J_1^2 + J_2^2 + J_3^2\} &= 2\left(J_1\{J_3, J_1\} + J_2\{J_3, J_2\} + J_3\{J_3, J_3\}\right) = \\ &= 2(J_1(-q_3 p_1 + p_3 q_1) + J_2(-q_3 p_2 + p_3 q_2)) = \\ &= 2(q_2 p_3 - q_3 p_2)(-q_3 p_1 + p_3 q_1) + 2(q_3 p_1 - q_1 p_3)(-q_3 p_2 + p_3 q_2) = 0.\end{aligned}$$

Значит, в качестве третьего интеграла можно взять $|\mathbf{J}|^2$, независимость этих интегралов проверяется непосредственно. Таким образом, задача Кеплера согласно теореме Лиувилля является вполне интегрируемой гамильтоновой системой.

Мы ограничимся явным интегрированием уравнений движения в задаче Кеплера и предъявлением максимального набора независимых первых интегралов в инволюции, поскольку нахождение переменных действие-угол в этом случае представляет собой довольно неприятную с вычислительной точки зрения задачу.

1.5.2 Волчок Эйлера

Волчок Эйлера — это простейший интегрируемый случай динамики твердого тела. Будем предполагать, что твердое тело T закреплено в некоторой своей точке и осуществляет движение в отсутствии внешних сил (например, таких, как гравитация). Мы не будем вдаваться в механическую природу такого движения, а лишь предъявим уравнения, его описывающие (их механический смысл описан, например, в книге [2]). При изучении волчка Эйлера мы также не будем придерживаться тензорных обозначений и будем писать все индексы снизу. Рассмотрим систему

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = [\mathbf{J}, \mathbf{v}], \tag{1.46}$$

где $\mathbf{v}$ — вектор угловой скорости, а $\mathbf{J}$ — вектор момента импульса тела T. Если выбрать систему координат с началом в неподвижной точке тела T, а оси координат направить вдоль *главных осей инерции*, то векторы $\mathbf{J}$ и $\mathbf{v}$ будут связаны с помощью *оператора инерции*: $\mathbf{J} = I\mathbf{v}$, где $I = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — некоторая постоянная матрица. Записывая уравнения (1.46) в координатах вектора $\mathbf{J}$, получаем следующую систему:

$$\dot{J}_1 = J_2 J_3 \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2}\right), \quad \dot{J}_2 = J_3 J_1 \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}\right), \dot{J}_3 = J_1 J_2 \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right). \tag{1.47}$$

Нетрудно проверить, что соотношение

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \tag{1.48}$$

где ε_{ijk} — абсолютно антисимметрический символ, задает пуассонову структуру на фазовом пространстве нашей системы. Поскольку размерность этого пространства равна трем, введенная скобка Пуассона обладает одной функцией Казимира. В самом деле, очевидно, что функция $K = |\mathbf{J}|^2$ аннулирует скобку Пуассона.

Прямым вычислением проверяется, что система (1.47) является гамильтоновой с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{J_1^2}{I_1} + \frac{J_2^2}{I_2} + \frac{J_3^2}{I_3}\right)$$

относительно скобки Пуассона (1.48). Ограничиваясь на симплектический лист $K = \mathrm{const}$, мы получаем гамильтонову систему с двумя степенями свободы, которая вполне интегрируема, поскольку обладает интегралом энергии H. Легко видеть, что поскольку обе функции H и K квадратичны по координатам J_i, мы можем выразить произведение $J_2 J_3$ через J_1 с помощью корня из многочлена четвертой степени. Это означает, что единственное оставшееся уравнение из системы (1.47) примет вид

$$\dot{J}_1 = \sqrt{\alpha J_1^4 + \beta J_1^2 + \gamma},$$

откуда следует, что общее решение для уравнений движения волчка Эйлера записывается в терминах эллиптических функций Якоби.

1.5.3 Волчок Лагранжа

Рассмотрим теперь более сложный случай твердого тела, закрепленного в некоторой точке и подверженного действию гравитационного поля. Оказывается, что в общем случае эта задача не интегрируема, однако, у нее есть важный частный вполне интегрируемый случай. *Волчком Лагранжа* будем называть осесимметричное твердое тело, центр тяжести и неподвижная которого находятся на оси симметрии. Наличие осевой симметрии в соответствии с общим принципом теоремы Нетер позволяет найти недостающий первый интеграл. Как и в случае волчка Эйлера, мы не будем вдаваться в механическую природу этой динамики, а лишь предъявим уравнения движения (пока мы еще не делаем никаких предположении об осесимметричности волчка, а рассматриваем общую ситуацию):

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = [\mathbf{J}, \mathbf{v}] + [\mathbf{h}, \mathbf{P}], \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = [\mathbf{P}, \mathbf{v}], \tag{1.49}$$

где $\mathbf{v}$ — вектор угловой скорости, $\mathbf{h}$ — вектор, соединяющий неподвижную точку с центром масс, $\mathbf{P}$ —вектор веса, а $\mathbf{J}$ — вектор момента импульса волчка. В системе координат, начало которой находится в неподвижной точке волчка, а оси направлены вдоль главных осей инерции волчка, векторы $\mathbf{J}$ и $\mathbf{v}$ связаны соотношением $\mathbf{J} = I\mathbf{v}$, где $I = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — некоторая постоянная матрица, а $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ — постоянный вектор.

Нетрудно проверить, что в координатах уравнения (1.49) записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{J}_1 = J_2 J_3 \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2}\right) + h_2 P_3 - h_3 P_2 \\ \dot{J}_2 = J_3 J_1 \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}\right) + h_3 P_1 - h_1 P_3 \\ \dot{J}_3 = J_1 J_2 \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right) + h_1 P_2 - h_2 P_1 \\ \dot{P}_1 = P_2 \frac{J_3}{I_3} - P_3 \frac{J_2}{I_2} \\ \dot{P}_2 = P_3 \frac{J_1}{I_1} - P_1 \frac{J_3}{I_3} \\ \dot{P}_3 = P_3 \frac{J_2}{I_2} - P_2 \frac{J_1}{I_1} \end{cases}. \tag{1.50}$$

Введем скобку Пуассона на фазовом пространстве, положив

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, P_j\} = \varepsilon_{ijk} P_k, \quad \{P_i, P_j\} = 0, \tag{1.51}$$

где ε_{ijk} — абсолютно антисимметрический символ. Такая скобка Пуассона является вырожденной и имеет две независимые функции Казимира:

$$K_1 = |\mathbf{P}|^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2, \quad K_2 = (\mathbf{J}, \mathbf{P}) = J_1 P_1 + J_2 P_2 + J_3 P_3,$$

поэтому симплектические листы четырехмерны. Система (1.49) является гамильтоновой относительно скобки Пуассона (1.51) с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{J_1^2}{I_1} + \frac{J_2^2}{I_2} + \frac{J_3^2}{I_3}\right) - (P_1 h_1 + P_2 h_2 + P_3 h_3).$$

Таким образом, в общем случае для полной интегрируемости нам не хватает еще одного первого интеграла, находящегося в инволюции с гамильтонианом H.

Теперь наложим дополнительные ограничения на нашу систему и перейдем к рассмотрению собственно волчка Лагранжа. В этом случае длины двух главных осей инерции равны: $I_1 = I_2$, а вектор $\mathbf{h}$ имеет координаты $(0, 0, h_3)$. Мы не будем в этом случае выводить недостающий интеграл из теоремы Нетер, а просто предъявим его:

$$\frac{d(\mathbf{J}, \mathbf{h})}{dt} = (\mathbf{h}, [\mathbf{J}, \mathbf{v}]) = h_3 J_1 J_2 \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right) = 0.$$

Нетрудно убедиться в том, что он находится в инволюции с интегралом энергии H. Значит, волчок Лагранжа является вполне интегрируемой гамильтоновой системой.

Задача 1.7. Записать уравнения движения (1.60) в терминах углов Эйлера для двух ортогональных систем координат, где одна из них — неподвижная, а другая — связана с волчком, и проинтегрировать их явно (используя дополнительный первый интеграл и функции Казимира).

Замечание 1.35. Полная интегрируемость волчка Лагранжа дает возможность качественно описать его динамику, которая представляет собой комбинацию трех периодических процессов. Подробнее об этом можно прочитать в книге [2].

Замечание 1.36. Есть еще один хорошо известный интегрируемый случай динамики твердого тела — так называемый *волчок Ковалевской.* В этом случае все вычисления становятся несколько сложнее, и мы не будем на нем останавливаться. Подробности можно найти, например, в книге [21].

1.6 Представление Лакса

В разобранных выше примерах, которые имели механический смысл, все первые интегралы, использованные нами для доказательства интегрируемости, имели также механическую природу. Вообще говоря, задача отыскания первых интегралов системы дифференциальных ничем не проще задачи ее явного интегрирования и, конечно, не имеет универсального решения. Однако, если нам удалось найти *представление Лакса* для некоторой системы, то ее первые интегралы находятся автоматически. Хотя, конечно, никаких универсальных методов отыскания пар Лакса тоже не существует.

1.6.1 Нахождение первых интегралов

Определение 1.27. Говорят, что система дифференциальных уравнение допускает *представление Лакса*, если существуют такие матричнозначные функции L и A, определенные на фазовом пространстве системы, что исходная система эквивалентна матричному уравнению

$$\frac{dL}{dt} = [A, L], \tag{1.52}$$

где $[\cdot,\cdot]$ — матричный коммутатор. Пара матриц L и A при этом называется *парой Лакса.*

Теорема 1.10. *Если система дифференциальных уравнений допускает представление Лакса (1.10), то собственные значения матрицы L являются ее первыми интегралами.*

Доказательство.

Рассмотрим матричное уравнение

$$\frac{dC}{dt} = AC \tag{1.53}$$

и пусть $C = C(t)$ — его решение, удовлетворяющее начальному условию $C(0) = E$. Покажем, что матрица $C(t)$ невырождена при любом t. В самом деле, числовая функция $f(t) = \det C(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $f' = gf$, где $g = \det A$ (для того, чтобы в этом убедиться, достаточно взять определитель от обеих частей равенства (1.10)). Предположим, что $\det C(t_0) = 0$ для некоторого t_0, тогда $f(t_0) = 0$. Но рассматриваемое нами дифференциальное уравнение первого порядка имеет тривиальное (т.е. нулевое) решение, удовлетворяющее этому начальному условию. Поэтому, в силу единственности решения задачи Коши $f(t) \equiv 0$. Но это означает, что матрица $C(0) = E$ тоже вырождена — противоречие.

Рассмотрим матрицу $X(t) = C^{-1}(t)L(t)C(t)$ и продифференцируем ее по t:

$$\dot{X} = \dot{C}^{-1}LC + C^{-1}\dot{L}C + C^{-1}L\dot{C} = -C^{-1}\dot{C}C^{-1}LC + C^{-1}[A, L]C + C^{-1}LAC =$$
$$= -C^{-1}ACC^{-1}LC + C^{-1}ALC - C^{-1}LAC + C^{-1}LAC \equiv 0$$

(здесь мы воспользовались представлением Лакса (1.10), уравнением (1.53) и правилом дифференцирования обратной матрицы: $\dot{C}^{-1} = C^{-1}\dot{C}C^{-1}$). Таким образом, матрица $X(t)$ — постоянна, т.е. $X(t) \equiv X(0) = L(0)$. Это означает, что

$$L(t) = C(t)L(0)C^{-1}(t),$$

откуда следует, что характеристические многочлены матриц $L(t)$ и $L(0)$ совпадают. Значит, спектр матрицы $L(t)$ не зависит от времени, т.е. все собственные значения этой матрицы являются первыми интегралами исходной системы, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Доказанная теорема дает нам достаточно эффективный, хотя и теоретический способ поиска первых интегралов для системы, обладающей представлением Лакса. Практическая трудность может состоять в том, что задача нахождения собственных значений решается плохо: нам необходимо найти корни многочлена, коэффициенты которого являются функциями на фазовом пространстве, а сделать это явно почти никогда не получается. Однако, эту проблему легко преодолеть: поскольку все собственные значения матрицы L являются константами движения, то и сам характеристический многочлен тоже является первым интегралом. А это означает, что все его коэффициенты — тоже первые интегралы (как, впрочем, и любые функции от собственных значений). На практике в качестве интегралов часто выбирают легко вычисляемые $\det L$ или $\mathrm{tr}(L^k)$. Но остаются еще две других проблемы: во-первых, интегралы, даваемые представлением Лакса вполне могут не быть независимыми, а, во-вторых, их скобки Пуассона вполне могут оказаться ненулевыми.

Имеет место и обратное утверждение, хотя его ценность, разумеется, не сопоставима с ценностью доказанной теоремы:

Предложение 1.18. *Произвольная изоспектральная деформация $L(t) = C(t)L(0)C^{-1}(t)$ матричнозначной функции $L(t)$ описывается уравнением Лакса $\dot{L} = [A, L]$ для подходящей матрицы $A = A(t)$.*

Доказательство.

Достаточно положить $A(t) = \dot{C}(t)C^{-1}(t)$, подставить эту матрицу в уравнение Лакса и убедиться в том, что при этом получится исходное матричное уравнение, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 1.37. Представление Лакса для системы уравнений не единственно. В самом деле, если L и A — пара Лакса для некоторой системы, а G — произвольная невырожденная матрица, то сопряжение дает другое (калибровочно-эквивалентное) представление Лакса: если положить

$$M = GMG^{-1}, \quad B = GAG^{-1} + \dot{G}G^{-1}, \tag{1.54}$$

то нетрудно проверить, что уравнение $\dot{M} - [B, M] = 0$ эквивалентно исходному представлению Лакса. Существуют примеры неэквивалентных представлений Лакса; более того, лаксовы матрицы из разных пар вполне могут быть разного размера.

Замечание 1.38. Формула (1.54), в частности, показывает, что имея некоторое представление Лакса $\dot{L} = [A, L]$, мы всегда можем при необходимости перейти к другому калибровочно-эквивалентному представлению Лакса $\dot{M} = [B, M]$, где матрица M имеет более удобный для нас вид, чем матрица L (например, если матрица L симметрична, то матрицу M всегда можно сделать диагональной).

Пример 1.14. Предъявим представление Лакса для гармонического осциллятора. Положим

$$L = \begin{pmatrix} p & \omega q \\ \omega q & -p \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\omega}{2} \\ \frac{\omega}{2} & 0 \end{pmatrix};$$

прямая проверка показывает, что соответствующее уравнение Лакса эквивалентно гамильтоновым уравнениям (1.25) с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$. Поскольку лаксовы матрицы имеют порядок 2, в качестве первых интегралов вместо собственных значений возьмем след и определитель матрицы L:

$$\det L = -(p^2 + \omega^2 q^2) = -\frac{H}{2}, \quad \operatorname{tr} L = 0.$$

Как и следовало ожидать (поскольку в данном слечае размерность фазового пространства $2n = 2$), мы получили лишь один первый интеграл, который оказался пропорционален гамильтониану.

Представление Лакса для прямой суммы гармонических осцилляторов строится аналогично — лаксовы матрицы будут блочно-диагональными.

1.6.2 Пары Лакса со спектральным параметром

Может так случиться, что для некоторой системы удалось построить представление Лакса, однако, интегралы, даваемые этой парой Лакса, оказываются зависимыми или их количество — недостаточным для полной интегрируемости. В этом случае можно воспользоваться другой идеей: попытаться построить представление Лакса, зависящее от параметра. Будем считать, что лаксовы матрицы L и A зависят от некоторого параметра λ. Тогда каждый коэффициент характеристического многочлена матрицы L тоже зависит от параметра λ и, как мы знаем, является первым интегралом. Поэтому, все коэффициенты лорановского разложения любого из этих коэффициентов по λ также будут первыми интегралами исходной системы. Такие представления Лакса называют *зависящими от параметра*, а λ — *спектральным параметром*. Иногда такой подход позволяет построить достаточное количество первых интегралов (мы рассмотрим подобные примеры в дальнейшем). А сейчас разберем пример, показывающий, что иногда представление Лакса не дает достаточного количества первых интегралов.

Пример 1.15. Рассмотрим уравнения движений волчка Эйлера (1.46). Поскольку векторное произведение, в некотором смысле, близко к матричному коммутатору, вид уравнений (1.46) позволяет угадать представление Лакса для волчка Эйлера. Положим

$$L = \begin{pmatrix} 0 & J_3 & -J_2 \\ -J_3 & 0 & J_1 \\ J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{J_3}{I_3} & \frac{J_2}{I_2} \\ \frac{J_3}{I_3} & 0 - \frac{J_1}{I_1} & \\ -\frac{J_2}{I_2} & \frac{J_1}{I_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Прямая проверка показывает, что исходные уравнения (1.46) эквивалентны матричному уравнению $\dot{L} = [L, A]$. Поэтому величины $\operatorname{tr}(L^k)$, где $k = 1, 2, \ldots$, являются первыми интегралами уравнений (1.46); вычислим их явно:

$$\operatorname{tr} L = 0, \quad \operatorname{tr}(L^2) = -2(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2), \quad \operatorname{tr}(L^3) = 0.$$

Таким образом, коэффициенты характеристического многочлена матрицы L оказываются функциями от элемента Казимира $K = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ (следы более высоких степеней матрицы L не могут дать ничего нового, например, в силу теоремы Гамильтона–Кэли), т.е. такое представление Лакса дает только функцию Казимира, но не дает интеграл энергии H. Можно построить зависящее от параметра представление Лакса для волчка Эйлера, которое будет кроме функции Казимира давать еще и гамильтониан, однако, мы не будем этим заниматься, поскольку в задачах, имеющих естественный механический смысл гораздо проще найти интегралы, исходя из природы задачи, нежели построить представление Лакса, от нее абстрагировавшись.

1.7 Цепочка Тоды

Цепочка Тоды представляет собой замечательный пример вполне интегрируемой гамильтоновой системы, не являюшейся классической, но которая, тем не менее, оказывается взаимосвязанной с самыми разными разделами математики. На этом примере мы сможем увидеть, как техника пар Лакса работает для нахождения первых интегралов задачи в случае, когда отсутствует механическая интуиция (здесь у нас ключевую роль уже не будут играть *физические*, т.е. вытекающих из естественно-научной природы задачи, первые интегралы).

1.7.1 Представление Лакса

Определение 1.28. *Цепочкой Тоды* называется бесконечная система уравнений

$$\ddot{q}_j = e^{q_{j-1}-q_j} - e^{q_j-q_{j+1}}$$

на функции $q_j = q_j(t)$.

Мы будем интересуемся конечными динамическими системами, поэтому мы будем рассматривать не бесконечную цепочку Тоды, а ее редукцию с помощью граничных условий $q_0 = -\infty$, $q_{n+1} = \infty$ для некоторого натурального n. Это — далеко не единственный способ получить интересную и осмысленную систему из бесконечной цепочки Тоды: можно также рассматривать периодические замыкания вида $q_{n+1} = q_1$ или так называемые *обобщенные цепочки Тоды*, соответствующие простым алгебрам Ли, но это выходит за рамки данного курса. Поэтому, в дальнейшем под цепочкой Тоды мы будем понимать систему вида

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -e^{q_1-q_2} \\ \ddot{q}_j = e^{q_{j-1}-q_j} - e^{q_j-q_{j+1}}, \quad j = 2, 3, \ldots, n-1 \\ \ddot{q}_n = e^{q_{n-1}-q_n} \end{cases}. \tag{1.55}$$

Прямой проверкой доказывается следующее

Предложение 1.19. *Цепочка Тоды (1.55) является гамильтоновой системой с гамильтонианом*

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} e^{q_j-q_{j+1}} \tag{1.56}$$

относительно стандартной скобки Пуассона, где $p_j = \dot{q}_j$.

Положим

$$a_j = -\frac{1}{2}p_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad b_j = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}(q_j-q_{j+1})}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{1.57}$$

Тогда в этих новых переменных, которые иногда называются *переменными Флашки*, цепочка Тоды (1.55) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{a}_j = 2(b_j^2 - b_{j-1}^2), \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ \dot{b}_j = b_j(a_{j+1} - a_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n-1 \end{cases}, \tag{1.58}$$

а гамильтониан (1.56) переписывается следующим образом:

$$H = 2\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} b_j^2\right).$$

Предложение 1.20. *Цепочка Тоды допускает представление Лакса, т.е. система (1.58) эквивалентна матричному уравнению $\dot{L} = [A, L]$, где L и A — трехдиагональные матрицы:*

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ -b_1 & 0 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & -b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство.

Записывая коммутатор матриц L и A, убеждаемся в том, что диагональные элементы дают уравнения для $\dot{a}_j$ а поддиагональные — равенства для $\dot{b}_j$, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Согласно общей теореме 1.10 коэффициенты характеристического многочлена матрицы L или любые функции от них являются первыми интегралами цепочки Тоды. Введем обозначение $I_k = \mathrm{tr}(L^k)$, где $k = 1, 2, \dots, n$. Легко видеть, что интеграл

$$I_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n = -\frac{1}{2}(p_1 + p_2 + \dots + p_n),$$

с точностью до числового множителя, представляет собой полный импульс системы.

Задача 1.8. Вычислить явно интеграл I_2 и выяснить его физический смысл.

Задача 1.9. Построить представление Лакса для *цепочки Вольтерра* с тривиальными граничными условиями:

$$\dot{u}_j = u_j(u_{j+1} - u_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad u_0 = u_{n+1} = 0$$

для некоторого натурального n.

Поскольку дальше мы будем работать с цепочкой Тоды в переменных Флашки, перепишем в эти координаты стандартную скобку Пуассона. Имеем:

$$\{a_i, a_j\} = \left\{-\frac{p_i}{2}, -\frac{p_j}{2}\right\} = 0,$$
$$\{a_i, b_j\} = \left\{-\frac{p_i}{2}, \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}(q_j - q_{j+1})}\right\} = \frac{1}{8}e^{\frac{1}{2}(q_j - q_{j+1})}\left(\{p_i, q_{j+1}\} - \{p_i, q_j\}\right) = \frac{b_j}{4}(\delta_{ij+1} - \delta_{ij}),$$
$$\{b_i, b_j\} = \left\{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}(q_i - q_{i+1})}, \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}(q_j - q_{j+1})}\right\} = 0;$$

поэтому скобка Пуассона двух произвольных функций f и g запишется следующим образом:

$$\{f, g\} = \frac{1}{4}\sum_{i=2}^{n-1}\left(\frac{\partial f}{\partial a_i}\left(b_{i-1}\frac{\partial g}{\partial b_{i-1}} - b_i\frac{\partial g}{\partial b_i}\right) - \frac{\partial g}{\partial a_i}\left(b_{i-1}\frac{\partial f}{\partial b_{i-1}} - b_i\frac{\partial f}{\partial b_i}\right)\right) -$$
$$- b_1\frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial g}{\partial b_1} + b_1\frac{\partial g}{\partial a_1}\frac{\partial f}{\partial b_1} + b_{n-1}\frac{\partial f}{\partial a_n}\frac{\partial g}{\partial b_{n-1}} - b_{n-1}\frac{\partial g}{\partial a_n}\frac{\partial f}{\partial b_{n-1}}. \quad (1.59)$$

Замечание 1.39. На самом деле, переход от канонических переменных (p_i, q_i) в цепочке Тоды к переменным Флашки (a_i, b_i) не является обратимым — из формул (1.57) видно, что при обратном переходе можно выразить лишь разности $q_j - q_{j+1}$. Это неудивительно, поскольку канонических переменных $2n$ штук, а переменных Флашки на одну меньше. Это означает, что скобка Пуассона, будучи записанной в этих координатах, становится вырожденной ранга $2n-2$. Нетрудно проверить, что найденный нами интеграл I_1 является ее функцией Казимира, поскольку

$$\{I_1, b_j\} = \{a_j, b_j\} + \{a_{j+1}, b_j\} = \frac{1}{4}(b_j - b_j) = 0 \quad \text{для всех } j = 1, 2, \dots, n-1.$$

1.7.2 Интегрируемость по Лиувиллю

Покажем, что цепочка Тоды с тривиальными граничными условиями (1.55) является вполне интегрируемой системой. Для этого перейдем к переменным Флашки и воспользуемся уже найденным представлением Лакса. Оказывается, что в данном случае для полной интегрируемости достаточно представления Лакса без спектрального параметра.

Теорема 1.11. *Первые интегралы $I_1, I_2, \ldots, I_n$ независимы и находятся в инволюции относительно стандартной скобки Пуассона.*

Доказательство.

Легко заметить, что матрица L имеет простой спектр. В самом деле, поскольку все $b_j > 0$, ранг трехдиагональной матрицы $L - \lambda E$ не может отличаться от ее размера более чем на единицу. Поэтому все ее собственные подпространства одномерны. Кроме того, поскольку эта матрица симметрична, все ее собственные значения вещественны, а собственные векторы образуют базис в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения, а $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ — соответствующие нормированные собственные векторы (нормированные собственные векторы такой матрицы определены с точностью до знака — выберем знак произвольным образом для каждого собственного значения).

Поскольку матрица L зависит от переменных a_j, b_j, где $j = 1, 2, \ldots, n$, ее собственные значения и собственные векторы также являются функциями от этих динамических переменных. Покажем, что для любых $j, k = 1, 2, \ldots n$ имеют место равенства

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial a_j} = \left(x_j^{(k)}\right)^2, \quad \frac{\partial \lambda_k}{\partial b_j} = 2x_j^{(k)} x_{j+1}^{(k)}, \tag{1.60}$$

где $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ и для удобства введено обозначение $x_{n+1}^{(k)} = 0$. Для этого продифференцируем равенство $(L - \lambda_k E)\mathbf{x}^{(k)} = 0$ по переменной a_j:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial a_j} - \frac{\partial \lambda_k}{\partial a_j} E\right) \mathbf{x}^{(k)} + (L - \lambda_k E)\frac{\mathbf{x}^{(k)}}{\partial a_j} = 0.$$

Умножим теперь последнее равенство скалярно на $\mathbf{x}^{(k)}$:

$$\left(\left(\frac{\partial L}{\partial a_j} - \frac{\partial \lambda_k}{\partial a_j} E\right) \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k)}\right) + \left((L - \lambda_k E)\frac{\mathbf{x}^{(k)}}{\partial a_j}, \mathbf{x}^{(k)}\right) = 0, \tag{1.61}$$

после чего воспользуемся симметричностью матрицы $L - \lambda_k E$:

$$\left((L - \lambda_k E)\frac{\mathbf{x}^{(k)}}{\partial a_j}, \mathbf{x}^{(k)}\right) = \left(\frac{\mathbf{x}^{(k)}}{\partial a_j}, (L - \lambda_k E)\mathbf{x}^{(k)}\right) = 0,$$

поскольку $\mathbf{x}^{(k)}$ — собственный вектор. Поэтому из равенства (1.61) следует, что

$$\left(\frac{\partial L}{\partial a_j}\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k)}\right) = \left(\frac{\lambda_k}{\partial a_j}\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k)}\right) = \frac{\lambda_k}{\partial a_j}$$

в силу условия нормировки $(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k)}) = 1$. Легко видеть, что из последней формулы немедленно вытекает первое из равенств (1.60). Второе равенство получается аналогично дифференцированием соотношения $(L - \lambda_k E)\mathbf{x}^{(k)} = 0$ по переменной b_j.

Воспользуемся формулой (1.59) и покажем, что все собственные значения матрицы L попарно находятся в инволюции:

$$\begin{aligned}
\{\lambda_i,\lambda_j\} = \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial a_k}\left(b_{k-1}\frac{\partial\lambda_j}{\partial b_{k-1}} - b_k\frac{\partial\lambda_j}{\partial b_k}\right) - \frac{\partial\lambda_j}{\partial a_k}\left(b_{k-1}\frac{\partial\lambda_i}{\partial b_{k-1}} - b_k\frac{\partial\lambda_i}{\partial b_k}\right)\right) - \\
- \frac{1}{4}b_1\frac{\partial\lambda_i}{\partial a_1}\frac{\partial\lambda_j}{\partial b_1} + \frac{1}{4}b_1\frac{\partial\lambda_j}{\partial a_1}\frac{\partial\lambda_i}{\partial b_1} + \frac{1}{4}b_{n-1}\frac{\partial\lambda_i}{\partial a_n}\frac{\partial\lambda_j}{\partial b_{n-1}} - \frac{1}{4}b_{n-1}\frac{\partial\lambda_j}{\partial a_n}\frac{\partial\lambda_i}{\partial b_{n-1}} = \\
= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-1}\left(\left(x_k^{(i)}\right)^2\left(b_{k-1}x_{k-1}^{(j)}x_k^{(j)} - b_k x_k^{(j)}x_{k+1}^{(j)}\right) - \left(x_k^{(j)}\right)^2\left(b_{k-1}x_{k-1}^{(i)}x_k^{(i)} - b_k x_k^{(i)}x_{k+1}^{(i)}\right)\right) - \\
- \frac{1}{2}b_1\left(x_1^{(i)}\right)^2 x_1^{(j)}x_2^{(j)} + \frac{1}{2}b_1\left(x_1^{(j)}\right)^2 x_1^{(i)}x_2^{(i)} + \frac{1}{2}b_{n-1}\left(x_n^{(i)}\right)^2 x_{n-1}^{(j)}x_n^{(j)} - \frac{1}{2}b_{n-1}\left(x_n^{(j)}\right)^2 x_{n-1}^{(i)}x_n^{(i)} = \\
= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-1}x_k^{(i)}x_k^{(j)}\left(b_k\left(x_{k+1}^{(i)}x_k^{(j)} - x_{k+1}^{(j)}x_k^{(i)}\right) + b_{k-1}\left(x_k^{(i)}x_{k-1}^{(j)} - x_k^{(j)}x_{k-1}^{(i)}\right)\right) + \\
+ \frac{1}{2}b_1x_1^{(i)}x_1^{(j)}\left(x_2^{(i)}x_1^{(j)} - x_2^{(j)}x_1^{(i)}\right) + \frac{1}{2}b_{n-1}x_{n-1}^{(i)}x_{n-1}^{(j)}\left(x_n^{(i)}x_{n-1}^{(j)} - x_n^{(i)}x_{n-1}^{(j)}\right) = \\
= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-1}x_k^{(i)}x_k^{(j)}\left(W_k + W_{k-1}\right) + \frac{1}{2}\left(x_1^{(i)}x_1^{(j)}W_1 + x_{n-1}^{(i)}x_{n-1}^{(j)}W_{n-1}\right),
\end{aligned} \tag{1.62}$$

где введено обозначение $W_k = W(\mathbf{x}^{(i)},\mathbf{x}^{(j)})_k = b_k\left(x_{k+1}^{(i)}x_k^{(j)} - x_{k+1}^{(j)}x_k^{(i)}\right)$. Но поскольку $\mathbf{x}^{(i)}$ и $\mathbf{x}^{(j)}$ — собственные векторы матрицы L, справедливы следующие равенства:

$$\begin{cases} (a_1-\lambda_i)x_1^{(i)} + b_1x_2^{(i)} = 0 \\ b_{k-1}x_{k-1}^{(i)} + (a_k-\lambda_i)x_k^{(i)} + b_kx_{k+1}^{(i)} = 0 \\ b_{n-1}x_{n-1}^{(i)} + (a_n-\lambda_n)x_n^{(i)} = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} (a_1-\lambda_j)x_1^{(j)} + b_1x_2^{(j)} = 0 \\ b_{k-1}x_{k-1}^{(j)} + (a_k-\lambda_i)x_k^{(j)} + b_kx_{k+1}^{(j)} = 0 \\ b_{n-1}x_{n-1}^{(j)} + (a_n-\lambda_n)x_n^{(j)} = 0 \end{cases},$$

где $k = 2,3,\ldots,n-1$. Умножая теперь каждое из равенств левой системы на соответствующее $x_k^{(j)}$, а каждое из равенств правой системы на $x_k^{(j)}$, и вычитая одно из другого, получаем, что

$$\begin{aligned}
&W_1 = (\lambda_i-\lambda_j)\,x_1^{(i)}x_1^{(j)} \\
&W_k - W_{k-1} = (\lambda_i-\lambda_j)\,x_k^{(i)}x_k^{(j)}, \quad k = 2,3,\ldots,n-1. \\
&W_{n-1} = -(\lambda_i-\lambda_j)\,x_{n-1}^{(i)}x_{n-1}^{(j)}
\end{aligned}$$

Выражая теперь $x_k^{(i)}x_k^{(j)}$ из последней формулы и подставляя полученное выражение в (1.62), окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
\{\lambda_i,\lambda_j\} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-2}(W_k+W_{k-1})\frac{W_k-W_{k-1}}{\lambda_i-\lambda_j} + \frac{1}{2}\left(\frac{W_1^2}{\lambda_i-\lambda_j} - \frac{W_n^2}{\lambda_i-\lambda_j}\right) = \\
= \frac{1}{2(\lambda_i-\lambda_j)}\left(W_1^2 + \sum_{k=2}^{n-1}(W_k^2 - W_{k-1}^2) - W_{n-1}^2\right) = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, инволютивность собственных значений матрицы L доказана. Поскольку интегралы I_k являются функциями от этих собственных значений, они также находятся в инволюции. Независимость функций I_k очевидна, $\mathfrak{Q.e.D.}$

1.7.3 Метод обратной задачи

Мы доказали, что цепочка Тоды (1.55) является вполне интегрируемой гамильтоновой системой. Теперь предъявим ее явное решение, используя так называемый *метод обратной задачи.* Идея этого метода состоит в следующем: пусть некоторая система записана в форме Лакса $\dot{L} = [A, L]$ и мы заинтересованы в нахождении ее явного решения, т.е. в предъявлении рецепта, как по начальным данным (в случае цепочки Тоды это $\mathbf{a}(0), \mathbf{b}(0)$) построить общее решение системы, им удовлетворяющее. Перейдем от начальных данных (т.е. исходных динамических переменных при $t = 0$) к так называемым *спектральным данным*, т.е. некоторым величинам, характеризующим спектр матрицы L и ее собственные значения. Это — *прямая задача.* Поскольку деформация матрицы L вдоль траекторий системы является изоспектральной, эволюция спектральных данных со временем, как правило, очень проста (т.е. существенно проще эволюции исходных динамических переменных); это позволяет нам найти спектральные данные в произвольный момент времени t. Затем необходимо решить *обратную задачу*, т.е. восстановить значения динамических переменных в момент времени t по измененным со временем спектральным данным. Эта часть, как правило, бывает наиболее сложной, и называется *обратной задачей.* При таком подходе нам необходимо вместо одной задачи построения явного решения необходимо последовательно решить три задачи, но, как правило, каждая из них оказывается существенно проще непосредственного отыскания явного решения исходной задачи:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{начальные данные}} \arrow[r, "???"] \arrow[d, "\textit{прямая задача}"] & \boxed{\text{явное решение}} \\
\boxed{\text{спектр. данные при } t=0} \arrow[r, "\textit{эволюция}"] & \boxed{\text{спектр. данные при произвольном } t} \arrow[u, "\textit{обратная задача}"']
\end{tikzcd}$$

Итак, в случае цепочки Тоды мы стартуем с начальных данных

$$a_1(0), a_2(0), \dots, a_n(0), b_1(0), b_2(0), \dots, b_{n-1}(0).$$

В процессе доказательства теоремы о полной интегрируемости цепочки Тоды мы уже выяснили, что все собственные значения матрицы L различны; поэтому каждому из них соответствует некоторый нормированный собственный вектор, который определен однозначно с точностью до умножения на -1. Для того, чтобы исключить эту неоднозначность, договоримся выбирать все эти собственные значения так, что первая координата $\xi_i = x_1^{(i)} > 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Кроме того, для удобства будем считать, что собственные значения расположены по возрастанию:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n.$$

Оказывается, что в качестве спектральных данных для цепочки Тоды можно взять набор собственных значений λ_i и набор первых координат ξ_i надлежащим образом выбранных собственных векторов. Иными словами, это означает, что зная величины $(\lambda_i, \xi_i(t))$, где $i = 1, 2, \dots, n$, мы можем восстановить матрицу $L(t)$, в чем, собственно, и состоит обратная задача (то, что λ_i не зависят от t мы уже знаем — цепочка Тоды задает изоспектральную деформацию матрицы L). Но прежде чем приступать к решению обратной задачи, сделаем одно наблюдение: матрица L содержит $2n-1$ независимый параметр, а спектральных данных у нас $2n$ штук; это означает, что они не могут быть независимыми, т.е. что между ними должно быть некоторое соотношение.

Предложение 1.21. *Имеет место следующее соотношение:*

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2 = 1. \tag{1.63}$$

Доказательство.

Поскольку матрица L симметрична, ее собственные векторы попарно ортогональны; кроме того, мы их нормировали, т.е. базис, состоящий из них, является ортонормированным. А это означает что матрица C перехода от стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$ к базису из собственных векторов матрицы L является ортогональной. Поэтому, суммы квадратов элементов в любой ее строке равны единице, откуда вытекает соотношение (1.63), $\mathfrak{Q.e.d.}$

Таким образом, для решения обратной задачи нам надо доказать, что по набору произвольному спектральных данных

$$\{\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n, \xi_1 > 0, \xi_2 > 0, \ldots, \xi_n > 0 \,|\, \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2 = 1\}$$

однозначно восстанавливается матрица L с такими спектральными данными. Введем в пространстве $\mathbb{R}_{n-1}[z]$ многочленов степени ниже n от формальной переменной z скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 f(\lambda_i) g(\lambda_i). \tag{1.64}$$

Поскольку все веса ξ_i^2 положительны, и ни один многочлен из $\mathbb{R}_{n-1}[z]$ не может обращаться в нуль сразу во всех точках $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, формула (1.65) действительно задает евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}_{n-1}[z]$.

Применим процесс ортогонализации Грама-Шмидта к базису $\{1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}\}$ пространства $\mathbb{R}_{n-1}[z]$ относительно скалярного произведения (1.64) и полученный ортогональный (но не нормированный) базис обозначим $\{p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}\}$, где

$$p_{i+1} = z^i + \gamma_{i,i+1} p_i + \gamma_{i-1,i+1} p_{i-1} + \cdots + \gamma_{0,i+1} p_0 \tag{1.65}$$

для всех $i = 0, 1, \ldots, n-2$, а $p_0 = 1$.

Лемма 1.2. *Для ортогонализованных многочленов имеет место рекуррентное соотношение*

$$zp_i = p_{i+1} + \alpha_i p_i + \beta_i p_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-2,$$

где коэффициенты α_i, β_i определяются следующим образом:

$$\alpha_i = \frac{(zp_i, p_i)}{(p_i, p_i)}, \quad \beta_i = \frac{(p_i, p_i)}{(p_{i-1}, p_{i-1})}.$$

Доказательство.

Легко заметить, что поскольку мы стартуем с многочлена p_0, у которого старший коэффициент равен единице, формула (1.65) будет давать только многочлены с единичным старшим коэффициентом. Поэтому для каждого $i = 1, 2, \ldots, n-2$ многочлен $zp_i - p_{i+1}$ имеет степень $i - 1$ и, следовательно, является линейной комбинацией многочленов $p_i, p_{i-1}, \ldots, p_0$:

$$zp_i - p_{i+1} = \alpha_i p_i + \beta_i p_{i-1} + \gamma_i p_{i-2} + \ldots \tag{1.66}$$

Покажем, что $zp_i - p_{i+1} \in \langle p_i, p_{i-1} \rangle$. В самом деле, многочлен zp_i ортогонален всем многочленам p_j при $j \leqslant i-2$ поскольку согласно формуле (1.64)

$$(zp_i, p_j) = (p_i, zp_j),$$

а многочлен p_i по построению ортогонален всей линейной оболочке

$$\langle p_0, p_1, \ldots, p_{i-1} \rangle = \langle 1, z, \ldots, z^{i-2} \rangle,$$

которая содержит многочлен zp_j. Поскольку многочлен p_{i+1} тоже ортогонален всем многочленам p_j при $j \leqslant i-2$, скалярно умножая равенство (1.66) на p_{i-2}, получаем, что $\gamma_i = 0$, и т.д. Теперь, умножая равенство (1.66) скалярно на p_i и p_{i-1} соответственно, получаем требуемые выражения для коэффициентов α_i и β_i, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Лемма 1.3. *Пусть*

$$\Delta_k = \det \begin{pmatrix} z-a_1 & -b_1 & 0 & \dots & 0 \\ -b_1 & z-a_2 & -b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -b_{k-1} \\ 0 & \dots & 0 & -b_{k-1} & z-a_k \end{pmatrix},$$

где $k = 1, 2, \dots, n$ и $\Delta_0 = 0$. Тогда эти определители удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$\Delta_{k+1} = (z - a_{k+1})\Delta_k - b_k^2 \Delta_{k-1} \tag{1.67}$$

для всех $k = 1, 2, \dots n-1$.

Доказательство.

При $k \geqslant 2$ справедливость рекуррентной формулы (1.67) доказывается разложением определителя Δ_{k+1} по последней строке, а при $k = 1$ проверяется непосредственно, $\mathfrak{Q.e.D.}$

Теорема 1.12. *Равенства*

$$a_{i+1} = \frac{(zp_i, p_i)}{(p_i, p_i)}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad b_i = \frac{|p_i|}{|p_{i-1}|}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \tag{1.68}$$

где многочлены $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ получаются ортогонализацией базиса $\{1, z, \dots, z^{n-1}\}$ относительно скалярного произведения (1.64), дают решение обратной задачи $(\lambda_i, \xi_i) \to (a_i, b_i)$ для цепочки Тоды.

Доказательство.

Нам надо показать, что трехдиагональная матрица L, построенная по формулам (1.68), имеет нужные спектральные данные, т.е. что она имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и что числа $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j$ являются первыми координатами соответствующих нормированных собственных векторов.

Легко заметить, что многочлены $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ и определители $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$ удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению второго порядка и одинаковым начальным данным:

$$p_0 = \Delta_0 = 1, \quad p_1 = z - \frac{(zp_0, p_0)}{(p_0, p_0)} = z - a_1 = \Delta_1. \tag{1.69}$$

Отсюда следует, что $p_i = \Delta_i$ для всех $i = 2, 3, \dots, n-1$. Однако, детерминанты Δ_i определены для всех натуральных i, а многочлены p_i — лишь для $i < n$ (по построению). Доопределим многочлен p_n той же рекуррентной формулой: $p_n = (z - \alpha_n)p_{n-1} - b_n^2 p_{n-2}$; тогда автоматически будет выполнено соотношение $\Delta_n = p_n$. Покажем, что многочлен p_n ортогонален всем многочленам $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ относительно вырожденной билинейной формы (1.64) на пространстве $\mathbb{R}_n[z]$ всех многочленов степени не выше n (эта форма вырождена, поскольку для характеристического многочлена $\chi(z) = (-1)^n (z - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_n)$ матрицы L выполнено соотношение $(\chi, \chi) = 0$). В самом деле, его ортогональность многочленам p_{n-1} и p_{n-2} следует из формул (1.68) и рекуррентного соотношения, с помощью которого он был определен, а ортогональность всем многочленам p_i при $i < n-2$ вытекает из процесса Грама-Шмидта и самосопряженности умножения на z:

$$(p_n, p_i) = (zp_{n-1}, p_i) - \alpha_n (p_{n-1}, p_i) - b_n^2 (p_{n-2}, p_i) = (p_{n-1}, zp_i) = 0$$

поскольку $zp_i \in \langle 1, z, \dots, z^{i+1} \rangle = \langle p_0, p_1, \dots, p_{i+1} \rangle$.

Мы знаем, что ограничение билинейной формы (1.64) на подпространство $\mathbb{R}_{n-1}[z]$ задает евклидово скалярное произведение. Поэтому, ортогональное дополнение подпространства $\mathbb{R}_{n-1}[z]$ в пространстве $\mathbb{R}_n[z]$ относительно формы (1.64) одномерно. Таким образом,

$$p_n = (-1)^n \chi = \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i),$$

поскольку оба многочлена p_n и χ ортогональны подпространству $\mathbb{R}_{n-1}[z] = \langle p_0, p_1, \ldots, p_{n-1} \rangle$, а многочлен p_n по построению имеет единичный старший коэффициент. Значит, поскольку $p_n = \Delta_n = \det(zE - L) = (-1)^n \det(L - zE)$, матрица L, восстановленная с помощью формул (1.68), имеет нужный характеристический многочлен, а, следовательно, и нужный спектр (поскольку, как мы уже выяснили, все симметричные трехдиагональные матрицы со строго положительными внедиагональными элементами имеют простой спектр).

Теперь нам осталось показать, что у восстановленной матрицы L первые компоненты нормированных собственных векторов совпадают с величинами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Во-первых, заметим, что $|p_0| = 1$ в силу соотношения (1.63); далее, легко видеть, что в силу второго из равенств (1.68) отсюда немедленно вытекает, что

$$|p_i| = b_1 b_2 \ldots b_i \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Рассмотрим нормированные многочлены $q_i = p_i/|p_i|$, они, очевидно, удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$b_{i+1} q_{i+1} + (a_{i+1} - z) q_i + b_i q_{i-1} = 0,$$

где $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Подставляя теперь $z = \lambda_k$ в последнее равенство, получаем следующее:

$$b_{i+1} q_{i+1}(\lambda_k) + (a_{i+1} - \lambda_k) q_i(\lambda_k) + b_i q_{i-1}(\lambda_k) = 0.$$

Легко заметить, что левая часть последнего равенства есть не что иное как результат умножения $(i+1)$-ой строки матрицы $L - \lambda_k E$ на вектор

$$\mathbf{v}_k = (q_0(\lambda_k), q_1(\lambda_k), \ldots, q_{n-1}(\lambda_k))$$

(результат умножения первой строки матрицы $L - \lambda_k E$ на этот вектор будет содержать лишь два слагаемых, он получается из второго соотношения (1.69), а результат умножения последней строки этой матрицы на тот же вектор тоже будет содержать лишь два слагаемых, поскольку $p_n(\lambda_k) = 0$). Это означает, что вектор $\mathbf{v}_k$ является собственным вектором матрицы L, соответствующим собственному значению λ_k. Найдем его первую компоненту:

$$q_0(\lambda_k) = p_0(\lambda_k) = 1.$$

Поэтому, выбирая в качестве собственных векторы $\mathbf{u}_k = \xi_k \mathbf{v}_k$, где $k = 1, 2, \ldots, n$, получим набор собственных векторов матрицы L с первыми компонентами, равными $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Осталось показать, что $|\mathbf{u}_k| = 1$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. В самом деле, поскольку многочлены q_i попарно ортогональны, для любых $i \neq j$ имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{n} q_i(\lambda_k) q_j(\lambda_k) \xi_k^2 = 0;$$

кроме того, поскольку каждый из многочленов q_i является нормированным относительно скалярного произведения (1.64), для каждого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{n} (q_i(\lambda_k))^2 \xi_k^2 = 1.$$

Два последних равенства в совокупности означают, что все строчки матрицы перехода от стандартного базиса в $\mathbb{R}^{n-1}[z]$ к базису $\{q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}\}$ попарно и нормированы. Отсюда следует, что эта матрица ортогональна, а, значит и все ее столбцы тоже имеют единичные нормы. Таким образом, $|\mathbf{u}_k| = 1$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$, т.е. нам удалось восстановить матрицу L по спектральным данным (λ_i, ξ_i), $\mathfrak{Q.e.d.}$

Теперь, после того, как мы научились решать обратную задачу для цепочки Тоды, для получения ее явного решения нам необходимо описать эволюцию со временем спектральных данных (λ_i, ξ_i).

Лемма 1.4. *Пусть цепочка Тоды записана в форме Лакса $\dot{L} = [A, L]$, а вектор $\mathbf{x}$ является нормированным собственным вектором матрицы Лакса L. Тогда он удовлетворяет уравнению $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$.*

Доказательство.

Продифференцируем равенство $(L - \lambda E)\mathbf{x} = 0$:

$$\dot{L}\mathbf{x} + (L - \lambda E)\dot{\mathbf{x}} = 0.$$

Используя представление Лакса, получаем:

$$0 = AL\mathbf{x} - LA\mathbf{x} + (L - \lambda E)\dot{\mathbf{x}} = -(L - \lambda E)AL\mathbf{x} + (L - \lambda E)\dot{\mathbf{x}} = (L - \lambda E)(\dot{\mathbf{x}} - A\mathbf{X}),$$

т.е. либо $\dot{\mathbf{x}} - A\mathbf{x} = 0$, либо вектор $\dot{\mathbf{x}} - A\mathbf{x}$ является собственным для матрицы L с собственным значением λ. В силу простоты спектра матрицы L, это означает, что $\dot{\mathbf{x}} - A\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$ для некоторого $\mu \in \mathbb{R}$. Умножим последнее равенство скалярно на $\mathbf{x}$:

$$(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) - (A\mathbf{x}, x) = \mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}). \tag{1.70}$$

Дифференцируя тождество $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \equiv 1$, получаем что $(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = 0$. Кроме этого, в силу кососимметричности матрицы A, имеем:

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, -A\mathbf{x}) = (-A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -(A\mathbf{x}, \mathbf{x}),$$

т.е. $(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$. Поэтому из равенства (1.70) вытекает, что $\mu = 0$. Таким образом, $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Теорема 1.13. *Эволюция спектральных данных явно описывается формулами*

$$\lambda_k(t) = \lambda_k(0), \quad \xi_k(t) = \frac{e^{\lambda_k t}\xi_k(0)}{\sqrt{e^{2\lambda_1 t}\xi_1(0)^2 + e^{2\lambda_2 t}\xi_2(0)^2 + \cdots + e^{2\lambda_n t}\xi_n(0)^2}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.71}$$

Доказательство.

Пусть $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$, где $x^{(k)} = \xi_1 > 0$, — нормированный собственный вектор матрицы L с собственным значением λ_k. Тогда согласно лемме имеет место равенство $\dot{\mathbf{x}}^{(k)} = A\mathbf{x}^{(k)}$. Воспользовавшись трехдиагональностью матриц A и L, немедленно получаем отсюда, что имеют место равенства

$$(a_1 - \lambda_k)x_1^{(k)} + b_1 x_2^{(k)} = 0, \quad \dot{x}_1^{(k)} = b_1 x_2^{(k)}.$$

Это означает, что $\dot{\xi}_k = (\lambda_k - a_1)\xi_k$, или, что эквивалентно, $\dot{\xi} = (\Lambda - a_1 E)\xi)$, где

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k), \quad \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Дифференцируя доказанное ранее соотношение $(\xi, \xi) = 1$, получаем, что

$$0 = (\dot{\xi}, \xi) = ((\Lambda - a_1 E\xi, \xi) = (\Lambda\xi, xi) - a_1(\xi, \xi) = (\Lambda\xi, \xi) - a_1.$$

Поэтому

$$\dot{\xi} = (\Lambda - (\Lambda\xi, xi)E)\xi.$$

Теперь легко заметить, что $\xi_k(t)$, определенные формулой (1.71), удовлетворяют этому уравнению первого порядка на начальным условиям $\xi_k(0) = \xi_k$, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Задача 1.10. В случае $n = 2$ явно выписать решение цепочки Тоды $a_1(t)$, $a_2(t)$, $b_1(t)$.

1.7.4 Связь с QR-алгоритмом

Как хорошо известно из курса линейной алгебры, всякая невырожденная матрица M допускает представление в виде $M = QR$, где Q — ортогональная, а R — верхнетреугольная матрицы. Далее, переставив сомножители, мы получим другую невырожденную матрицу $M_1 = RQ$, для которой снова выпишем разложение $M_1 = Q_1R_1$, где Q_1 — ортогональная, а R_1 — верхнетреугольная, и т.д. Такая процедура

$$M_0 = Q_0R_0 \longrightarrow R_0Q_0 = M_1 = Q_1R_1 \longrightarrow R_1Q_1 = M_2 = Q_2R_2 \longrightarrow \ldots$$

называется *QR-алгоритмом.* Удивительным обстоятельством является то, что QR-алгоритм оказывается тесным образом связанным с цепочкой Тоды.

Теорема 1.14. *Пусть $L(t)$ — матрица Лакса, отвечающая некоторому решению цепочки Тоды. Тогда QR-представление* $\exp(tL(0)) = Q(t)R(t)$ *дает решение цепочки Тоды:*

$$L(t) = Q^T(t)L(0)Q(t).$$

Доказательство.

Продифференцируем равенство $\exp(tL(0)) = Q(t)R(t)$:

$$\dot{Q}R + Q\dot{R} = L(0)\exp(tL(0)) = L(0)QR;$$

умножая полученное равенство на R^{-1} справа и на $Q^T = Q^{-1}$ слева, получаем следующее равенство:

$$Q^T\dot{Q} + \dot{R}R^{-1} = Q^TL(0)Q. \tag{1.72}$$

Продифференцируем теперь матрицу $M(t) = Q^T(t)L(0)Q(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{M} = \dot{Q}^TL(0)Q + Q^TL(0)\dot{Q} = \dot{Q}^TQQ^TL(0)Q + Q^TL(0)QQ^T\dot{Q} = \\ = \dot{Q}^TQM + MQ^T\dot{Q} = -Q^T\dot{Q}M + MQ^T\dot{Q} = [M, Q^T\dot{Q}],\end{aligned} \tag{1.73}$$

поскольку из условия ортогональности $Q^TQ = E$ дифференцированием получается соотношение $\dot{Q}^TQ + Q^T\dot{Q} = 0$.

Очевидно, что произвольная матрица однозначно представляется в виде суммы кососимметричной и верхнетреугольной. Поэтому из равенства (1.72) следует, что

$$Q^T\dot{Q} = \pi_s(M),$$

где π_s — проекция на пространство кососимметрических матриц при таком разложении. Это означает, что равенство (1.73) можно переписать в виде

$$\dot{M} = [M, \pi_s(M)].$$

Далее, легко заметить, что в паре Лакса для цепочки Тоды имеет место соотношение $-A = \pi_s(L)$, т.е. представление Лакса можно переписать в виде

$$\dot{L} = [A, L] = -[L, A] = [L, \pi_s(L)].$$

Таким образом, матрицы $L(t)$ и $M(t)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению первого порядка; поскольку начальные условия одинаковы, $M(0) = L(0)$, отсюда следует, что $M(t) \equiv L(t)$, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Следствие 1.5. *Пусть $L(t)$ — матрица Лакса, отвечающая некоторому решению цепочки Тоды и $M_k = \exp(L(k))$ где $k = 0, 1, 2\ldots.$ Тогда матрица M_k получается из матрицы M_0 применением k шагов QR-алгоритма.*

Доказательство.

Выпишем QR-разложение матрицы M_0:

$$M_0 = \exp(L(0)) = \exp(tL(0))|_{t=1} = Q(1)R(1).$$

Согласно доказанной теореме, $L(1) = Q^T(1)L(0)Q(1) = Q^{-1}(1)L(0)Q(1)$ в силу ортогональности матрицы $Q(1)$. Поэтому,

$$\begin{aligned}M_1 = \exp(L(1)) = \exp(Q^{-1}(1)L(0)Q(1)) = Q^{-1}(1)\exp(L(0))Q(1) = \\ = Q^{-1}(1)M_kQ(1) = Q^{-1}(1)Q(1)R(1)Q(1) = R(1)Q(1).\end{aligned}$$

Таким образом, матрица M_1 получается из матрицы M_0 применением одного шага QR-алгоритма, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 1.40. Доказанное следствие показывает, что цепочка Тоды представляет собой интерполяцию QR-алгоритма: мы предъявили непрерывную деформацию матрицы $L(0)$, которая в целых точках совпадает с QR-алгоритмом.

1.8 Бигамильтоновы системы

Как мы уже отмечали выше, наличие большого количества первых интегралов если и не позволяет полностью проинтегрировать систему, то, во всяком случае, дает возможность понизить ее порядок. Однако, никаких общих методов нахождения первых интегралов не существует. Мы уже обсудили, что если нам удалось построить зависящее от параметра представление Лакса, то коэффициенты характеристического многочлена лаксовой матрицы являются первыми интегралами; тем не менее, этот подход, во-первых, не гарантирует их инволютивности или даже независимости. Теперь мы обсудим еще одну общую конструкцию, которая позволяет строить первые интегралы для гамильтоновых систем.

1.8.1 Согласованные пуассоновы структуры

Определение 1.29. Пусть на гладком n-мерном многообразии M заданы две пуассоновы структуры ω и $\tilde{\omega}$. Эти структуры называются *согласованными*, если бивектор $\lambda\omega + \mu\tilde{\omega}$ задает пуассонову структуру на M для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Предложение 1.22. *Скобки Пуассона ω и $\tilde{\omega}$ согласованы тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\omega^{il}\frac{\partial\tilde{\omega}^{jk}}{\partial x^l} + \omega^{jl}\frac{\partial\tilde{\omega}^{ki}}{\partial x^l} + \omega^{kl}\frac{\partial\tilde{\omega}^{ij}}{\partial x^l} + \tilde{\omega}^{il}\frac{\partial\omega^{jk}}{\partial x^l} + \tilde{\omega}^{jl}\frac{\partial\omega^{ki}}{\partial x^l} + \tilde{\omega}^{kl}\frac{\partial\omega^{ij}}{\partial x^l}\right) = 0 \qquad (1.74)$$

для всех $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство.

Согласно Предложению 1.7 бивектор задает пуассонову структуру тогда и только тогда, когда выполнено условие Схоутена (1.19). Записывая это условие для бивектора $\lambda\omega^{ij} + \mu\tilde{\omega}^{ij}$, получаем:

$$0 = \sum_{l=1}^{n} \left((\lambda\omega^{il} + \mu\tilde{\omega}^{il}) \left(\lambda \frac{\partial \omega^{jk}}{\partial x^l} + \mu \frac{\partial \tilde{\omega}^{jk}}{\partial x^l} \right) + (\lambda\omega^{jl} + \mu\tilde{\omega}^{jl}) \left(\lambda \frac{\partial \omega^{ki}}{\partial x^l} + \mu \frac{\partial \tilde{\omega}^{ki}}{\partial x^l} \right) + \right.$$
$$\left. +(\lambda\omega^{kl} + \mu\tilde{\omega}^{kl}) \left(\lambda \frac{\partial \omega^{ij}}{\partial x^l} + \mu \frac{\partial \tilde{\omega}^{ij}}{\partial x^l} \right) \right) = \lambda^2 \sum_{l=1}^{n} \left(\omega^{il} \frac{\partial \omega^{jk}}{\partial x^l} + \omega^{jl} \frac{\partial \omega^{ki}}{\partial x^l} + \omega^{kl} \frac{\partial \omega^{ij}}{\partial x^l} \right) +$$
$$= \lambda\mu \sum_{l=1}^{n} \left(\omega^{il} \frac{\partial \tilde{\omega}^{jk}}{\partial x^l} + \omega^{jl} \frac{\partial \tilde{\omega}^{ki}}{\partial x^l} + \omega^{kl} \frac{\partial \tilde{\omega}^{ij}}{\partial x^l} + \tilde{\omega}^{il} \frac{\partial \omega^{jk}}{\partial x^l} + \tilde{\omega}^{jl} \frac{\partial \omega^{ki}}{\partial x^l} + \tilde{\omega}^{kl} \frac{\partial \omega^{ij}}{\partial x^l} \right) +$$
$$+ \mu^2 \sum_{l=1}^{n} \left(\tilde{\omega}^{il} \frac{\partial \tilde{\omega}^{jk}}{\partial x^l} + \tilde{\omega}^{jl} \frac{\partial \tilde{\omega}^{ki}}{\partial x^l} + \tilde{\omega}^{kl} \frac{\partial \tilde{\omega}^{ij}}{\partial x^l} \right).$$

Поскольку это равенство должно быть выполнено при всех $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, все три коэффициента полученного однородного многочлена обращаются в нуль. Легко заметить, что коэффициенты при λ^2 и μ^2 равны нулю в силу условия Схоутена для бивекторов ω и $\tilde{\omega}$ соответственно, а коэффициент при $\lambda\mu$ представляет собой в точности левую часть равенства (1.74), **Q.e.d.**

Замечание 1.41. Согласованность двух пуассоновых структур означает, что на рассматриваемом пуассоновом многообразие есть целый пучок (т.е. однопараметрическое семейство) согласованных пуассоновых структур. Даже если оба бивектора ω и $\tilde{\omega}$ вырождены, то некая их линейная комбинация может оказаться невырожденной. Это обстоятельство будет полезно нам в дальнейшем.

Задача 1.11. Пусть $\{\cdot,\cdot\}_1$ и $\{\cdot,\cdot\}_2$ — две скобки Пуассона на некотором многообразии M. Доказать, что они согласованы тогда и только тогда, когда для любых функций $f, g, h \in C^\infty(M)$ выполнено равенство

$$\{f,\{g,h\}_1\}_2 + \{f,\{g,h\}_2\}_1 + \{g,\{h,f\}_1\}_2 + \{g,\{h,f\}_2\}_1 + \{h,\{f,g\}_1\}_2 + \{h,\{f,g\}_2\}_1 = 0.$$

Замечание 1.42. В дифференциальной геометрии левая часть равенства (1.74) называется *скобкой Схоутена* бивекторов ω и $\tilde{\omega}$. Легко видеть, что при этом условие Схоутена (1.19) эквивалентно равенству нулю скобки Схоутена бивектора ω с самим собой.

1.8.2 Оператор рекурсии

Определение 1.30. Пусть бивекторы ω и $\tilde{\omega}$ задают согласованные скобки Пуассона на n-мерном многообразии M, причем пуассонова структура ω всюду невырождена. Тогда тензор $R_i^j = \sum_{k=1}^n \omega_{ik}\tilde{\omega}^{kj}$, где ω_{ik} обозначает обратную матрицу, называется *оператором рекурсии.*

Предложение 1.23. *Пуассоновы структуры ω и $\tilde{\omega}$ на n-мерном многообразии, по крайней мере одна из которых невырождена, согласованы тогда и только тогда, когда для соответствующего оператора рекурсии R выполнено условие Нийенхейса:*

$$N_{ij}^k = \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial R_i^k}{\partial x^l} R_j^l - \frac{\partial R_j^k}{\partial x^l} R_i^l + \frac{\partial R_j^l}{\partial x^i} R_l^k - \frac{\partial R_i^l}{\partial x^j} R_l^k \right) = 0 \tag{1.75}$$

для всех $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство.

Покажем, что условие Ниейнхейса (1.75) вытекает из условия (1.74) согласованности двух пуассоновых структур. Для этого перепишем выражение, стоящее в правой части равенства (1.75), в терминах тензоров ω и $\widetilde{\omega}$. Однако, прежде чем это делать, отметим следующее обстоятельство: поскольку условие Схоутена состоит в равенстве нулю тензора с тремя верхними индексами, а в данном случае мы имеем дело с тензором N_{ij}^k с двумя нижними и одним верхним индексом, для доказательства равенства (1.75) нам необходимо поднять все индексы. Легко видеть, что в силу невырожденности пуассоновой структуры ω условие (1.75) эквивалентно условию

$$\sum_{i,j=1}^{n} N_{ij}^k \omega^{is}\omega^{jq} = 0 \quad \text{для всех } k, q, s = 1, 2, \ldots, n.$$

Далее на по ходу доказательства будем для краткости использовать тензорные обозначения, т.е. будем опускать знак суммы при суммировании по повторяющимся индексам. Подставляя в левую часть этого равенства выражение для коэффициентов оператора рекурсии, имеем:

$$\begin{aligned}
N_{ij}^k\omega^{is}\omega^{jq} &= \frac{\partial \omega_{i\alpha}}{\partial x^l}\widetilde{\omega}^{\alpha k}\omega_{j\beta}\widetilde{\omega}^{\beta l}\omega^{is}\omega^{jq} + \frac{\partial \widetilde{\omega}^{\alpha k}}{\partial x^l}\omega_{i\alpha}\omega_{j\beta}\widetilde{\omega}^{\beta l}\omega^{is}\omega^{jq} - \frac{\partial \omega_{j\alpha}}{\partial x^l}\widetilde{\omega}^{\alpha k}\omega_{i\beta}\widetilde{\omega}^{\beta l}\omega^{is}\omega^{jq} - \\
&- \frac{\partial \widetilde{\omega}^{\alpha k}}{\partial x^l}\omega_{j\alpha}\omega_{i\beta}\widetilde{\omega}^{\beta l}\omega^{is}\omega^{jq} + \frac{\partial \omega_{j\alpha}}{\partial x^i}\widetilde{\omega}^{\alpha l}\omega_{l\beta}\widetilde{\omega}^{\beta k}\omega^{is}\omega^{jq} + \frac{\partial \widetilde{\omega}^{\alpha l}}{\partial x^i}\omega_{j\alpha}\omega_{l\beta}\widetilde{\omega}^{\beta k}\omega^{is}\omega^{jq} - \frac{\partial \omega_{i\alpha}}{\partial x^j}\widetilde{\omega}^{\alpha l}\omega_{l\beta}\widetilde{\omega}^{\beta k}\omega^{is}\omega^{jq} - \\
&- \frac{\partial \widetilde{\omega}^{\alpha l}}{\partial x^j}\omega_{i\alpha}\omega_{l\beta}\widetilde{\omega}^{\beta k}\omega^{is}\omega^{jq} = -\delta^q_\beta\frac{\partial \omega_{i\alpha}}{\partial x^l}\widetilde{\omega}^{\alpha k}\widetilde{\omega}^{\beta l}\omega^{is} + \delta^s_\alpha\delta^q_\beta\frac{\partial \widetilde{\omega}^{\alpha k}}{\partial x^l}\widetilde{\omega}^{\beta l} + \delta^s_\beta\frac{\partial \omega_{j\alpha}}{\partial x^l}\widetilde{\omega}^{\alpha k}\widetilde{\omega}^{\beta l}\omega^{jq} - \delta^q_\alpha\delta^s_\beta\frac{\partial \widetilde{\omega}^{\alpha k}}{\partial x^l}\widetilde{\omega}^{\beta l} + \\
&+ \frac{\partial \omega_{j\alpha}}{\partial x^i}\widetilde{\omega}^{\alpha l}\omega_{l\beta}\widetilde{\omega}^{\beta k}\omega^{is}\omega^{jq} - \delta^q_\alpha\frac{\partial \widetilde{\omega}^{\alpha l}}{\partial x^i}\omega_{l\beta}\widetilde{\omega}^{\beta k}\omega^{is} - \frac{\partial \omega_{i\alpha}}{\partial x^j}\widetilde{\omega}^{\alpha l}\omega_{l\beta}\widetilde{\omega}^{\beta k}\omega^{is}\omega^{jq} + \delta^s_\alpha\frac{\partial \widetilde{\omega}^{\alpha l}}{\partial x^j}\omega_{l\beta}\widetilde{\omega}^{\beta k}\omega^{jq} = \\
&= -\frac{\partial \omega_{i\alpha}}{\partial x^l}\widetilde{\omega}^{\alpha k}\widetilde{\omega}^{ql}\omega^{is} + \frac{\partial \widetilde{\omega}^{sk}}{\partial x^l}\widetilde{\omega}^{ql} + \frac{\partial \omega_{j\alpha}}{\partial x^l}\widetilde{\omega}^{\alpha k}\widetilde{\omega}^{sl}\omega^{jq} - \frac{\partial \widetilde{\omega}^{qk}}{\partial x^l}\widetilde{\omega}^{sl} + \frac{\partial \omega_{j\alpha}}{\partial x^i}\widetilde{\omega}^{\alpha l}\omega_{l\beta}\widetilde{\omega}^{\beta k}\omega^{is}\omega^{jq} - \\
&- \frac{\partial \widetilde{\omega}^{ql}}{\partial x^i}\omega_{l\beta}\widetilde{\omega}^{\beta k}\omega^{is} - \frac{\partial \omega_{i\alpha}}{\partial x^j}\widetilde{\omega}^{\alpha l}\omega_{l\beta}\widetilde{\omega}^{\beta k}\omega^{is}\omega^{jq} + \frac{\partial \widetilde{\omega}^{sl}}{\partial x^j}\omega_{l\beta}\widetilde{\omega}^{\beta k}\omega^{jq}
\end{aligned} \tag{1.76}$$

(здесь мы воспользовались кососимметричностью пуассонова бивектора). Воспользуемся теперь правилом дифференцирования обратной матрицы и заменим в полученном выражении производные тензоров с нижними индексами на производные тензоров с верхними индексами и продолжим равенство (1.76):

$$\begin{aligned}
N_{ij}^k\omega^{is}\omega^{jq} &= \omega_{i\beta}\frac{\partial \omega^{\beta\gamma}}{\partial x^l}\omega_{\gamma\alpha}\widetilde{\omega}^{\alpha k}\widetilde{\omega}^{ql}\omega^{is} + \frac{\partial \widetilde{\omega}^{sk}}{\partial x^l}\widetilde{\omega}^{ql} - \omega_{j\beta}\frac{\partial \omega^{\beta\gamma}}{\partial x^l}\omega_{\gamma\alpha}\widetilde{\omega}^{\alpha k}\widetilde{\omega}^{sl}\omega^{jq} - \frac{\partial \widetilde{\omega}^{qk}}{\partial x^l}\widetilde{\omega}^{sl} - \\
&- \omega_{j\gamma}\frac{\partial \omega^{\gamma\nu}}{\partial x^i}\omega_{\gamma\alpha}\widetilde{\omega}^{\alpha l}\omega_{l\beta}\widetilde{\omega}^{\beta k}\omega^{is}\omega^{jq} - \frac{\partial \widetilde{\omega}^{ql}}{\partial x^i}\omega_{l\beta}\widetilde{\omega}^{\beta k}\omega^{is} + \omega_{i\gamma}\frac{\partial \omega^{\gamma\nu}}{\partial x^j}\omega_{\nu\alpha}\widetilde{\omega}^{\alpha l}\omega_{l\beta}\widetilde{\omega}^{\beta k}\omega^{is}\omega^{jq} + \frac{\partial \widetilde{\omega}^{sl}}{\partial x^j}\omega_{l\beta}\widetilde{\omega}^{\beta k}\omega^{jq} = \\
&= -\frac{\partial \omega^{s\gamma}}{\partial x^l}\omega_{\gamma\alpha}\widetilde{\omega}^{\alpha k}\widetilde{\omega}^{ql} + \frac{\partial \widetilde{\omega}^{sk}}{\partial x^l}\widetilde{\omega}^{ql} + \frac{\partial \omega^{q\gamma}}{\partial x^l}\omega_{\gamma\alpha}\widetilde{\omega}^{\alpha k}\widetilde{\omega}^{sl} - \frac{\partial \widetilde{\omega}^{qk}}{\partial x^l}\widetilde{\omega}^{sl} + \frac{\partial \omega^{q\nu}}{\partial x^i}\omega_{\nu\alpha}\widetilde{\omega}^{\alpha l}\omega_{l\beta}\widetilde{\omega}^{\beta k}\omega^{is} - \frac{\partial \widetilde{\omega}^{ql}}{\partial x^i}\omega_{l\beta}\widetilde{\omega}^{\beta k}\omega^{is} + \\
&- \frac{\partial \omega^{s\nu}}{\partial x^j}\omega_{\nu\alpha}\widetilde{\omega}^{\alpha l}\omega_{l\beta}\widetilde{\omega}^{\beta k}\omega^{jq} + \frac{\partial \widetilde{\omega}^{sl}}{\partial x^j}\omega_{l\beta}\widetilde{\omega}^{\beta k}\omega^{jq}.
\end{aligned} \tag{1.77}$$

Теперь с помощью условия Схоутена (1.19) для бивектора $\widetilde{\omega}$ преобразуем сумму второго и четвертого слагаемых в выражении (1.77):

$$\frac{\partial \widetilde{\omega}^{sk}}{\partial x^l}\widetilde{\omega}^{ql} + \frac{\partial \widetilde{\omega}^{kq}}{\partial x^l}\widetilde{\omega}^{sl} = -\frac{\partial \widetilde{\omega}^{qs}}{\partial x^l}\widetilde{\omega}^{kl}$$

и с помощью условия (1.74) согласованности пуассоновых структур преобразуем сумму первого и третьего слагаемых в (1.77):

$$-\frac{\partial \omega^{s\gamma}}{\partial x^l}\widetilde{\omega}^{ql} - \frac{\partial \omega^{\gamma q}}{\partial x^l}\widetilde{\omega}^{sl} = \frac{\partial \omega^{qs}}{\partial x^l}\widetilde{\omega}^{\gamma l} + \frac{\partial \widetilde{\omega}^{s\gamma}}{\partial x^l}\omega^{ql} + \frac{\partial \widetilde{\omega}^{\gamma q}}{\partial x^l}\omega^{sl} + \frac{\partial \widetilde{\omega}^{qs}}{\partial x^l}\omega^{\gamma l}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
N_{ij}^k\omega^{is}\omega^{jq} = &-\frac{\partial\tilde\omega^{qs}}{\partial x^l}\tilde\omega^{kl} + \left(\frac{\partial\omega^{qs}}{\partial x^l}\tilde\omega^{\gamma l} + \frac{\partial\tilde\omega^{s\gamma}}{\partial x^l}\omega^{ql} + \frac{\partial\tilde\omega^{\gamma q}}{\partial x^l}\omega^{sl} + \frac{\partial\tilde\omega^{qs}}{\partial x^l}\omega^{\gamma l}\right)\omega_{\gamma\alpha}\tilde\omega^{\alpha k} + \\
&+\frac{\partial\omega^{q\nu}}{\partial x^i}\omega_{\nu\alpha}\tilde\omega^{\alpha l}\omega_{l\beta}\tilde\omega^{\beta k}\omega^{is} - \frac{\partial\tilde\omega^{ql}}{\partial x^i}\omega_{l\beta}\tilde\omega^{\beta k}\omega^{is} - \frac{\partial\omega^{s\nu}}{\partial x^j}\omega_{\nu\alpha}\tilde\omega^{\alpha l}\omega_{l\beta}\tilde\omega^{\beta k}\omega^{jq} + \frac{\partial\tilde\omega^{sl}}{\partial x^j}\omega_{l\beta}\tilde\omega^{\beta k}\omega^{jq} = \\
&-\frac{\partial\tilde\omega^{qs}}{\partial x^l}\tilde\omega^{kl} + \frac{\partial\omega^{qs}}{\partial x^l}\tilde\omega^{\gamma l}\omega_{\gamma\alpha}\tilde\omega^{\alpha k} + \frac{\partial\tilde\omega^{s\gamma}}{\partial x^l}\omega^{ql}\omega_{\gamma\alpha}\tilde\omega^{\alpha k} + \frac{\partial\tilde\omega^{\gamma q}}{\partial x^l}\omega^{sl}\omega_{\gamma\alpha}\tilde\omega^{\alpha k} + \frac{\partial\tilde\omega^{qs}}{\partial x^l}\omega^{\gamma l}\omega_{\gamma\alpha}\tilde\omega^{\alpha k} + \\
&+\frac{\partial\omega^{q\nu}}{\partial x^i}\omega_{\nu\alpha}\tilde\omega^{\alpha l}\omega_{l\beta}\tilde\omega^{\beta k}\omega^{is} - \frac{\partial\tilde\omega^{ql}}{\partial x^i}\omega_{l\beta}\tilde\omega^{\beta k}\omega^{is} - \frac{\partial\omega^{s\nu}}{\partial x^j}\omega_{\nu\alpha}\tilde\omega^{\alpha l}\omega_{l\beta}\tilde\omega^{\beta k}\omega^{jq} + \frac{\partial\tilde\omega^{sl}}{\partial x^j}\omega_{l\beta}\tilde\omega^{\beta k}\omega^{jq} = \\
&-\frac{\partial\tilde\omega^{qs}}{\partial x^l}\tilde\omega^{kl} + \frac{\partial\omega^{qs}}{\partial x^l}\tilde\omega^{\gamma l}\omega_{\gamma\alpha}\tilde\omega^{\alpha k} + \frac{\partial\tilde\omega^{s\gamma}}{\partial x^l}\omega^{ql}\omega_{\gamma\alpha}\tilde\omega^{\alpha k} + \frac{\partial\tilde\omega^{\gamma q}}{\partial x^l}\omega^{sl}\omega_{\gamma\alpha}\tilde\omega^{\alpha k} - \frac{\partial\tilde\omega^{qs}}{\partial x^l}\tilde\omega^{lk} + \\
&+\frac{\partial\omega^{q\nu}}{\partial x^i}\omega_{\nu\alpha}\tilde\omega^{\alpha l}\omega_{l\beta}\tilde\omega^{\beta k}\omega^{is} - \frac{\partial\tilde\omega^{ql}}{\partial x^i}\omega_{l\beta}\tilde\omega^{\beta k}\omega^{is} - \frac{\partial\omega^{s\nu}}{\partial x^j}\omega_{\nu\alpha}\tilde\omega^{\alpha l}\omega_{l\beta}\tilde\omega^{\beta k}\omega^{jq} + \frac{\partial\tilde\omega^{sl}}{\partial x^j}\omega_{l\beta}\tilde\omega^{\beta k}\omega^{jq}.
\end{aligned} \tag{1.78}$$

Преобразуем теперь с помощью условия Схоутена для бивектора ω сумму шестого и восьмого слагаемых в выражении (1.78), заменяя при этом "немой" индекс суммирования j на i:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\omega^{q\nu}}{\partial x^i}\omega_{\nu\alpha}\tilde\omega^{\alpha l}\omega_{l\beta}\tilde\omega^{\beta k}\omega^{is} - \frac{\partial\omega^{s\nu}}{\partial x^j}\omega_{\nu\alpha}\tilde\omega^{\alpha l}\omega_{l\beta}\tilde\omega^{\beta k}\omega^{jq} = \left(\frac{\partial\omega^{q\nu}}{\partial x^i}\omega^{is} + \frac{\partial\omega^{\nu s}}{\partial x^i}\omega^{iq}\right)\omega_{\nu\alpha}\tilde\omega^{\alpha l}\omega_{l\beta}\tilde\omega^{\beta k} = \\
= -\frac{\partial\omega^{sq}}{\partial x^i}\omega_{\nu\alpha}\tilde\omega^{\alpha l}\omega_{l\beta}\tilde\omega^{\beta k}\omega^{i\nu} = -\delta^i_\alpha\frac{\partial\omega^{sq}}{\partial x^i}\tilde\omega^{\alpha l}\omega_{l\beta}\tilde\omega^{\beta k} = -\frac{\partial\omega^{sq}}{\partial x^i}\tilde\omega^{il}\omega_{l\beta}\tilde\omega^{\beta k}.
\end{aligned} \tag{1.79}$$

Теперь, используя (1.79), преобразуем (1.78):

$$\begin{aligned}
N_{ij}^k\omega^{is}\omega^{jq} = -\frac{\partial\tilde\omega^{qs}}{\partial x^l}\tilde\omega^{kl} + \frac{\partial\omega^{qs}}{\partial x^l}\tilde\omega^{\gamma l}\omega_{\gamma\alpha}\tilde\omega^{\alpha k} + \frac{\partial\tilde\omega^{s\gamma}}{\partial x^l}\omega^{ql}\omega_{\gamma\alpha}\tilde\omega^{\alpha k} + \frac{\partial\tilde\omega^{\gamma q}}{\partial x^l}\omega^{sl}\omega_{\gamma\alpha}\tilde\omega^{\alpha k} - \frac{\partial\tilde\omega^{qs}}{\partial x^l}\tilde\omega^{lk} - \\
-\frac{\partial\tilde\omega^{ql}}{\partial x^i}\omega_{l\beta}\tilde\omega^{\beta k}\omega^{is} + \frac{\partial\tilde\omega^{sl}}{\partial x^j}\omega_{l\beta}\tilde\omega^{\beta k}\omega^{jq} - \frac{\partial\omega^{sq}}{\partial x^i}\tilde\omega^{il}\omega_{l\beta}\tilde\omega^{\beta k} = 0.
\end{aligned} \tag{1.80}$$

В самом деле, в выражении (1.78) первое слагаемое сократится с пятым в силу кососимметричности бивектора $\tilde\omega$; второе слагаемое отличается от восьмого лишь индексами суммирования — после их замены они также сократятся в из-за косой симметрии. Аналогичным образом третье слагаемое сократится с седьмым, а четвертое — с шестым. Таким образом, условие Ниейнхейса эквивалентно условию согласованности пуассоновых структур, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 1.43. В дифференциальной геометрии тензор N_{ij}^k, определяемый равенством (1.75), называется *тензором Ниейхейса*, соответствующим оператору R.

1.8.3 Схема Ленарда–Магри

Определение 1.31. *Бигамильтоновой системой* на пуассоновом многообразии M называется система, которая является гамильтоновой относительно двух независимых скобок Пуассона:

$$\dot x^j = \{H_1, x^j\}_1 = \{H_2, x^j\}_2.$$

Оказывается, что если система является гамильтоновой сразу относительно двух пуассоновых структур и это структуры согласованы между собой, то некая общая рекуррентная процедура позволяет строить первые интегралы рассматриваемой системы, и во многих случаях этих первых интегралов оказывается достаточно для полной интегрируемости.

Теорема 1.15. *Пусть бивекторы ω и $\tilde{\omega}$ задают согласованные скобки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_1$ и $\{\cdot,\cdot\}_2$ соответственно на n-мерном многообразии M, причем пуассонова структура ω всюду невырождена. Тогда если первая группа когомологий де Рама многообразия M тривиальна, то для бигамильтоновой системы с гамильтонианами H_1 и H_2 относительно этих пуассоновых структур функции I_s, где $s = 1, 2, \dots$, определяемые рекуррентно формулами*

$$I_0 = H_2, \quad I_1 = H_1, \quad \{I_{s-1}, x^j\}_2 = \{I_s, x^j\}_1, \quad j = 1, 2, \dots n, \tag{1.81}$$

являются первыми интегралами. Все эти интегралы находятся в инволюции относительно обеих скобок Пуассона.

Доказательство.

Перепишем рекуррентное равенство для первых интегралов в терминах пуассоновых бивекторов:

$$\sum_{l=1}^{n} \tilde{\omega}^{lj} \frac{\partial I_{s-1}}{\partial x^l} = \sum_{l=1}^{n} \omega^{lj} \frac{\partial I_s}{\partial x^l}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Поскольку первая пуассонова структура невырождена, умножим равенство на матрицу, обратную к матрице бивектора ω:

$$\frac{\partial I_s}{\partial x^l} = \sum_{i,k=1}^{n} \omega_{li} \tilde{\omega}^{ik} \frac{\partial I_{s-1}}{\partial x^k} = \sum_{k=1}^{n} R_l^k \frac{\partial I_{s-2}}{\partial x^k}, \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

где R — соответствующий оператор рекурсии. Поскольку по предположению $H^1_{DR}(M) = 0$, для того, чтобы эти уравнения задавали функцию I_s с точностью до константы, необходимо и достаточно выполнения условий совместности:

$$\frac{\partial^2 I_s}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 I_s}{\partial x^i \partial x^j} \quad \text{для всех } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Доказательство будем проводить по индукции. Предположим, что функции $I_2, I_3, \dots I_{s-1}$ уже построены с помощью рекуррентных формул (1.81); тогда, в частности, справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial I_{s-1}}{\partial x^l} = \sum_{k=1}^{n} R_l^k \frac{\partial I_{s-2}}{\partial x^k}, \quad l = 1, 2, \dots, n, \tag{1.82}$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial I_s}{\partial x^j}\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial I_s}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_{l=1}^{n} R_j^l \frac{\partial I_{s-1}}{\partial x^l}\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sum_{l=1}^{n} R_i^l \frac{\partial I_{s-1}}{\partial x^l}\right) = \\
&= \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial R_j^l}{\partial x^i}\frac{\partial I_{s-1}}{\partial x^l} + R_j^l \frac{\partial^2 I_{s-1}}{\partial x^l \partial x^i} - \frac{\partial R_i^l}{\partial x^j}\frac{\partial I_{s-1}}{\partial x^l} - R_i^l \frac{\partial^2 I_{s-1}}{\partial x^l \partial x^j}\right) = \sum_{l=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial R_j^l}{\partial x^i} - \frac{\partial R_i^l}{\partial x^j}\right)\frac{\partial I_{s-1}}{\partial x^l} + \right.\\
&\left. + R_j^l \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sum_{k=1}^{n} R_i^k \frac{\partial I_{s-2}}{\partial x^k}\right) - R_i^l \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sum_{k=1}^{n} R_j^k \frac{\partial I_{s-2}}{\partial x^k}\right)\right) = \sum_{l=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial R_j^l}{\partial x^i} - \frac{\partial R_i^l}{\partial x^j}\right)\sum_{k=1}^{n} R_l^k \frac{\partial I_{s-2}}{\partial x^k} + \right.\\
&\left. + \sum_{k=1}^{n}\left(R_j^l \frac{\partial R_i^k}{\partial x^l}\frac{\partial I_{s-2}}{\partial x^k} + R_j^l R_i^k \frac{\partial^2 I_{s-2}}{\partial x^k \partial x^l} - R_i^l \frac{\partial R_j^k}{\partial x^l}\frac{\partial I_{s-2}}{\partial x^k} + R_i^l R_j^k \frac{\partial^2 I_{s-2}}{\partial x^k \partial x^l}\right)\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial I_{s-2}}{\partial x^k}\left(\sum_{l=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial R_j^l}{\partial x^i} - \frac{\partial R_i^l}{\partial x^j}\right) R_l^k + R_j^l \frac{\partial R_i^k}{\partial x^l} - R_i^l \frac{\partial R_j^k}{\partial x^l}\right)\right) = 0
\end{aligned}$$

в силу условия Ниейхейса (1.75). Здесь мы сперва воспользовались формулой (1.82) а затем — равенством смешанных производных для уже построенной функции I_{s-2} (для того, чтобы убедиться в том, что слагаемые, содержащие ее вторые производные сократятся, в одном из них необходимо еще дополнительно поменять между собой индексы суммирования k и l). Далее, нетрудно убедиться, что база индукции $\{I_0, x^j\}_2 = \{I_1, x^j\}_1$ вытекает из бигамильтоновости нашей системы.

Докажем теперь, что построенные функции являются первыми рассматриваемой бигамильтоновой системы. В самом деле, из рекуррентной формулы (1.81) следует, что

$$\{I_2, H_2\}_1 = \{I_1, H_2\}_2 = 0,$$

поскольку функция $I_1 = H_1$ является одним из гамильтонианов. Далее по индукции: если уже доказано, что функции $I_2, I_3, \ldots, I_{s-1}$ являются первыми интегралами, то из рекуррентного соотношения (1.81) вытекает, что

$$\{I_s, H_2\}_1 = \{I_{s-1}, H_2\}_2 = 0 \tag{1.83}$$

в силу индуктивного предположения. Таким образом, все построенные функции действительно являются первыми интегралами.

Нам осталось показать, что все интегралы $I_0, I_1, \ldots$ находятся в инволюции относительно обеих скобок Пуассона. Для произвольных $s, p = 1, 2, \ldots$ имеем:

$$\{I_s, I_p\}_1 = \{I_{s-1}, I_p\}_2 = -\{I_p, I_{s-1}\}_2 = -\{I_{p+1}, I_{s-1}\}_1 = \{I_{s-1}, I_{p+1}\}_1 = \cdots = \{I_1, I_{p+s-1}\}_1 = 0,$$

поскольку I_{p+s-1} является первым интегралом, а $I_1 = H_1$ — гамильтониан для первой пуассоновой структуры. Если $p = 0$, то инволютивность этих интегралов вытекает из соотношения (1.83). Аналогичным образом доказывается инволютивность относительно второй скобки Пуассона:

$$\{I_s, I_p\}_2 = \{I_{s+1}, I_p\}_1 = -\{I_p, I_{s+1}\}_1 = -\{I_{p-1}, I_{s+1}\}_2 = \{I_{s+1}, I_{p-1}\}_2 = \cdots = \{I_{s+p}, I_0\}_2 = 0,$$

Q.e.d.

Замечание 1.44. Несмотря на то, что схема Ленарда–Магри дает нам, вообще говоря, бесконечную последовательность первых интегралов для бигамильтоновой системы, наличие двух согласованных пуассоновых структур не гарантирует полной интегрируемости этой системы, поскольку интегралы, даваемые этой общей схемой, могут оказаться зависимыми, т.е. может так случиться, что этот метод не дает полного набора первых интегралов в инволюции.

Задача 1.12. Пусть все собственные значения оператора рекурсии для бигамильтоновой относительно пары согласованных пуассоновых структур системы различны и непостоянны. Доказать, что они являются независимыми первыми интегралами, находящимися в инволюции относительно обеих скобок Пуассона, для рассматриваемой системы.

Замечание 1.45. Интересным обстоятельством является то, что все известные осмысленные примеры гамильтоновых систем оказываются бигамильтоновыми. Например, в последней четверти двадцатого века после открытия схемы Ленарда–Магри различными исследователями были построены вторые пуассоновы структуры для хорошо известных к тому моменту интегрируемых систем классической механики. И хотя в случае динамических систем бигамильтонов подход не дал практически ничего нового, в случае уравнений с частными производными этот метод оказался чрезвычайно полезным.

1.8.4 Вырожденные пуассоновы структуры

Мы подробно рассмотрели случай, когда в пучке согласованных пуассоновых структур есть хотя бы одна невырожденная. Однако, во многих известных примерах (в частности, если размерность пуассонова многообразия нечетна) все пуассоновы структуры в рассматриваемом пучке оказываются вырожденными. В этом случае оператор рекурсии не определен, что не дает возможности "запустить" схему Ленарда–Магри даже для бигамильтоновой относительно двух согласованных скобок Пуассона системы. Тем не менее, анализ доказательства теоремы 1.15 показывает, что справедливо следующее

Предложение 1.24. *Если для бигамильтоновой системы*

$$\dot{x}^j = \{H_1, x^j\}_1 = \{H_2, x^j\}_2. \tag{1.84}$$

существует последовательность функций $I_0 = H_2, I_1 = H_1, I_2, \dots$, удовлетворяющая условиям (1.81), то эти функции находятся в инволюции относительно обеих скобок Пуассона и являются первыми интегралами бигамильтоновой системы (1.84).

Определение 1.32. Система называется *мультигамильтоновой*, если она является гамильтоновой относительно трех или более независимых пуассоновых структур.

Оказывается, что даже в случае, когда у нас нет цепочки функций типа (1.84), бигамильтонова или мультигамильтонова структура системы иногда позволяет строить достаточно богатые инволютивные наборы первых интегралов. Предположим, что $\{\cdot,\cdot\}_1$ и $\{\cdot,\cdot\}_2$ — согласованные скобки Пуассона на некотором пуассоновом многообразии, задающие некоторую бигамильтонову систему, а J_1 и J_2 — их функции Казимира соответственно. Тогда для любой пуассоновой структуры

$$\{\cdot,\cdot\} = \lambda\{\cdot,\cdot\}_1 + \mu\{\cdot,\cdot\}_1$$

из линейного пучка, порождаемого этими двумя скобками Пуассона, справедливо равенство

$$\{J_1, J_2\} = \lambda\{J_1, J_2\}_1 + \mu\{J_1, J_2\}_2 = 0,$$

т.е. функции Казимира разных пуассоновых структур находятся в инволюции относительно их линейной комбинации. А поскольку функции Казимира являются первыми интегралами, это обстоятельство дает нам некоторых запас первых интегралов рассматриваемой системы. Однако, вообще говоря, нельзя утверждать, что полученные интегралы будут в инволюции относительно $\{\cdot,\cdot\}$, поскольку в общем случае две функции Казимира для одной из скобой Пуассона не обязаны быть в инволюции относительно другой скобки. Тем не менее, если, например, дополнительно предположить, что ранг всех скобок Пуассона в рассматриваемом пучке одинаков, то это утверждение становится верным (см. [4]), что означает, что объединение всех функций Казимира обеих скобок является инволютивным семейством первых интегралов нашей бигамильтоновой системы. Более того, если наша системы является мультигамильтоной, причем все скобки Пуассона попарно согласованы и имеют одинаковый ранг, то объединяя функции Казимира всех пуассоновых структур, мы получаем еще большее инволютивное семейство первых интегралов. Исследованию вопроса о полноте такого набора интегралов, в частности, посвящена статья [4].

1.8.5 Бигамильтонова структура цепочки Тоды

Для цепочки Тоды, как и для многих интегрируемых систем классической механики, бигамильтоново представление столь существенной роли, как в теории эволюционных уравнений, поскольку оно было получено существенно позже, чем была доказана ее полная интегрируемость. Тем не менее, продемонстрируем на этом примере, как работает формула (1.84).

Ранее мы уже определили одну скобку Пуассона для цепочки Тоды, записанной в переменных Флашки (1.58); теперь для некоторого упрощения формул в качестве первой скобки Пуассона возьмем пропорциональную ей:

$$\{a_j,b_j\}_1=-\{b_j,a_j\}_1=-b_j,\quad \{a_{j+1},b_j\}_1=-\{b_j,a_{j+1}\}_1=b_j,\quad j=1,3\dots n-1 \tag{1.85}$$

(на остальных координатных функциях скобка Пуассона равна нулю).

Задача 1.13. Доказать, что равенства

$$\begin{aligned}&\{a_j,a_{j+1}\}_2=-\{a_{j+1},a_j\}_2=-2b_j^2, && \{a_j,b_j\}_2=-\{b_j,a_j\}_1=-a_jb_j,\\ &\{a_{j+1},b_j\}_2=-\{b_j,a_{j+1}\}_2=a_{j+1}b_j, && \{b_j,b_{j+1}\}_2=-\{b_{j+1},b_j\}_2=-\frac{1}{2}b_jb_{j+1},\end{aligned} \tag{1.86}$$

где $j=1,2,\dots n-1$ и предполагается, что все остальные компоненты равны нулю, задают скобку Пуассона, согласованную со скобкой (1.85).

Нетрудно проверить, что скобка Пуассона (1.86) задает вторую гамильтонову структуру для цепочки Тоды с гамильтонианом

$$H_2=\sum_{j=1}^{n}a_j.$$

В самом деле для всех $i=1,2,\dots,n$ имеем:

$$\{H_2,a_i\}_2=\sum_{j=1}^{n}\{a_j,a_i\}_2=-2b_{i-1}^2+2b_i^2=\dot a_i$$

$$\{H_2,b_i\}_2=\sum_{j=1}^{n}\{a_j,b_i\}_2=-a_ib_i+a_{i+1}b_i=\dot b_i.$$

Предложение 1.25. *Функции $\tilde I_s=\frac{1}{s}\operatorname{tr}(L^s)$, где $s=1,2,\dots,$ а L — матрица Лакса для цепочки Тоды, удовлетворяют следующим соотношениям типа Ленарда–Магри:*

$$\{\tilde I_s,x^j\}_2=\{\tilde I_{s+1},x^j\}_1,\quad j=1,2,\dots n; \tag{1.87}$$

при этом $\tilde I_1$ является гамильтонианом, соответствующим пуассоновой структуре $\{\cdot,\cdot\}_2$, а $\tilde I_2$ — гамильтонианом, соответствующим пуассоновой структуре $\{\cdot,\cdot\}_1$.

Доказательство.

При изучении цепочки Тоды мы уже выяснили, что матрица Лакса L имеет простой спектр, а зависимость соответствующих собственных значений от динамических переменных определяется формулами (1.60). Пусть Ω_1 и Ω_2 — матрицы определенных выше пуассоновых структур. Покажем, что $k=1,2,\dots,n$ справедливо равенство

$$\lambda_k\Omega_1\nabla\lambda_k=\Omega_2\nabla\lambda_k, \tag{1.88}$$

где

$$\nabla\lambda_k=\left(\frac{\partial\lambda_k}{\partial a_1},\frac{\partial\lambda_k}{\partial a_1},\dots,\frac{\partial\lambda_k}{\partial a_n},\frac{\partial\lambda_k}{\partial b_1},\frac{\partial\lambda_k}{\partial b_2},\dots,\frac{\partial\lambda_k}{\partial b_{n-1}}\right)^T=$$
$$=\left(\left(x_1^{(k)}\right)^2,\left(x_2^{(k)}\right)^2,\dots,\left(x_n^{(k)}\right)^2,2x_1^{(k)}x_2^{(k)},2x_2^{(k)}x_3^{(k)},\dots,2x_{n-2}^{(k)}x_{n-1}^{(k)}\right)^T.$$

В самом деле, прямой проверкой нетрудно установить, что

$$(\Omega_1\nabla\lambda_k)^i = 2x_i^{(k)}(b_{i-1}x_{i-1}^{(k)} - b_i x_{i+1}^{(k)}), \quad (\Omega_1\nabla\lambda_k)^{n+j} = b_j\left(\left(x_j^{(k)}\right)^2 - \left(x_{j+1}^{(k)}\right)^2\right), \tag{1.89}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$ и для удобства введены обозначения $b_0 = b_n = 0$, $x_0^{(k)} = x_{n+1}^{(k)} = 0$. Воспользуемся теперь тем, что λ_k — собственное значение матрицы L,

$$b_{i-1}x_{i-1}^{(k)} + a_i x_i^{(k)} + b_i x_{i+1}^{(k)} = \lambda_k x_i^{(k)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.90}$$

умножим выражения (1.89) на λ_k и подставим туда (1.6):

$$\begin{aligned}
\lambda_k(\Omega_1\nabla\lambda_k)^i &= 2(b_{i-1}x_{i-1}^{(k)} + a_i x_i^{(k)} + b_i x_{i+1}^{(k)})(b_{i-1}x_{i-1}^{(k)} - b_i x_{i+1}^{(k)}) = \\
&= 2\left(b_{i-1}^2\left(x_{i-1}^{(k)}\right)^2 - b_i^2\left(x_i^{(k)}\right)^2 + a_i b_{i-1} x_{i-1}^{(k)} x_i^{(k)} - a_i b_i x_i^{(k)} x_{i+1}^{(k)}\right) \\
\lambda_k(\Omega_1\nabla\lambda_k)^{n+j} &= b_j\left(x_j^{(k)}(b_{j-1}x_{j-1}^{(k)} + a_j x_j^{(k)} + b_j x_{j+1}^{(k)}) - x_{j+1}^{(k)}(b_j x_j^{(k)} + a_{j+1}x_{j+1}^{(k)} + b_{j+1}x_{j+2}^{(k)})\right) = \\
&= b_j\left(b_{j-1}x_{j-1}^{(k)}x_j^{(k)} - b_{j+1}x_{j+1}^{(k)}x_{j+2}^{(k)} + a_j\left(x_j^{(k)}\right)^2 - a_{j+1}\left(x_{j+1}^{(k)}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что те же самые выражения получаются при умножении матрицы Ω_2 на вектор $\nabla\lambda_k$; таким образом, формула (1.88) доказана.

Для произвольного $s = 1, 2, \ldots$ умножим (1.88) на λ_k^s и перепишем полученную формулу в следующем виде:

$$\Omega_1\nabla\left(\frac{1}{s+1}\lambda_k^{s+1}\right) = \Omega_2\nabla\left(\frac{1}{s}\lambda_k^s\right).$$

Суммируя теперь эти выражения по $k = 1, 2, \ldots, n$, приходим к формуле (1.87), $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 1.46. Пользуясь доказанным Предложением, мы могли бы существенно упростить доказательство полной интегрируемости цепочки Тоды, поскольку самым технически нетривиальным местом в том рассуждении являлась инволютивность первых интегралов, даваемых представлением Лакса. А наличие формул (1.87) автоматически влечет их инволютивность в силу Предложения 1.24.

Замечание 1.47. Мы рассмотрели две пуассоновых структуры для цепочки Тоды: одна их них линейна по динамическим переменным, а другая — квадратична. На самом деле, существуют и другие скобки Пуассона более высокой степени для цепочки Тоды (см. [8]).

1.9 Одевающая цепочка Веселова–Шабата

Рассмотрим еще один пример вполне интегрируемой гамильтоновой системы — так называемую *одевающую цепочку Веселова–Шабата*. Но прежде нам понадобится ввести несколько вспомогательных понятий.

1.9.1 Дифференциальные операторы и преобразования Дарбу

Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что ядро всякого одномерного линейного дифференциального оператора

$$\mathcal{L} = \frac{d^n}{dx^n} + \gamma_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + \gamma_1(x)\frac{d}{dx} + \gamma_0(x) \tag{1.91}$$

является n-мерным линейным пространством (здесь и далее при подобной записи подразумевается, что $\mathcal{L}\psi = \psi^{(n)} + \gamma_{n-1}\psi^{(n-1)} + \dots + \gamma_1\psi' + \gamma_0\psi$). Нетрудно сообразить, что отсюда немедленно вытекает, что такой оператор полностью определяется своим ядром, если его старший коэффициент равен единице. В самом деле, если предположить, что существует два дифференциальных оператора порядка n с единичным старшим коэффициентом и одинаковым ядром K, то их разность, с одной стороны, будет дифференциальным оператором порядка $n-1$, а с другой стороны, будет содержать n-мерное подпространство K в своем ядре. Имеет место следующее очевидное предложение.

Предложение 1.26. *Пусть $\mathcal{L}$ — дифференциальный оператор вида (1.91) первого порядка. Тогда $\gamma_0 = -(\ln\psi)'$, где $\psi \in \operatorname{Ker}\mathcal{L}$ — произвольная функция из ядра $\mathcal{L}$.*

Задача 1.14. Доказать, что произвольный дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ вида (1.91) раскладывается в произведение дифференциальных операторов первого порядка, причем такие факторизации находятся во взаимно-однозначном соответствии с полными флагами в линейном пространстве $\operatorname{Ker}\mathcal{L}$.

Определение 1.33. Будем говорить, что дифференциальные операторы $\mathcal{L}$ и $\hat{\mathcal{L}}$ вида (1.91) *связаны преобразованием Дарбу*, если существует такой дифференциальный оператор $\mathcal{A}$ со старшим коэффициентом 1, что выполнено равенство

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{L} = \hat{\mathcal{L}} \circ \mathcal{A}.^3 \tag{1.92}$$

Легко видеть, что преобразования Дарбу сохраняют порядок дифференциального оператора. Основное свойство преобразований Дарбу немедленно вытекает из равенства (1.92) и состоит в следующем очевидном предложении.

Предложение 1.27. *Если дифференциальные операторы $\mathcal{L}$ и $\hat{\mathcal{L}}$ связаны преобразованием Дарбу (1.92), то для любого решения ψ дифференциального уравнения $\mathcal{L}\psi = 0$ функция $\hat{\psi} = \mathcal{A}\psi$ является решением уравнения $\hat{\mathcal{L}}\hat{\psi} = 0$.*

Замечание 1.48. Вообще говоря, если операторы $\mathcal{L}$ и $\hat{\mathcal{L}}$ связаны преобразованием Дарбу, то нельзя утверждать, что любое решение уравнения $\hat{\mathcal{L}}\hat{\psi} = 0$ имеет вид $\mathcal{L}\psi$, где ψ — решение уравнения $\mathcal{L}\psi = 0$, поскольку разность двух линейно независимых решений уравнения $\mathcal{L}\psi = 0$ вполне может содержаться в ядре оператора $\mathcal{D}$.

Замечание 1.49. Легко видеть, что композиция двух преобразований Дарбу тоже является преобразованием Дарбу. Точнее, пусть имеют места равенства

$$\mathcal{A}_1\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2\mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_2\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3\mathcal{A}_2.$$

Введем обозначение $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2\mathcal{A}_1$; тогда

$$\mathcal{A}\mathcal{L}_1 = \mathcal{A}_2\left(\mathcal{A}_1\mathcal{L}_1\right) = \mathcal{A}_2\left(\mathcal{L}_2\mathcal{A}_1\right) = \left(\mathcal{A}_2\mathcal{L}_2\right)\mathcal{A}_1 = \left(\mathcal{L}_3\mathcal{A}_2\right)\mathcal{A}_1 = \mathcal{L}_3\mathcal{A}.$$

Задача 1.15. Доказать, что произвольное преобразование Дарбу раскладывается в произведение преобразований Дарбу первого порядка.

Описанное выше свойство преобразований Дарбу переводить решения линейных уравнений в решения иногда позволяет находить эти решения в явном виде. В самом деле, если нам известно, что некоторый дифференциальный оператор связан преобразованием Дарбу с каким-нибудь простым оператором, ядро которого нам известно, то мы, как правило, можем найти и ядро другого. Или, наоборот, одевая преобразованиями Дарбу некоторый дифференциальный оператор с известным ядром, можно получать явно решаемые уравнения.

Задача 1.16. Описать все дифференциальные операторы, связанные преобразованиями Дарбу первого порядка с оператором $\mathcal{L} = (d/dx)^2$.

[3] В дальнейшем мы будем опускать знаки композиции.

1.9.2 Одевающая цепочка

Определение 1.34. Пусть

$$\mathcal{A} = \gamma_n \frac{d^n}{dx^n} + \gamma_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + \gamma_0.$$

Тогда *формально сопряженным* к $\mathcal{A}$ дифференциальным оператором называется

$$\mathcal{A}^+ = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \circ \gamma_n + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \circ \gamma_{n-1} + \cdots + \gamma_0. \tag{1.93}$$

Замечание 1.50. В формуле (1.93) суммируются композиции оператора многократного дифференцирования и оператора умножения на функцию. В частности, согласно правилу Лейбница,

$$\frac{d}{dx}\gamma_1 = \gamma_1 \frac{d}{dx} + \gamma_1', \quad \frac{d^2}{dx^2} \circ \gamma_2 = \gamma_2 \frac{d^2}{dx^2} + 2\gamma_2' \frac{d}{dx} + \gamma_2'', \ldots$$

Замечание 1.51. Обозначение $\mathcal{A}^+$ для формального сопряжения пришло из квантовой механики. На самом деле, формальному сопряжению можно придать вполне точный смысл: рассмотрим пространство $L_2(\mathbb{R})$ квадратично интегрируемых функций на числовой прямой со скалярным произведением

$$(f, g) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx. \tag{1.94}$$

Тогда, поскольку все функции из $L_2(\mathbb{R})$ стремятся к нулю при $x \to \pm\infty$, интегрирование по частям дает следующее:

$$\left(\frac{d}{dx}(f), g\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x)dx = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)dx = \left(f, -\frac{d}{dx}(g)\right).$$

Таким образом, $-d/dx$ является оператором, сопряженным к d/dx относительно скалярного произведения (1.94). Далее, формула (1.93) получается из общего соотношения для сопряженных операторов: $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$.

Рассмотрим следующую процедуру, напоминающую QR-алгоритм: пусть $\mathcal{L}_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + u_0(x)$ — произвольный одномерный *оператор Шредингера*. Представим его в виде $\mathcal{L}_0 = \mathcal{A}_0\mathcal{A}_0^+ - \alpha_0$, где $\alpha_0 = \mathrm{const}$ и $\mathcal{A}_0 = d/dx + f_0(x)$. Такое представление эквивалентно следующему уравнению Риккати на функцию f_0:

$$u_0 = f_0' + f_0^2 - \alpha_0;$$

далее, построим новый оператор Шредингера $\mathcal{L}_1 = \mathcal{A}_0^+\mathcal{A}_0$. Нетрудно проверить, что он будет иметь тот же вид $\mathcal{L}_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + u_1$, где

$$u_1 = -f_0' + f_0^2.$$

Продолжая процедуру, получаем последовательность операторов

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{A}_0\mathcal{A}_0^+ - \alpha_0 \to \mathcal{A}_0^+\mathcal{A}_0 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{A}_1\mathcal{A}_1^+ - \alpha_1 \to \mathcal{A}_0^+\mathcal{A}_0 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{A}_1\mathcal{A}_1^+ - \alpha_1 \to \ldots$$

Нетрудно заметить, что на каждом шагу выполнено операторное соотношение

$$\mathcal{A}_{j-1}^+\mathcal{A}_{j-1} = \mathcal{L}_j = \mathcal{A}_j\mathcal{A}_j^+ - \alpha_j. \tag{1.95}$$

Тогда имеет место следующая цепочка равенств:

$$\mathcal{A}^{+}_{j-1}\left(\mathcal{L}_{j-1}+\alpha_{j-1}\right)=\mathcal{A}^{+}_{j-1}\mathcal{A}_{j-1}\mathcal{A}^{+}_{j-1}=\mathcal{L}_j\mathcal{A}^{+}_{j-1},$$

т.е. операторы $\mathcal{L}_{j-1}+\alpha_{j-1}$ и $\mathcal{L}_j$ (или, что то же самое, операторы $\mathcal{L}_{j-1}$ и $\mathcal{L}_j-\alpha_{j-1}$) оказываются связанными преобразованием Дарбу. В терминах коэффициентов эта цепочка эквивалентна следующей бесконечной системе дифференциальных уравнений:

$$(f_{j-1}+f_j)'=f_{j-1}^2-f_j^2+\alpha_j.$$

Задача 1.17. Доказать, что для оператора Шредингера $\mathcal{L}=-\frac{d^2}{dx^2}+u(x)$ произвольное преобразование Дарбу обратимо, т.е. если $\hat{\mathcal{L}}\mathcal{A}=\mathcal{A}\mathcal{L}$, то существует оператор $\hat{\mathcal{A}}$ такой, что выполнено равенство $\mathcal{L}\hat{\mathcal{A}}=\hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{L}}$.

Рассмотрим теперь периодическое замыкание нашей системы, т.е. будем предполагать, что для некоторого натурального n выполнены равенства $f_{j+r}\equiv f_j$, где $j=0,1,\dots,n-1$. Соответствующую систему уравнений

$$\begin{cases} (f_n+f_1)'=f_n^2-f_1^2+\alpha_1\\ (f_1+f_2)'=f_1^2-f_2^2+\alpha_2\\ \dots\\ (f_{n-1}+f_n)'=f_{n-1}^2-f_n^2+\alpha_n \end{cases} \tag{1.96}$$

будем называть *одевающей цепочкой Веселова–Шабата*. Изучению ее свойств будет посвящена оставшаяся часть параграфа. Введем обозначение

$$\alpha=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j;$$

Оказывается, свойства одевающей цепочки принципиально различаются в двух случаях: $\alpha=0$ и $\alpha\neq 0$. Но прежде чем переходить к исследованию этих двух случаев, разберем простейший пример.

Пример 1.16. Рассмотрим одевающую цепочку при $n=1$. Легко видеть, что в этом случае единственное ее уравнение $2f_1'=\alpha_1=\alpha$ легко интегрируется, и его общее решение имеет вид

$$f_1(x)=\frac{\alpha x}{2}+c,\quad \text{где } c=\mathrm{const}\,.$$

Соответствующий оператор Шредингера $\mathcal{L}$ при этом имеет квадратичный потенциал:

$$u(x)=\frac{\alpha^2x^2}{4}-\frac{\alpha}{2}.$$

Задача 1.18. В явном виде проинтегрировать уравнения одевающей цепочки (1.96) при $n=2$.

Задача 1.19. Доказать, что при $\alpha\neq 0$ дискретный спектр каждого из операторов $\mathcal{L}_j$, коэффициенты которых удовлетворяют уравнениям одевающей цепочки, полностью определяется алгебраическими соотношениями (1.95) и состоит из n арифметических прогрессий.

Рассмотрим теперь более подробно случай $\alpha=0$. В этом случае уравнения (1.96) можно переписать в виде

$$(f_j+f_{j+1})'=f_j^2-f_{j+1}^2+\beta_j-\beta_{j+1},\quad j\in\mathbb{Z}_n,$$

где $\alpha_j = \beta_{j-1} - \beta_j$; легко заметить, что при $\alpha = 0$ параметры β_j восстанавливаются по параметрам α_j однозначно с точностью до одновременного прибавления некоторой константы. Пусть T — оператор циклического сдвига на пространстве зависимых переменных f_j:

$$T:\ f_j \mapsto f_{j+1}.$$

Тогда его матрица в естественном базисе имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим теперь, что n нечетно и введем следующие обозначения:

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots f_n), \quad \mathbf{h} = (f_1^2, f_2^2, \dots f_n^2), \quad \mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

Поскольку при нечетном n матрица $E + T$ обратима, уравнения одевающей цепочки можно переписать следующим образом:

$$(E + T)\mathbf{f}' = (E - T)(\mathbf{h} + \mathbf{b}) \Longleftrightarrow \mathbf{f}' = \Omega(\mathbf{h} + \mathbf{b}),$$

где $\Omega = (E + T)^{-1}(E - T) = (\omega^{ik})$, а E — единичная матрица. Прямое вычисление показывает, что

$$\omega^{ik} = (-1)^{i-k (\operatorname{mod} n)} \text{ при } k \neq i, \quad \omega^{ii} = 0 \quad \text{ при всех } i = 1, \dots, n. \tag{1.97}$$

Поскольку матрица Ω кососимметрична и постоянна, выполнены условия Схоутена (1.19) и, соответственно, она задает пуассонову структуру на пространстве зависимых переменных f_i:

$$\{f_i, f_k\} = \omega^{ik}. \tag{1.98}$$

Предложение 1.28. *Одевающая цепочка (1.96) при $\alpha = 0$ и нечетном r является гамильтоновой системой относительно скобки Пуассона (1.98) с гамильтонианом*

$$H = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{3} f_j^3 + \beta_j f_j \right).$$

Доказательство.

Нам нужно показать, что $f_j' = \{H, f_j\}$ для всех $j = 1, \dots, n$. Действительно,

$$\{H, f_j\} = \sum_{k=i}^{n} \frac{\partial H}{\partial f_i} \{f_i, f_j\} = \sum_{i=1}^{r} \omega^{ij}(f_j^2 + \beta_j) = f_j',$$

Q.e.d.

Задача 1.20. Показать, что при нечетном n и $\alpha \neq 0$ одевающая цепочка (1.96) в переменных $v_j = f_j - \frac{\alpha n}{2} x$ тоже является гамильтоновой системой относительно скобки Пуассона (1.97).

1.9.3 Представление Лакса и первые интегралы

Мы показали, что при нечетном n и $\alpha = 0$ одевающая цепочка (1.96) является гамильтоновой системой. Теперь уже для произвольного n покажем, что при $\alpha = 0$ она допускает представление Лакса. Поскольку параметры β_j определены однозначно с точночтью до одновременного прибавления произвольной константы, будем для определенности считать, что $\beta_1 = \alpha_1$. Тогда, как нетрудно заметить, $\beta_j = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_j$ для всех $j = 2, 3, \ldots, n$. Предъявим зависящее от спектрального параметра представление Лакса для одевающей цепочки при $\alpha = 0$. Точнее, мы покажем, что оно естественным образом вытекает из природы задачи — оказывается, что тот факт, что операторы в циклической цепочке связаны преобразованиями Дарбу, немедленно приводит к представлению Лакса.

Пусть ψ_1 — произвольное решение уравнения $\mathcal{L}_1\psi_1 = \lambda\psi$. Тогда, поскольку операторы Шредингера в цепочке связаны преобразованиями Дарбу, функция $\psi_2 = \mathcal{A}_1\psi_1$ является решением уравнения $\mathcal{L}_1\psi_1 = \lambda_1\psi_1$, где $\lambda_1 = \lambda - \alpha_1$. Продолжая процесс дальше, будем строить решения $\psi_j = \mathcal{A}^+_{j-1}\psi_{j-1}$ уравнений $\mathcal{L}_j\psi_j = \lambda_j\psi_j$, где $\lambda_j = \lambda_{j-1} - \alpha_{j-1}$. Введем обозначение $\Psi_j = (\psi_j, \psi'_j)^T$, тогда

$$-\psi''_j + u_j\psi_j = \lambda_j\psi_j \Longleftrightarrow \Psi'_j = U_j\Psi_j,$$

где

$$U_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u_j - \lambda_j & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'_j + f_j^2 - \lambda + \beta_j & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом можно записать и преобразования Дарбу:

$$\psi_{j+1} = \mathcal{A}^+_j\psi_j \Longleftrightarrow \Psi_{j+1} = W_j\Psi_j,$$

где

$$W_j = \begin{pmatrix} f_j & -1 \\ f'_j - u_j + \lambda_j & f_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_j & -1 \\ f'_j - u_j + \lambda - \beta_j & f_j \end{pmatrix}.$$

Теорема 1.16. *Периодическое замыкание (1.96) одевающей цепочки Веселова–Шабата при $\alpha = 0$ допускает представление Лакса*

$$\frac{d}{dx}W(\lambda) = [U_1, W(\lambda)],$$

где $W(\lambda) = W_nW_{r-1}\ldots W_1$.

Доказательство.

Рассмотрим произвольную функцию ψ_j, удовлетворяющую условию $\mathcal{L}_j\psi_j = \lambda_j\psi_j$. Тогда для вектора $\Psi_{j+1} = (\psi_{j+1}, \psi'_{j+1})^T$, где $\psi_{j+1} = \mathcal{A}^+_j\psi_j$, имеем:

$$\Psi'_{j+1} = (W_j\Psi_j)' = W'_j\Psi_j + W_j\Psi'_j = W'_j\Psi_j + W_jU_j\Psi_j = \left(W'_j + W_jU_j\right)\Psi_j.$$

С другой стороны, одевающая цепочка является необходимым и достаточным условием того, что из условия $\mathcal{L}_j\psi_j = \lambda_j\psi_j$ следует условие $\mathcal{L}_{j+1}\psi_{j+1} = \lambda_{j+1}\psi_{j+1}$. В векторном виде это эквивалентно следующему равенству

$$\Psi'_{j+1} = U_{j+1}\Psi_{j+1} = U_{j+1}W_j\Psi_j.$$

Таким образом, для каждого $j = 1, 2, \ldots$ соответствующее уравнение системы (1.96) эквивалентно матричному равенству

$$W'_j = U_{j+1}W_j - W_jU_j. \tag{1.99}$$

Использование уравнения (1.99) немедленно приводит к следующей цепочке равенств:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}W(\lambda) = W_n'W_{r-1}\dots W_1 + W_nW_{n-1}'\dots W_1 + \dots + W_nW_{r-1}\dots W_1' =\\ = \left(U_{n+1}W_n - W_nU_n\right)W_{n-1}\dots W_1 + W_n\left(U_nW_{n-1} - W_{n-1}U_{n-1}\right)\dots W_1 + \dots +\\ + W_nW_{n-1}\dots(U_2W_1 - W_1U_1) = U_{n+1}W(\lambda) - W(\lambda)U_1.\end{aligned}$$

Но при $\alpha = 0$ преобразование Дарбу, соответствующее матрице $W(\lambda)$, задает дискретную изоспектральную симметрию, $\lambda_{n+1} = \lambda_1 = \lambda$, т.е. $U_{n+1} = U_1$. Значит, $W'(\lambda) = [U_1, W(\lambda)]$, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Следствие 1.6. *След матрицы $W(\lambda)$*

$$\tau(\lambda) = \operatorname{tr} W(\lambda) = (-1)^n(I_0 + I_1\lambda + I_2\lambda^2 + \dots + I_n)$$

является производящей функцией для первых интегралов системы (1.96), т.е. коэффициенты этого многочлена являются первыми интегралами одевающей цепочки.

Замечание 1.52. На самом деле, нетрудно и непосредственно проверить, что уравнения одевающей цепочки (1.96) эквивалентны матричным уравнениям (1.99). Однако, замечательным обстоятельством является то, что наличие представления Лакса у одевающей цепочки является прямым следствием ее структуры, связанной с преобразованиями Дарбу.

Предложение 1.29. *При $\alpha = 0$ след матрицы $W(\lambda)$ задается следующей явной формулой:*

$$\tau(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 + \zeta_{j+1}\frac{\partial^2}{\partial g_j\partial g_{j+1}}\right)\left(\prod_{i=1}^{n} g_i\right), \tag{1.100}$$

где $\zeta_j = \beta_j - \lambda$, $g_j = f_j + f_{j+1}$, а $j \in \mathbb{Z}_n$ — циклический индекс.

Доказательство.

Из явного вида матриц W_j вытекает, что след $\tau(\lambda)$, как функция от переменных ζ_j, является многочленом, который линеен по каждой из этих переменных. Это означает, что для произвольного набора индексов $i_1 < i_2 < \dots < i_s$ коэффициент $C_{i_1i_2\dots i_s}$ при произведении $\zeta_{i_1}\zeta_{i_2}\dots\zeta_{i_s}$ выражается следующей формулой:

$$\begin{aligned}C_{i_1i_2\dots i_s} = \left.\frac{\partial^s}{\partial\zeta_{i_1}\partial\zeta_{i_2}\dots\partial\zeta_{i_s}}\right|_{\zeta_{i_1}=\zeta_{i_2}=\dots=\zeta_{i_s}=0}(\tau) = \operatorname{tr}\left(\left.\frac{\partial^s W}{\partial\zeta_{i_1}\partial\zeta_{i_2}\dots\partial\zeta_{i_s}}\right|_{\zeta_{i_1}=\zeta_{i_2}=\dots=\zeta_{i_s}=0}\right) =\\ \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} f_1 & -1\\ -f_1^2 & f_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_2 & -1\\ -f_2^2 & f_2\end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix} f_{i_1-1} & -1\\ -f_{i_1-1}^2 & f_{i_1-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{i_1+1} & -1\\ -f_{i_1+1}^2 & f_{i_1+1}\end{pmatrix}\dots\right.\\ \left.\dots\begin{pmatrix} f_{i_2-1} & -1\\ -f_{i_2-1}^2 & f_{i_2-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{i_2+1} & -1\\ -f_{i_2+1}^2 & f_{i_2+1}\end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix} f_{n-1} & -1\\ -f_{n-1}^2 & f_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_n & -1\\ -f_n^2 & f_n\end{pmatrix}\right),\end{aligned}$$

где в этом произведении матриц на местах с номерами $i_1, i_2, \dots, i_s$ стоят матрицы из нулей и минус единицы. Нетрудно проверить, что для любых $k < l$ непостоянные матрицы из этого произведения перемножаются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} f_k & -1\\ -f_k^2 & f_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{k+1} & -1\\ -f_{k+1}^2 & f_{k+1}\end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix} f_l & -1\\ -f_l^2 & f_l\end{pmatrix} = g_kg_{k+1}\dots g_{l-1}\begin{pmatrix} f_l & -1\\ -f_k^2f_l^2 & f_k\end{pmatrix}.$$

Далее, поскольку при $k < l < m$ имеем место равенство

$$\begin{pmatrix} f_l & -1\\ -f_k^2f_l^2 & f_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_m & -1\\ -f_l^2f_m^2 & f_l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_m & -1\\ -f_k^2f_m^2 & f_k\end{pmatrix},$$

все непостоянные "куски" в выражении для $C_{i_1 i_2 \dots i_s}$ склеиваются, и в итоге мы получим следующее:

$$C_{i_1 i_2 \dots i_s} = g_1 g_2 \dots g_{i_1-2} g_{i_1+1} \dots g_{n-1} \cdot \operatorname{tr} \begin{pmatrix} f_r & -1 \\ -f_1^2 f_r^2 & f_1 \end{pmatrix} = g_1 g_2 \dots g_{i_1-2} g_{i_1+1} \dots g_{n-1} g_n.$$

Таким образом, коэффициент $C_{i_1 i_2 \dots i_s}$ получается из произведения $g_1 g_2 \dots g_n$ вычеркиванием пар $g_{i_1-1} g_{i_1}$, $g_{i_2-1} g_{i_2}$ и т.д. Это означает, что

$$\tau(\lambda) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_s \leqslant n} \left(\zeta_{i_1} \zeta_{i_2} \dots \zeta_{i_s} \prod_{j \neq i_k, i_k+1} g_j \right), \tag{1.101}$$

где суммирование ведется по всевозможным наборам $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_s \leqslant n$ из s элементов, $s = 0, 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]$, а индексы являются циклическими (квадратные скобки обозначают целую часть). Нетрудно заметить, что формулу (1.101) можно переписать в виде (1.100), **Q.e.d.**

Пример 1.17. Нетрудно проверить, что производящая функция $\tau(\lambda)$ при небольших r имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
n = 2: \quad & \tau(\lambda) = \zeta_1 + \zeta_2 + g_1 g_2, \\
n = 3: \quad & \tau(\lambda) = g_2 \zeta_1 + g_3 \zeta_2 + g_1 \zeta_3 + g_1 g_2 g_3, \\
n = 4: \quad & \tau(\lambda) = \zeta_1 \zeta_3 + \zeta_2 \zeta_4 + g_2 g_3 \zeta_1 + g_3 g_4 \zeta_2 + g_4 g_1 \zeta_3 + g_1 g_2 \zeta_4 + g_1 g_2 g_3 g_4.
\end{aligned}$$

1.9.4 Полная интегрируемость при $\alpha = 0$

Покажем теперь, что в случае $\alpha = 0$ одевающая цепочка (1.96) интегрируема по Лиувиллю при нечетном n. Для доказательства интегрируемости нам потребуется ввести для нее вторую гамильтонову структуру и воспользоваться идеей схемы Ленарда–Магри. Случай четного n несколько сложнее, и мы не будем заниматься его рассмотрением.

Нетрудно проверить, что в случае нечетного n и при условии $\alpha = 0$ одевающая цепочка (1.96) переписывается в терминах переменных $g_j = f_j + f_{j+1}$ в следующем виде:

$$g_j' = g_j (g_j - g_{j+1} + g_{j+2} - \dots + g_{j+n-1}) + \beta_j - \beta_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}_n. \tag{1.102}$$

Тогда скобка Пуассона (1.97) принимает вид

$$\{g_j, g_{j\pm1}\}_1 = -\{g_{j\pm1}, g_j\}_1 = \pm 1, \quad \{g_i, g_j\}_1 = 0 \quad \text{при } |i - j| > 1, \tag{1.103}$$

где знаки всюду выбираются согласованным образом.

Задача 1.21. *Проверить, что равенства*

$$\{g_i, g_j\}_2 = (-1)^{j-i (mod\, n)} g_i g_j \ \text{при } j \neq i, i \pm 1, \quad \{g_j, g_{j+1}\}_2 = g_j g_{j\pm1} + \beta_{j+1}, \tag{1.104}$$

дополненные условием кососимметричности, задают пуассонову структуру на пространстве переменных g_j.

Предложение 1.30. *Если n нечетно, то при условии $\alpha = 0$ система (1.102) является гамильтоновой с гамильтонианом $H_2 = g_1 + g_2 + \dots g_n$ относительно скобки Пуассона (1.104).*

Доказательство.

Как обычно, нам нужно показать, что $g_j' = \{H_2, g_j\}_2$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$. Действительно,

$$\{H_2, g_j\}_2 = \sum_{i=1}^{n} \{g_i, g_j\}_2 = \sum_{i \neq j, j\pm 1} (-1)^{j-i (\operatorname{mod} n)} g_i g_j + g_{j-1} g_j + \beta_j - g_j g_{j+1} - \beta_{j+1} =$$

$$= g_j(g_j - g_{j+1} + g_{j+2} - \cdots + g_{j+r-1}) + \beta_j - \beta_{j+1} = g_j'$$

в силу нечетности n и равенств (1.102), $\mathfrak{Q.e.d.}$

Теорема 1.17. *Одевающая цепочка (1.96) нечетной длины n интегрируема по Лиувиллю при $\alpha = 0$.*

Доказательство.

Из формулы (1.100) немедленно вытекает, что если n — степень многочлена $\tau(\lambda)$, являющегося производящей функцией для первых интегралов одевающей цепочки нечетной длины n, то равна $n = 2r + 1$. Из явного вида (1.100) следует, что при нечетном n все интегралы $I_0, I_1, \ldots, I_r$ независимы. Кроме того, легко заметить, что гамильтониан $H_2 = g_1 + g_2 + \cdots + g_n$ является функцией Казимира для скобки Пуассона (1.103). Поскольку ранг этой пуассоновой структуры равен $n - 1$, функция H_2 является ее единственным с точностью до пропорциональности аннулятором. Таким образом, соответствующий симплектический лист является $2r$-мерным подмногообразием, т.е. для полной интегрируемости нам нужно ровно r независимых первых интегралов в инволюции.

Несложно проверить, имея явную формулу (1.100), что при нечетном n интеграл I_r равен гамильтониану H_2. Воспользовавшись разновидностью схемы Ленарда–Магри (в Предложении (1.24) мы двигались с одной стороны, стартуя с двух гамильтонианов, а в данном случае, у нас функции Казимира двух скобок Пуассона будут находиться на двух концах цепочки Ленарда–Магри), покажем, что интегралы $I_0, I_1, \ldots, I_{r-1}$ находятся в инволюции относительно скобки Пуассона (1.103). Прямыми вычислениями проверяется, что функция

$$I_0 = (-1)^n \tau(\lambda)|_{\lambda=0} = -\prod_{j=1}^{n} \left(1 + \beta_{j+1} \frac{\partial^2}{\partial g_j \partial g_{j+1}}\right) \left(\prod_{i=1}^{n} g_i\right)$$

является аннулятором скобки Пуассона (1.104). Пусть ω и $\tilde{\omega}$ — пуассоновы бивекторы для скобок (1.103) и (1.104) соответственно; тогда из формул (1.103,1.104) следует, что для произвольного $\varepsilon \in \mathbb{R}$ бивектор $\omega_\varepsilon = \tilde{\omega} - \omega$ задает пуассонову структуру, поскольку он соответствует замене параметров $\beta_j \to \tilde{\beta}_j = \beta_j + \varepsilon$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$ в формуле (1.104). А это означает, что производящая функция $\tilde{\tau}(0) = \tau(\varepsilon)$, соответствующая одевающей цепочке (1.96) с параметрами $\tilde{\beta}_j$, является функцией Казимира для пуассоновой структуры ω_ε. Таким образом, для произвольной функции $F(g_1, g_2, \ldots, g_n$ имеет место равенство

$$0 = \{\tau(\varepsilon), F\}_\varepsilon = \sum_{i,j=1}^{n} \omega_\varepsilon^{ij} \frac{\partial}{\partial g_i}(-\tau(\varepsilon)) \frac{\partial F}{\partial g_j} = \sum_{i,j=1}^{n} (\tilde{\omega}^{ij} - \varepsilon \omega^{ij}) \frac{\partial}{\partial g_i}(I_0 + \varepsilon I_1 + \cdots + \varepsilon^r I_r) \frac{\partial F}{\partial g_j} =$$

$$= -\varepsilon^{r+1} \sum_{i,j=1}^{n} \omega^{ij} \frac{\partial I_r}{\partial g_i} \frac{\partial F}{\partial g_j} + \varepsilon^r \left(\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{\omega}^{ij} \frac{\partial I_r}{\partial g_i} \frac{\partial F}{\partial g_j} - \sum_{i,j=1}^{n} \omega^{ij} \frac{\partial I_{r-1}}{\partial g_i} \frac{\partial F}{\partial g_j} \right) + \cdots +$$

$$+ \varepsilon \left(\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{\omega}^{ij} \frac{\partial I_1}{\partial g_i} \frac{\partial F}{\partial g_j} - \sum_{i,j=1}^{n} \omega^{ij} \frac{\partial I_0}{\partial g_i} \frac{\partial F}{\partial g_j} \right) + \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{\omega}^{ij} \frac{\partial I_0}{\partial g_i} \frac{\partial F}{\partial g_j} =$$

$$= -\varepsilon^{r+1} \{I_r, F\}_1 + \varepsilon^r (\{I_r, F\}_2 - \{I_{r-1}, F\}_1) + \cdots + \varepsilon (\{I_1, F\}_2 - \{I_0, F\}_1) + \{I_0, F\}_2.$$

Поскольку это равенство выполнено при всех $\varepsilon \in \mathbb{R}$, для каждого $s = 1, 2, \ldots, r$ имеем:

$$\{I_s, F\}_2 = \{I_{s-1}, F\}_1, \quad \{I_r, F\}_1 = \{I_0, F\}_2 = 0 \tag{1.105}$$

(последние два равенства нами были уже получены ранее, поскольку I_r и I_0 являются функциями Казимира рассматриваемых нами пуассоновых структур). Выберем теперь произвольные $0 < p < s < r$. Тогда, используя формулу (1.105) и кососимметричность скобок Пуассона, получаем:

$$\{I_s, I_p\}_1 = \{I_{s+1}, I_p\}_2 = -\{I_p, I_{s+1}\}_2 = -\{I_{p-1}, I_{s+1}\}_1 = \{I_{s+1}, I_{p-1}\}_1, \tag{1.106}$$

$$\{I_s, I_p\}_2 = -\{I_p, I_s\}_2 = -\{I_{p-1}, I_s\}_1 = \{I_s, I_{p-1}\}_1 = \{I_{s+1}, I_{p-1}\}_2. \tag{1.107}$$

Если $r - s \leqslant p$, то последовательным применением формулы (1.106) мы получим

$$\{I_s, I_p\}_1 = \{I_{s+1}, I_{p-1}\}_1 = \{I_{s+2}, I_{p-2}\}_1 = \cdots = \{I_r, I_{p-r+s}\}_1 = 0,$$

поскольку функция I_r является аннулятором первой скобки Пуассона. Если же $r - s > p$, то сперва применим формулу (1.105), а затем p раз последовательно формулу (1.107) мы получим:

$$\{I_s, I_p\}_1 = \{I_{s+1}, I_p\}_2 = \{I_{s+2}, I_{p-1}\}_2 = \cdots = \{I_{s+p+1}, I_0\}_2 = 0,$$

поскольку I_0 является функцией Казимира для второй скобки Пуассона (по предположению $r - s > p$, откуда $s + p + 1 \leqslant r$, и соответствующий интеграл существует).

Осталось показать, что интеграл I_0 находится в инволюции относительно первой скобки Пуассона со всеми остальными первыми интегралами, но это очевидно:

$$\{I_0, I_s\}_1 = -\{I_s, I_0\}_1 = \{I_{s+1}, I_0\}_2 = 0$$

для любого $s = 1, 2, \ldots, I_{r-1}$ поскольку I_0 является аннулятором второй скобки. Таким образом, мы построили необходимое инволютивное семейство первых интегралов, тем самым доказав полную интегрируемость одевающей цепочки, $\mathfrak{Q.e.d.}$

1.9.5 Связь с уравнениями Пенлеве

Глава 2

Теория КдФ: быстроубывающий случай

В первой главе мы занимались изучением интегрируемых систем в одномерном случае, т.е. систем обыкновенных дифференциальных уравнений, интегрируемых по Лиувиллю. Однако, в большинстве задач естествознания возникают не обыкновенные дифференциальные уравнения, а дифференциальные уравнения в частных производных. Как нетрудно понять, общее решение уравнения в частных производных, вообще говоря, имеет функциональный произвол — зависит от некоторого количества функциональных параметров (т.е. произвольных функций); поэтому, обычно изучают не сами уравнения, а какие-либо краевые задачи для них. Тем не менее, в двумерном случае, наподобие одномерному случаю, тоже хочется среди всех уравнений выделить класс *интегрируемых*, т.е. таких уравнений, что их решения, в каком-то смысле, ведут себя регулярным образом. Существуют различные подходы к интегрируемости уравнений в частных производных (интегрируемость методом обратной задачи, интегрируемость с помощью замен переменных или преобразования Фурье, интегрируемость по Дарбу, наличие солитонных решений, и т.п.), которые оказываются удобными для различных классов уравнений. Мы не можем здесь описать все многообразие известных на сегодняшний день интегрируемых уравнений, а ограничимся одним, но наиболее интересным и характерным примером — *уравнением Кортевега-де Фриза* (КдФ), и на этом примере продемонстрируем различные подходы к интегрируемости эволюционных уравнений и проведем аналогии с интегрируемостью гамильтоновых систем в одномерном случае.

При изложении теории КдФ мы во многом будет следовать книгам [10, 17].

2.1 Метод Фурье

Прежде чем переходить собственно к изучению уравнения Кортевега-де Фриза, которое является нелинейным уравнением в частных производных, обсудим один метод интегрирования линейных уравнений в частных производных, который, в некотором смысле, является линейным аналогом метода обратной задачи рассеяния, который мы будем подробно излагать ниже.

Определение 2.1. Уравнения в частных производных вида

$$u_t = F(u, u_x, u_{xx}, \dots)$$

называются *эволюционными*.

Предложение 2.1. *Решение задачи Коши $u(x,0) = u_0(x)$, где $u_0 \in L_2(\mathbb{R})$, для линейного эволюционного уравнения с постоянными коэффициентами*

$$u_t = a_n u_x^{(n)} + a_{n-1} u_x^{(n-1)} + \dots + a_1 u_x + a_0 u$$

имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\big(-i\lambda x + ((-i\lambda)^n a_n + (-i\lambda)^{n-1} a_{n-1} + \dots + (-i\lambda) a_1 + a_0)t\big)\, c(\lambda) d\lambda, \quad (2.1)$$

где

$$c(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} u_0(x) dx. \quad (2.2)$$

Доказательство.

Применим преобразование Фурье $\mathcal{F}$ к исходному линейному уравнению:

$$v(x,t) = \mathcal{F}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} u(x,t) dx.$$

Воспользовавшись тем, что $\mathcal{F}(u^{(k)}) = (-i\lambda)^k \mathcal{F}(u)$, приходим к следующему уравнению:

$$v_t(\lambda,t) = \big((-i\lambda)^n a_n + (-i\lambda)^{n-1} a_{n-1} + \dots + (-i\lambda) a_1 + a_0\big)\, v(\lambda,t).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$v_t(\lambda,t) = c(\lambda) \exp\big(((-i\lambda)^n a_n + (-i\lambda)^{n-1} a_{n-1} + \dots + (-i\lambda) a_1 + a_0)t\big),$$

где константа интегрирования $c(\lambda) = v(\lambda,t)$ является фурье-образом начальных данных:

$$c(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} u_0(x) dx.$$

Применяя теперь обратное преобразование Фурье, получаем формулу (2.1), $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 2.1. Легко заметить, что метод преобразования Фурье является аналогом описанного в первой Главе на примере цепочки Тоды метода обратной задачи, поскольку используемая нами схема выглядит так: сперва мы преобразуем начальные данные с помощью преобразования Фурье, затем описываем эволюцию преобразованной системы, а затем совершаем обратное преобразование. В дальнейшем нам предстоит обобщить этот метод на случае одного нелинейного уравнения в частных производных — *уравнения Кортевега-де Фриза*.

Пример 2.1. Рассмотрим *линеаризованное уравнение Кортевега–де Фриза*

$$u_t + u_{xxx} = 0.$$

Согласно Предложению 2.1 решение задачи Коши для него может быть записано следующим образом:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} c(\lambda) e^{-i\lambda x - i\lambda^3 t} d\lambda,$$

где константа интегрирования $c(\lambda)$ определяется формулой (2.2).

2.2 Иерархия КдФ

2.2.1 Изоспектральная деформация оператора Шредингера

Рассмотрим одномерный оператор Шредингера

$$\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + u$$

и предположим, что его потенциал $u = u(x,t)$ дополнительно зависит от некоторого параметра t, который естественно интерпретировать как время, т.е. будем считать, что наш потенциал каким-то образом изменяется со временем. Зададимся следующим вопросом: при каком условии на потенциал такая деформация оператора Шредингера является изоспектральной, т.е. его дискретный спектр не зависит от времени t. Предположим дополнительно, что эволюция со временем соответствующих собственных функций ψ подчиняется уравнению $\psi_t = \mathcal{A}\psi$, где $\mathcal{A}$ — некоторый линейный дифференциальный оператор по переменной x, коэффициенты которого зависят от переменных x и t. Тогда, дифференцируя по t равенство $\mathcal{L}\psi = \lambda\psi$, получаем:

$$\mathcal{L}_t\psi + \mathcal{L}\psi_t - \lambda\psi_t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\psi_{xxt} + u_t\psi + u\psi_t - \lambda\psi_t = 0.$$

Теперь, пользуясь равенством $\psi_t = \mathcal{A}\psi$, перепишем последнее уравнение в виде

$$\mathcal{L}\mathcal{A}\psi + u_t\psi = \lambda\mathcal{A}\psi,$$

откуда немедленно получаем, что потенциал u должен удовлетворять следующему уравнению:

$$u_t = [\mathcal{A}, \mathcal{L}]. \tag{2.3}$$

Замечание 2.2. Поскольку в левой части уравнения (2.3) стоит функция, а в правой — коммутатор двух дифференциальных операторов, это означает, что этот коммутатор должен быть оператором нулевого порядка.

Предложение 2.2. *Если изоспектральная деформация собственной функции задается дифференциальным оператором $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$ первого порядка, то потенциал имеет вид $u(x,t) = v(x + \alpha t)$, где $\alpha = \mathrm{const}$.*

Доказательство.

Пусть $\mathcal{A}_1 = \alpha\frac{d}{dx} + \beta$. Тогда коммутатор имеет вид

$$\begin{aligned}[\mathcal{A}_1, \mathcal{L}] = -\alpha\frac{d^3}{dx^3} + \alpha u\frac{d}{dx} + \alpha u_x - \beta\frac{d^2}{dx^2} + \beta u +& \\ + \alpha\frac{d^3}{dx^3} + 2\alpha_x\frac{d^2}{dx^2} + \alpha_{xx}\frac{d}{dx} + \beta\frac{d^2}{dx^2} + 2\beta_x\frac{d}{dx} + \beta_{xx} - \alpha u\frac{d}{dx} - \beta u &= \\ = 2\alpha_x\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + (\alpha_{xx} + 2\beta_x)\frac{d}{dx} + \alpha u_x + \beta_{xx}&.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Поскольку полученный оператор должен иметь нулевой порядок, имеем:

$$\begin{cases} \alpha_x = 0 \\ \alpha_{xx} + 2\beta_x = 0 \end{cases}.$$

Таким образом, $\alpha = \mathrm{const}$ и $\beta_x = 0$. Кроме того, $u_t = [\mathcal{A}_1, \mathcal{L}] = \alpha u_x + \beta_{xx} = \alpha u_x$; таким образом, потенциал u удовлетворяет уравнению

$$u_t = \alpha u_x,$$

общее решение которого имеет вид $u(x,t) = v(x + \alpha t)$, v — произвольная функция, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Легко видеть, что описанная выше изоспектральная деформация оператора Шредингера тривиальна — потенциал лишь сдвигается со временем. Попробуем отыскать примеры нетривиальных изоспектральных деформаций.

Задача 2.1. Описать изоспектральные потенциалы оператора Шредингера, для которых эволюция собственной функции задается оператором второго порядка.

Пусть теперь эволюция собственной функции задается оператором третьего порядка. Для сокращения вычислений мы не будем решать задачу описания всех таких изоспектральных потенциалов в общем виде, а рассмотрим ее частный случай, когда оператор $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_3 = \left(\alpha \frac{d}{dx}\right)^3 + \beta \frac{d}{dx} + \gamma. \tag{2.5}$$

В этом случае аналогично разобранному выше случаю находим, что

$$[\mathcal{A}_3, \mathcal{L}] = 2\alpha_x \left(\frac{d}{dx}\right)^4 + \alpha_{xx} \left(\frac{d}{dx}\right)^3 + (3\alpha u_x + 2\beta_x) \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + (3\alpha u_{xx} + \beta_{xx} + 2\gamma_x) \frac{d}{dx} + \alpha u_{xxx} + \beta u_x + \gamma_{xx},$$

откуда, приравнивая к нулю коэффициенты при ненулевой степени $\frac{d}{dx}$, получаем, что

$$\alpha_x = 0, \quad \beta = -\frac{3\alpha}{2} u + c_1(t), \quad \gamma = -\frac{3\alpha}{4} u_x + c_2(t),$$

где c_1 и c_2 — произвольные функции одной переменной, возникающие при интегрировании. При этом функция u будет удовлетворять следующему эволюционному уравнению:

$$\frac{\alpha}{4} u_{xxx} + \left(c_1 - \frac{3\alpha}{2} u\right) u_x = u_t.$$

Полагая теперь для удобства $c_1 = 0$ (этого можно добиться подходящей заменой переменных) и $\alpha = -4$, приходим к так называемому *уравнению Кортевега-де Фриза*:

$$u_t + u_{xxx} - 6 u u_x = 0. \tag{2.6}$$

Таким образом, уравнение КдФ задает изоспектральную деформацию одномерного оператора Шредингера. С другой стороны, как мы увидели, уравнение КдФ может быть записано в форме Лакса

$$\mathcal{L}_t = u_t = [\mathcal{A}, \mathcal{L}], \tag{2.7}$$

что позволяет, в принципе, находить его интегралы движения: в самом деле, дискретный спектр оператора $\mathcal{L}$ не изменяется при деформации потенциала оператора Шредингера в соответствии с уравнением КдФ. В дальнейшем мы используем эту связь между оператором Шредингера и уравнением Кортевега-де Фриза для того, чтобы проинтегрировать это уравнение методом обратной задачи. Однако, для этого придется изучить теорию рассеяния для оператора Шредингера.

Замечание 2.3. Рассмотрение изоспектральных деформаций оператора Шредингера, при которых эволюция собственной функции задаются дифференциальными операторами более высокого порядка, приводит к иерархии эволюционных уравнений, называемой *иерархией КдФ*.

Замечание 2.4. Мы привели одну из наиболее частных форм записи (2.6) уравнения КдФ: легко видеть, что тривиальными заменами вида

$$u \mapsto \tilde{u} = \alpha u, \quad x \mapsto \tilde{x} = \beta x, \quad t \mapsto \tilde{t} = \gamma t,$$

где α, β, γ — некоторые константы, можно добиться произвольных коэффициентов в уравнении КдФ.

Задача 2.2. Выписать в явном виде следующий за уравнением (2.6) член иерархии КдФ.

Задача 2.3. Показать, что простейшая изоспектральная деформация одномерного *дискретного оператора Шредингера*

$$\mathcal{L} = \sqrt{A_n} T^{-1} + B_n + \sqrt{A_{n+1}} T,$$

где $T : \psi_n \mapsto \psi_{n+1}$ — оператор сдвига на дискретной прямой, задается *спаренной цепочкой Вольтерра*,

$$\begin{cases} (A_n)_t = A_n(B_{n-1} - B_n) \\ (B_n)_t = B_n(A_{n+1} - A_n) \end{cases},$$

которая, в свою очередь, сводится к цепочке Тоды.

2.2.2 Солитонное решение уравнения КдФ

Будем искать решение уравнения Кортевега-де Фриза в виде *бегущей волны*:

$$u(x,t) = v(x - ct),$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная, отвечаюшая за скорость распространения волны. Легко видеть, что в этом случае функция v удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$v''' - cv' - 6vv' = 0,$$

которое легко интегрируется один раз:

$$v'' - 3v^2 - cv = \alpha = \mathrm{const}\,.$$

Для того, чтобы проинтегрировать полученное уравнение еще раз, надо сперва домножить его на v':

$$v''v' - 3v^2v' - cvv' - \alpha v' = \left(\frac{(v')^2}{2} - v^3 - \frac{c}{2}v^2 - \alpha v \right)'.$$

В итоге приходим к уравнению

$$\frac{(v')^2}{2} - v^3 - \frac{c}{2}v^2 - \alpha v = \beta = \mathrm{const}, \tag{2.8}$$

которое легко сводится к известному *уравнению Вейерштрасса*

$$(y')^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3.$$

Поэтому, общее решение полученного уравнения (2.8) выражается через $\wp$-функцию Вейерштрасса (см. [3]). Мы не будем обсуждать свойства общего решения (подробности можно найти в книге [16], стр. 122), а рассмотрим лишь один важный частный случай $\alpha = \beta = 0$. В этом случае уравнение (2.8) легко интегрируется в элементарных функциях. В самом деле, разделение переменных дает

$$x - ct = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dv}{\sqrt{v^3 + \frac{c}{2}v^2}}.$$

Легко видеть, что при $\alpha = \beta = 0$ уравнение (2.8) имеет ограниченные вещественные решения лишь если $-\frac{c}{2} \leqslant v \leqslant 0$, поэтому ограничимся рассмотрением этого случая. Вычисляя интеграл, и пользуясь тем, что $v \leqslant 0$, получаем, что

$$x - ct = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dv}{v\sqrt{v+\frac{c}{2}}} = \mp\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left|\frac{z+\sqrt{c/2}}{z-\sqrt{c/2}}\right| - \delta, \quad \text{где } z = \sqrt{v+\frac{c}{2}},$$

а δ — константа интегрирования, отвечающая за фазу. Теперь, выбирая в последнем равенстве знак “плюс” и разрешая его относительно переменной z, имеем:

$$z = \sqrt{\frac{c}{2}}\,\mathrm{th}\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct+\delta)\right),$$

откуда

$$v = -\frac{c}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct+\delta)\right)}. \tag{2.9}$$

Найденное решение (2.9) уравнения Кортевега-де Фриза называют *односолитонным.* Легко видеть, что оно представляет собой бегущую уединенную волну (есть взять его с противоположным знаком) амплитуды $c/2$, двигающуюся со скоростью c.

Замечание 2.5. Уравнение Кортевега-де Фриза описывает, в частности, движение больших масс воды на небольшой глубине. Первым задокументированным свидетельством появления солитона является наблюдение Джона Скотта Рассела, который в 1834 году обратил внимание на то, что от баржи, резко остановившейся в достаточно мелком канале, внезапно отделилась волна, имеющая четкую форму водяного холма, и продолжила движение по каналу, не изменяя при этом ни своей формы, ни скорости. Он был настолько удивлен столь необычным поведением этой волны, что, сев на лошадь, бросился ее догонять. Волна все еще была различима более чем через милю. Солитоны замечательны тем, что при движении они практически не теряют своей энергии; более того, при столкновении друг с другом они сохраняют свою форму и скорости (происходит лишь сдвиг фаз).

Замечание 2.6. Наличие солитонных решений у нелинейного уравнения является одним из признаков, указывающих на интегрируемость рассматриваемого уравнения.

2.2.3 Подход Гельфанда–Дикого

В предыдущем параграфе мы показали, как для заданного оператора Шредингера $\mathcal{L}$ подобрать оператор $\mathcal{A}$, задающий его изоспектральную деформацию; при этом операторы должны удовлетворять уравнению (2.7). Легко видеть, что для взятого наугад оператора $\mathcal{A}$ соотношение (2.7) не задает деформацию оператора Шредингера, поскольку в правой его части, вообще говоря, стоит дифференциальный оператор ненулевого порядка. Уравнение (2.7) эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений на коэффициенты оператора $\mathcal{A}$, и, вообще говоря, неясно, почему для оператора произвольного порядка будет существовать нетривиальное решение. Нам удалось найти явно одно нетривиальное решение, приводящее к уравнению КдФ, а теперь мы приведем общий подход, восходящий к работе Гельфанда и Дикого [6], который позволяет построить всю иерархию КдФ.

Рассмотрим оператор дифференцирования $\partial = \frac{\partial}{\partial x}$, действующий на функциях $v = v(x,t)$, и введем формальный обратный к нему ∂^{-1} так, чтобы для произвольной функции v было выполнено равенство $\partial\partial^{-1}v = v$. Тогда, поскольку оператор ∂ удовлетворяет тождеству Лейбница, должны быть выполнены следующие равенства:

$$\partial v\partial^{-1} = v + v_x\partial^{-1}, \quad \partial v_x\partial^{-2} = v_x\partial^{-1} + v_{xx}\partial^{-2}, \quad \partial v_{xx}\partial^{-3} = v_{xx}\partial^{-2} + v_{xxx}\partial^{-3}, \ldots$$

Отсюда следует, что

$$\partial v\partial^{-1} - \partial v_x\partial^{-2} + \partial v_{xx}\partial^{-3} - \dots = v + v_x\partial^{-1} - v_x\partial^{-1} - v_{xx}\partial^{-2} + v_{xx}\partial^{-2} + v_{xxx}\partial^{-3} - \dots = v;$$

применяя теперь оператор ∂^{-1} к последнему равенству, получаем:

$$\partial^{-1}v = v\partial^{-1} - v_x\partial^{-2} + v_{xx}\partial^{-3} - \dots$$

Попытаемся теперь формально разложить квадратный корень из оператора $-\mathcal{L}$ по степеням ∂: пусть

$$\mathcal{B} = \partial + v_{-1}\partial^{-1} + v_{-2}\partial^{-2} + \dots;$$

тогда имеем:

$$\partial^2 - u = \left(\partial + v_{-1}\partial^{-1} + v_{-2}\partial^{-2} + \dots\right)\left(\partial + v_{-1}\partial^{-1} + v_{-2}\partial^{-2} + \dots\right) =$$
$$= \partial^2 + 2v_{-1} + \left(2v_{-2} + v_{-1,x}\right)\partial^{-1} + \left(2v_{-3} + v_{-2,x} + v_{-1}^2\right)\partial^{-2} + \dots$$

Таким образом, приравнивая к нулю коэффициенты при отрицательных степенях ∂, получаем следующую бесконечную систему уравнений:

$$v_{-1} = -\frac{u}{2}, \quad v_{-2} = -\frac{v_{-1,x}}{2} = \frac{u_x}{4}, \quad v_{-3} = -\frac{1}{2}\left(v_{-1}^2 + v_{-2,x}\right) = -\frac{1}{8}\left(u^2 + u_{xx}\right), \dots$$

Нам сейчас не очень важен конкретный вид коэффициентов разложения оператора $\mathcal{B} = (-\mathcal{L})^{1/2}$ — важно то, что эта система позволяет их последовательно находить в любом наперед заданном количестве, поскольку каждое следующее уравнение содержит ровно одну новую неизвестную и разрешимо относительно нее.

Определим полуцелые степени оператора $-\mathcal{L}$ следующим образом:

$$(-\mathcal{L})^{3/2} = \mathcal{B}(-\mathcal{L}), \quad (-\mathcal{L})^{5/2} = \mathcal{B}(-\mathcal{L})^2, \dots$$

Ясно, что все эти операторы коммутируют с оператором $\mathcal{L}$:

$$\left[(-\mathcal{L})^{\frac{2n-1}{2}}, \mathcal{L}\right] = 0. \tag{2.10}$$

Для псевдодифференциального оператора $\mathcal{K} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k\partial^k$ введем обозначения

$$\{\mathcal{K}\}_- = \sum_{k=-\infty}^{-1} v_k\partial^k, \quad \{\mathcal{K}\}_+ = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k\partial^k.$$

Тогда, поскольку $\mathcal{K} = \{\mathcal{K}\}_- + \{\mathcal{K}\}_+$, равенство (2.7) можно переписать следующим образом:

$$\left[\left\{(-\mathcal{L})^{\frac{2n-1}{2}}\right\}_-, \mathcal{L}\right] = -\left[\left\{(-\mathcal{L})^{\frac{2n-1}{2}}\right\}_+, \mathcal{L}\right]. \tag{2.11}$$

Легко заметить, что поскольку старшие коэффициенты операторов

$$\left\{(-\mathcal{L})^{\frac{2n-1}{2}}\right\}_- \circ \mathcal{L} \quad \text{и} \quad \mathcal{L} \circ \left\{(-\mathcal{L})^{\frac{2n-1}{2}}\right\}_-$$

совпадают (а это — коэффициенты при ∂), в левой части равенства (2.11) стоит псевдодифференциальный оператор порядка 0; при этом в правой части стоит дифференциальный оператор. Это возможно лишь если оба этих оператора являются дифференциальными порядка 0, т.е. не содержат ∂ и ∂^{-1}. Положим

$$\mathcal{A}_n = \left\{(-\mathcal{L})^{\frac{2n-1}{2}}\right\}_+;$$

поскольку это — дифференциальный оператор порядка $2n-1$ и при коммутировании с оператором Шредингера он дает оператор нулевого порядка, он является решением задачи об изоспектральных деформациях, с рассмотрения которой мы начали эту главу.

Определение 2.2. Иерархия эволюционных уравнений

$$u_t = [\mathcal{A}_n, \mathcal{L}]$$

называется *иерархией КдФ.*

Замечание 2.7. Легко видеть, что разобранный выше метод, связанный с поиском изоспектральных деформаций оператора Шредингера дает ту же иерархию, что и подход Гельфанда–Дикого, поскольку здесь мы находим в явном виде операторы нечетного порядка $\mathcal{A}_n$, которые при коммутировании с оператором $\mathcal{L}$ дают дифференциальный оператор нулевого порядка.

2.3 Теория рассеяния для оператора Шредингера

Цель двух следующих параграфов — интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза методом обратной задачи (мы уже использовали этот метод для интегрирования одномерной цепочки Тоды). Но прежде нам потребуются некоторые сведения о теории рассеяния. Мы не будем глубоко вдаваться в изучение теории одномерного оператора Шредингера, а лишь коснемся ее в той степени, в которой это необходимо для наших целей, т.е. для изучения интегрируемых уравнений.

На протяжении этого и следующего параграфов нам придется параллельно развивать два подхода к оператору Шредингера. С одной стороны, дифференциальное уравнение

$$-\psi'' + u\psi = \lambda\psi,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$ — некоторая постоянная, является линейным и потому, согласно классическим теоремам о существовании и единственности решения задачи Коши, они имеет двумерное пространство решений при достаточно "хорошем" потенциале $u(x)$. Эти решения мы в дальнейшем будем называть *формальными* ввиду следующего обстоятельства: говоря о спектральной теории оператора Шредингера, мы должны рассматривать только "настоящие" решения, т.е. решения, принадлежащие определенному функциональному пространству (иными словами, мы должны указать, на каком пространстве действует оператор Шредингера). Вообще говоря, нет никаких оснований полагать, что формальные решения, существование которых гарантируется теоремой существования и единственности, будут принадлежать этому функциональному пространству. Поэтому, всюду в дальнейшем, когда речь будет идти о "настоящей" спектральной теории мы будем предполагать, что рассматриваемый оператор Шредингера действует на гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$ квадратично интегрируемых функций на вещественной прямой. Кроме того, мы будем считать потенциал $u(x)$ гладким и достаточно быстро убывающим на бесконечности, т.е. будем предполагать, что выполнено условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|(1+|x|)dx < \infty. \tag{2.12}$$

Это условие, фактически, означает, что на бесконечности потенциал убывает быстрее, чем $\frac{1}{x^2}$.

Как мы видели на примере цепочки Тоды, интегрирование методом обратной задачи требует изучения спектральных свойств соответствующего оператора. Напомним основные понятия, связанные со спектром оператора. *Спектром* линейного оператора f в гильбертовом пространстве называется множество таких $\lambda \in \mathbb{C}$, что оператор $f - \lambda\,\mathrm{id}$ необратим. В конечномерном случае весь спектр *дискретен*, т.е. состоит из собственных значений. Однако, в бесконечномерном случае все обстоит гораздо сложнее, и спектр обычно подразделяют на несколько частей в зависимости от причины необратимости оператора $f - \lambda\,\mathrm{id}$. Говорят, что $\lambda \in \mathbb{C}$ является точкой *дискретного* (или *точечного*) *спектра*, если оператор $f - \lambda\,\mathrm{id}$ не является инъективным; в этом случае у оператора $f - \lambda\,\mathrm{id}$ есть нетривиальное ядро, состоящее из собственных векторов, а λ является его собственным значением. Если оператор $f - \lambda\,\mathrm{id}$ инъективен, но не является сюръективным, а его образ всюду плотен во всем гильбертовом пространстве, то λ называется точкой *непрерывного спектра*. Если же оператор $f - \lambda\,\mathrm{id}$ — инъективен, не является сюръективным, и замыкание его образа не совпадает со всем гильбертовым пространством, что λ называется точкой *остаточного спектра*.

Условие (2.12) накладывает жесткие ограничения на спектральные свойства оператора Шредингера. В силу самосопряженности оператора $\mathcal{L}$ его спектр вещественен, непрерывный спектр заполняет полуось $\lambda \geqslant 0$, остаточный — отсутствует, а дискретный спектр конечен и все его точки принадлежат отрицательной полуоси (см. [25], стр. 291-292).

2.3.1 Функции Йоста

Рассмотрим задачу на собственные значения оператора Шредингера:

$$\mathcal{L}\psi = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + u(x)\right)\psi = \lambda\psi \tag{2.13}$$

и положим $\lambda = k^2$, причем для определенности будем считать, что если $\lambda > 0$, то $k > 0$, а если $\lambda < 0$, то $\operatorname{Im} k > 0$. Параметр k в дальнейшем будет играть роль *спектрального параметра*. Прежде чем переходить к описанию данных рассеяния для оператора Шредингера, нам потребуется описать существование некоторых специальных решений уравнения (2.13), обладающих заданной асимптотикой. Для этого нам будет необходимо перейти от дифференциального уравнения (2.13) к интегральному, поскольку, в некотором смысле, с интегральными уравнениями работать проще, и соответствующая техника разработана существенно лучше. Это связано с тем, что дифференциальные операторы, как правило, не ограчинены, в том время как интегральные — ограничены (при некоторых не сильно обременительных органичениях).

Определение 2.3. Пусть $\mathcal{A}$ — одномерный линейный дифференциальный оператор. Тогда его *функцией Грина* называется любая функция[1] G такая, что выполнено равенство

$$\mathcal{A}G(x) = \delta(x),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Предложение 2.3. *Функции*

$$G_-(x) = \begin{cases} -\frac{\sin kx}{k}, & x < 0 \\ 0, & x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad G_+(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \frac{\sin kx}{k}, & x > 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

являются функциями Грина для оператора Шредингера $\frac{d^2}{dx^2} + \lambda$, *где* $k^2 = \lambda$.

Доказательство.

Дифференцируя функцию G_-, получаем:

$$G'_-(x) = \begin{cases} -\cos kx, & x < 0 \\ 0, & x \geqslant 0 \end{cases}.$$

[1] Вообще говоря, функция Грина может быть обобщенной функцией. Вопрос существования функции Грина далеко не тривиален, и мы оставим его в стороне. Для интересующего нас примера функция Грина будет предъявлена явно.

Поскольку функцию G'_- можно представить в виде

$$G'_-(x) = \theta(x) + \begin{cases} -\cos kx, & x < 0 \\ -1, & x \geqslant 0 \end{cases},$$

где θ — функция Хевисайда единичного скачка, имеем:

$$G''_-(x) = \delta(x) + \begin{cases} k \sin kx, & x < 0 \\ 0, & x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Подставляя теперь найденную вторую производную в уравнение Шредингера, убеждаемся в справедливости утверждения. Аналогично для функции G_+, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Предложение 2.4. *Произвольное формальное решение уравнения Шредингера*

$$\psi'' + \lambda\psi = u\psi$$

при $\lambda \neq 0$ *удовлетворяет интегральному уравнению*

$$\psi(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x-y)u(y)\psi(y)dy, \tag{2.15}$$

для подходящих констант c_1 *и* c_2, *где* $k^2 = \lambda$, *а* G *— произвольная функция Грина для уравнения Шредингера.*

Доказательство.

По определению функции Грина, имеем:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda\right)\left(\int\limits_{\infty}^{\infty} G(x-y)u(y)\psi(y)dy\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)u(y)\psi(y)dy = u(x)\psi(x).$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda\right)\left(c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx}\right) = 0,$$

$\mathfrak{Q.e.d.}$

Уравнение (2.15) представляет собой так называемое *уравнение Вольтерра второго рода*; можно показать, что такие интегральные уравнения однозначно разрешимы (при определенных предположениях на ядро интегрального оператора) и что их решения можно получить методом последовательных приближений (см., например, [20]). В данном случае, однако, требуется некоторая модификация стандартных методов (которая возможна ввиду достаточно быстрого убывания потенциала на бесконечности), поскольку в уравнении (2.15) интегрирование ведется по всей числовой оси. Мы не будем вдаваться в эти детали и отошлем читателя к книгам [19] или [30])

Предложение 2.5. *При любом действительном* $\lambda = k^2 \neq 0$ *уравнение Шредингера (2.13) имеет формальные решения со следующими асимптотическими свойствами:*

$$\psi_1(x,k) = e^{-ikx} + o(1),\ \psi_2(x,k) = e^{ikx} + o(1), \quad \text{при } x \to +\infty, \tag{2.16}$$

$$\varphi_1(x,k) = e^{-ikx} + o(1),\ \varphi_2(x,k) = e^{ikx} + o(1), \quad \text{при } x \to -\infty. \tag{2.17}$$

Каждое из этих формальных решений однозначно задается своей асимптотикой. При этом производные этих функций по переменной x *имеют следующую асимптотику:*

$$\psi'_1(x,k) = -ike^{-ikx} + o(1),\ \psi'_2(x,k) = ike^{ikx} + o(1), \quad \text{при } x \to +\infty, \tag{2.18}$$

$$\varphi'_1(x,k) = -ike^{-ikx} + o(1),\ \varphi'_2(x,k) = ike^{ikx} + o(1), \quad \text{при } x \to -\infty. \tag{2.19}$$

Доказательство.

Поскольку каждая из функций Грина G_- и G_+, определенных формулами (2.14), обнуляется при стремлении либо к $+\infty$, либо к $-\infty$, при надлежащем выборе констант c_1 и c_2 формула (2.15) дает нам требуемые формальные решения. В самом деле, выбирая в качестве функции Грина одну из функций G_+ или G_-, и полагая одну из констант c_1 и c_2 равной единице, а другую — нулю, мы получим функции, удовлетворяющие следующим интегральным уравнениям:

$$\psi_1(x,k) = e^{-ikx} + \int\limits_x^{+\infty} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y)\psi_1(y,k)dy, \quad \psi_2(x,k) = e^{ikx} + \int\limits_x^{+\infty} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y)\psi_2(y,k)dy, \tag{2.20}$$

$$\varphi_1(x,k) = e^{-ikx} - \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y)\varphi_1(y,k)dy, \quad \varphi_2(x,k) = e^{ikx} - \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y)\varphi_2(y,k)dy. \tag{2.21}$$

Легко видеть, что требуемое асимптотическое поведение немедленно вытекает из формул (2.20,2.21). Однозначность задания решений своей асимптотикой следует из однозначной разрешимости уравнения (2.15), а асимптотические представления (2.18,2.19) получаются дифференцированием формул (2.20,2.21) по переменной x, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Определение 2.4. Построенные выше решения ψ_2 и φ_1 иногда называют *функциями Йоста.*

2.3.2 Данные рассеяния

Как мы видели на примере цепочки Тоды, при интегрировании уравнений методом обратной задачи нам прежде всего необходимо выбрать *данные рассеяния*, с помощью которых можно закодировать всю спектральную информацию о соответствующем операторе Лакса. Определим данные рассеяния для оператора Шредингера.

Рассмотрим спектральную задачу (2.13) и при каждом вещественном $k \neq 0$ фиксируем в пространстве формальных решений уравнения Шредингера два базиса $\{\psi_1, \psi_2\}$ и $\{\varphi_1, \varphi_2\}$, состоящих из функций (2.16,2.17), которые заданы своей асимптотикой на $\pm\infty$. Нас в дальнейшем будет интересовать матрица перехода $T(k)$ от базиса $\{\psi_1(x,k), \psi_2(x,k)\}$ к базису $\{\varphi_1(x,k), \varphi_2(x,k)\}$. Положим

$$T(k) = \begin{pmatrix} a(k) & c(k) \\ b(k) & d(k) \end{pmatrix}.$$

Замечание 2.8. Поскольку мы изучаем вещественный оператор $\mathcal{L}$ и $\lambda = k^2$, в рамках нашей исходной задачи мы можем считать, что параметр k является либо положительным вещественным, либо чисто мнимым с положительной мнимой частью. Если $k \neq 0$ вещественно, то определены функции $a(k), b(k), c(k), d(k)$, которые, вообще говоря, могут принимать произвольные комплексные значения. В такой ситуации для привлечения аппарата комплексного анализа нам необходимо несколько расширить наш первоначальный подход и рассмотреть аналитическое продолжение этих функций на комплексную плоскость (на ту ее часть, куда это возможно), т.е. разрешить (чисто формально) параметру k принимать произвольные комплексные значения. Такой подход позволит нам сперва изучить аналитические свойства этих функций, а потом сделать интересующие нас выводы о теории рассеяния, обратно ограничившись теми значениями параметра k, которые имеют смысл в рамках первоначальной спектральной задачи в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Функция $a(k)$ иногда называется *амплитудой рассеяния.*

Лемма 2.1. *Вронскиан $W(\theta_1, \theta_2)$ любых двух формальных решений уравнения Шредингера (2.13) не зависит от x.*

Доказательство.

Пусть θ_1 и θ_2 — произвольные решения уравнения (2.13); тогда

$$\frac{d}{dx}W(\theta_1, \theta_2) = \theta_1'\theta_2' + \theta_1\theta_2'' - \theta_2'\theta_1' - \theta_1''\theta_2 = (u-\lambda)\theta_1\theta_2 - (u-\lambda)\theta_1\theta_2 = 0,$$

Q.e.d.

Предложение 2.6. *При любых вещественных $k \neq 0$ матрица перехода $T(k)$ псевдоунитарна (т.е. $\bar{c}(k) = b(k)$ и $\bar{d}(k) = a(k)$) и имеет определить, равный единице.*

Доказательство.

Ввиду вещественности потенциала и спектрального параметра k имеют место следующие соотношения:

$$\varphi_1(k, x) = \bar{\varphi}_2(x, k), \quad \psi_1(x, k) = \bar{\psi}_2(x, k). \tag{2.22}$$

В терминах элементов матрицы $T(k)$ это означает, что $\bar{c}(k) = b(k)$, $\bar{d}(k) = a(k)$. Согласно лемме, вронскиан любых двух решений уравнения Шредингера не зависит от x. Поэтому нам достаточно вычислить его асимптотическое значение:

$$W(\varphi_1(x,k), \varphi_2(x,k)) \equiv \lim_{x\to+\infty} W(\varphi_1(x,k), \varphi_2(x,k)) = \lim_{x\to+\infty} W(e^{-ikx}, e^{ikx}) = 2ik;$$

аналогично, $W(\psi_1(x,k), \psi_2(x,k)) \equiv 2ik$. Это означает, что

$$\begin{aligned} W(\varphi_1(x,k), \varphi_2(x,k)) &= (a(k)\psi_1(x,k) + b(k)\psi_2(x,k))(\bar{b}(k)\psi_{1,x}(x,k) + \bar{a}(k)\psi_{2,x}(x,k)) - \\ &- (\bar{b}(k)\psi_1(x,k) + \bar{a}(k)\psi_x(x,k))(a(k)\psi_{1,x}(x,k) + b(k)\psi_{2,x}(x,k)) = \\ &= \left(|a(k)|^2 - |b(k)|^2\right) W(\psi_1(x,k), \psi_2(x,k)), \end{aligned}$$

откуда

$$\det T(k) = |a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1, \tag{2.23}$$

Q.e.d.

При вещественном k матрица $T(k)$ полностью определяется коэффициентами $a(k)$ и $b(k)$, а физический смысл имеют величины

$$r(k) = \frac{b(k)}{a(k)} \quad \text{и} \quad t(k) = \frac{1}{a(k)},$$

называемые *коэффициентом отражения* и *коэффициентом прохождения* соответственно, которые, определены, если амплитуда рассеяния $a(k)$ не обращается в нуль. Нетрудно проверить, что из (2.23) немедленно вытекает, что эти коэффициенты связаны соотношением

$$|r(k)|^2 + |t(k)|^2 = 1.$$

Предложение 2.7. *Если $k \neq 0$ вещественно, то функции Йоста удовлетворяют следующим соотношениям по переменной k:*

$$\bar{\varphi}_j(x, -k) = \varphi_j(x, k), \quad \bar{\psi}_j(x, -k) = \psi_j(x, k), \tag{2.24}$$

где $j = 1, 2$. Кроме того, имеют место следующие тождества:

$$a(-k) = \bar{a}(k), \quad b(-k) = \bar{b}(k), \quad r(-k) = \bar{r}(k). \tag{2.25}$$

Доказательство.

Соотношения (2.24) очевидны ввиду того, что функции Йоста однозначно задаются своими асимптотиками. Далее, записывая равенство

$$\varphi_1(x,k) = a(k)\psi_1(x,k) + b(k)\psi_2(x,k),$$

сопрягая его и подставляя туда $-k$, получаем:

$$\bar{\varphi}_1(x,-k) = \bar{a}(-k)\bar{\psi}_1(x,-k) + \bar{b}(-k)\bar{\psi}_2(x,-k).$$

Теперь, применяя уже доказанное равенство (2.24), приходим к (2.25), $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 2.9. По заданному изначально оператору Шредингера мы можем построить спектральные данные

$$\{a(k), b(k) \,|\, k \in \mathbb{R},\, k \neq 0\},$$

которые полностью определяют матрицу перехода. Тем не менее, нетрудно заметить, что эти спектральные данные несколько избыточны. В самом деле, во-первых, они связаны соотношением (2.23), а, во-вторых, элементарный подсчет числа свободных параметров говорит о том, что между этими спектральными данными есть еще соотношения: спектральная теория оператора Шредингера определяется одной вещественной функцией $u(x)$, а спектральные данные представляют собой произвол в две комплексных функции, которые связаны одним вещественным соотношением (2.23). Для нахождения недостающих связей нам потребуется изучить свойства введенных спектральных данных. Кроме этого, поскольку плоскость переменной k двулистно накрывает плоскость переменной λ, при изучении спектральной теории можно считать, что $k > 0$ в случае непрерывного спектра и что $\operatorname{Im} k > 0$ для дискретного.

Прежде чем переходить к изучению свойств спектральных данных, рассмотрим один важный пример.

Пример 2.2. Рассмотрим недеформированный односолитонный потенциал

$$u(x) = -\frac{2\alpha^2}{\operatorname{ch}^2(\alpha x)},$$

где $\alpha = \sqrt{c}/2$, см. (2.9). Построим данные рассеяния для этого потенциала. Функцию Йоста $\varphi = \varphi_1$ будем искать в виде

$$\varphi(x,k) = \frac{C - \operatorname{th}(\alpha x)}{C+1} e^{-ikx}, \quad \text{где } C = C(k) = \mathrm{const}\,.$$

Такой анзац обусловлен, во-первых, желанием получить члены вида $e^{\pm\alpha x}$, а, во-вторых, необходимостью получить нужную асимптотику на бесконечности. Дифференцирование дает

$$\varphi_x(x,k) = -\left(\frac{\alpha}{(C+1)\operatorname{ch}^2(\alpha x)} + ik\frac{C - \operatorname{th}(\alpha x)}{C+1}\right) e^{-ikx},$$

$$\varphi_{xx}(x,k) = \left(\frac{2\alpha^2 \operatorname{sh}(\alpha x)}{(C+1)\operatorname{ch}^3(\alpha x)} + 2ik\frac{\alpha}{(C+1)\operatorname{ch}^2(\alpha x)} - k^2\frac{C - \operatorname{th}(\alpha x)}{C+1}\right) e^{-ikx}.$$

Подставляя теперь функцию φ в уравнение Шредингера, получаем:

$$\frac{2\alpha^2 \operatorname{sh}(\alpha x)}{(C+1)\operatorname{ch}^3(\alpha x)} + 2ik\frac{\alpha}{(C+1)\operatorname{ch}^2(\alpha x)} + \frac{2\alpha^2}{\operatorname{ch}^2(\alpha x)} \cdot \frac{C - \operatorname{th}(\alpha x)}{C+1} = 0,$$

откуда находим, что $C(k) = -\frac{ik}{\alpha}$. Тогда имеем:

$$\varphi(x,k) = \frac{C-1}{C+1}e^{-ikx} + o(1) \quad \text{при } x \to +\infty,$$

откуда получаем, что

$$a(k) = \frac{C-1}{C+1} = \frac{\alpha + ik}{\alpha - ik}, \quad b(k) \equiv 0.$$

Таким образом, односолитонный потенциал является *безотражательным*, т.е. его коэффициент отражения равен нулю.

Отметим еще одно важное обстоятельство: все наши вычисления были формальными и никак не использовали вещественность параметра k. При $k = i\alpha$ имеем:

$$\varphi(x,k) = \frac{1}{2\operatorname{ch}(\alpha x)},$$

т.е. эта функция экспоненциально убывает при $x \to \pm\infty$, откуда следует ее квадратичная интегрируемость. Таким образом, $\lambda = (i\alpha)^2 = -\alpha^2$ является точкой дискретного спектра, а функция $\varphi(x,k)$ — настоящей собственной функцией для соответствующего оператора Шредингера. Поскольку вронскиан любых двух решений уравнения Шредингера является его первым интегралом, имея одно частное решение, всегда можно понизить порядок и, тем самым, найти общее решение. Нетрудно проверить, что уравнение $W(\theta,\psi) = \mu = \mathrm{const}$ сводится к линейному уравнению

$$\frac{\theta'}{2\operatorname{ch}(\alpha x)} + \frac{\alpha \operatorname{sh}(\alpha x)}{2\operatorname{ch}^2(\alpha x)}\theta = \mu,$$

решая которое можно найти решение уравнения Шредингера ψ, линейно независимое с φ:

$$\theta(x,k) = \operatorname{sh}(\alpha x) + \frac{\alpha x}{\operatorname{ch}(\alpha x)}.$$

Нетрудно заметить, что функция θ не принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$; более того, в пространстве формальных решений уравнения $\mathcal{L}\psi = -\alpha^2\psi$ нельзя выбрать базис с йостовской асимптотикой при $x \to \pm\infty$ (в данном случае число $k = i\alpha$ является чисто мнимым).

2.3.3 Свойства спектральных данных

Для дальнейшего исследования свойств спектральных данным нам необходимо выйти в комплексную плоскость и изучить свойства аналитического продолжения функции $a(k)$.

Теорема 2.1. *Комплекснозначная функция $a(k)$, определенная при всех вещественных $k \neq 0$, аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} k > 0$, имеет там лишь простые нули и имеет следующее асимптотическое поведение:*

$$a(k) = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \textit{при } |k| \to \infty. \tag{2.26}$$

Функции Йоста φ_1 и ψ_2 тоже при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}$ аналитически продолжаются в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} k > 0$. При этом для каждого $k \in \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ эти аналитические продолжения и их производные по переменной x имеют следующие асимптотики по переменной x:

$$\varphi_1(x,k) = e^{-ikx} + o(1) \ \textit{при } x \to -\infty, \qquad \psi_2(x,k) = e^{ikx} + o(1) \ \textit{при } x \to +\infty,$$
$$\varphi_1'(x,k) = -ike^{-ikx} + o(1) \ \textit{при } x \to -\infty, \qquad \psi_2'(x,k) = ike^{ikx} + o(1) \ \textit{при } x \to +\infty.$$

Доказательство.

Для произвольного действительного $k \neq 0$ определим функции

$$\chi_+(x,k) = e^{ikx}\varphi_1(x,k), \quad \chi_-(x,k) = e^{ikx}\psi_1(x,k).$$

Домножая первое из интегральных уравнений (2.21) на e^{ikx}, имеем:

$$\chi_+(x,k) = 1 - \int\limits_{-\infty}^{x} e^{ikx}\frac{\sin k(x-y)}{k}u(y)\varphi_1(y,k)dy =$$

$$= 1 - \int\limits_{-\infty}^{x} e^{ik(x-y)}\frac{e^{ik(x-y)} - e^{-ik(x-y)}}{2ik}u(y)\chi_+(y,k)dy = 1 + \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^{2ik(x-y)} - 1}{2ik}u(y)\chi_+(y,k)dy.$$

Преобразовывая аналогичным образом первое из уравнений (2.20), получим интегральное уравнению на функцию χ_-. Имеем:

$$\chi_+(x,k) = 1 + \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^{2ik(x-y)} - 1}{2ik}u(y)\chi_+(y,k)dy, \quad \chi_-(x,k) = 1 - \int\limits_{x}^{+\infty} \frac{e^{2ik(x-y)} - 1}{2ik}u(y)\chi_-(y,k)dy. \tag{2.27}$$

Легко видеть, что любого $k \in \mathbb{C}$ такого, что $\operatorname{Im} k > 0$, ядро первого интегрального оператора достаточно быстро убывает при $x \to -\infty$ (ввиду свойств потенциала); аналогично, для любого $k \in \mathbb{C}$ такого, что $\operatorname{Im} k < 0$, ядро второго интегрального оператора достаточно быстро убывает при $x \to +\infty$. Это означает, что согласно общей теории (см., например, [30]) первое из интегральных уравнений (2.27), которое является уравнением Вольтерра, однозначно разрешимо при любом $k \in \mathbb{C}$ с положительной мнимой частью, а второе — при любом k с отрицательной мнимой частью. Таким образом, функция χ_+ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, а функция χ_- — в нижнюю по параметру k. Отсюда следует, что функция φ_1 аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость по параметру k с сохранением своей асимптотики по x, а функция ψ_1 — в нижнюю. Для доказательства аналитической продолжаемости функции ψ_2 в верхнюю полуплоскость, а φ_2 — в нижнюю, нужно рассмотреть вспомогательные функции

$$\theta_+(x,k) = e^{-ikx}\psi_2(x,k), \quad \theta_-(x,k) = e^{-ikx}\varphi_2(x,k),$$

которые, как не трудно убедиться, удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\theta_+(x,k) = 1 - \int\limits_{x}^{+\infty} \frac{e^{-2ik(x-y)} - 1}{2ik}u(y)\theta_+(y,k)dy, \quad \theta_-(x,k) = 1 + \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^{-2ik(x-y)} - 1}{2ik}u(y)\theta_-(y,k)dy. \tag{2.28}$$

и потому продолжаются в верхнюю (нижнюю) полуплоскость по параметру k.

Поскольку вронскиан функций Йоста φ_1 и ψ_2 не зависит от x, при вещественном $k \neq 0$ вычислим его на асимптотических значениях при $x \to +\infty$:

$$W(\varphi_1,\psi_2) = \lim_{x\to+\infty}\left(ik\left(a(k)e^{-ikx} + b(k)e^{ikx}\right)e^{ikx} - \left(-ika(k)e^{-ikx} + ikb(k)e^{ikx}\right)e^{ikx}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(ik\left(a(k) + b(k)e^{2ikx} + a(k) - b(k)e^{2ikx}\right)\right) = 2ika(k).$$

Таким образом, получаем, что

$$a(k) = \frac{W(\varphi_1(x,k),\psi_2(x,k))}{2ik}, \tag{2.29}$$

для всех вещественных $k \neq 0$. Поскольку в правой части этого равенства стоит функция, аналитически продолжаемая в область $\operatorname{Im} k > 0$, то и функция $a(k)$ аналитически продолжается на всю полуплоскость $\operatorname{Im} k > 0$ при помощи формулы (2.29).

Дабы не углубляться в аналитическую технику, мы опустим обоснование асимптотического поведения функции $a(k)$ при $|k| \to \infty$ и отошлем читателя к оригинальных работах [22, 23]. Все остальные утверждения теоремы нами доказаны, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 2.10. Аналогичным образом можно показать, что функция $b(k)$ аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} k < 0$ и $b(k) \to 1$ при $|k| \to \infty$; функции φ_2 и ψ_1 тоже аналитически продолжаются в нижнюю полуплоскость с сохранением своих асимптотик.

Замечание 2.11. При доказательстве аналитической продолжаемости функций Йоста в верхнюю полуплоскость по параметру k нам пришлось выводить интегральные уравнения на вспомогательные функции $\chi_\pm$, поскольку гарантировать однозначную разрешимость интегральных уравнений (2.20,2.21) в верхней полуплоскости мы не можем ввиду того, что соответствующие ядра содержат комплексные экспоненты с положительной вещественной частью и потому не убывают на бесконечности.

Имеет место следующее утверждение, позволяющее по спектральным данным легко определять точки дискретного спектра.

Предложение 2.8. *В области* $\operatorname{Im} k > 0$ *амплитуда рассеяния* $a(k)$ *обращается в нуль тогда и только тогда, когда* $\lambda = k^2$ *является точкой дискретного спектра оператора* $\mathcal{L}$.

Доказательство.

Заметим, что в силу формулы (2.29) обращение в нуль функции $a(k)$ при некотором k из верхней полуплоскости равносильно линейной зависимости аналитических продолжений функций Йоста при этом значении k. Мы знаем, что дискретному спектру оператора Шредингера соответствуют чисто мнимые значения k с положительной мнимой частью. Поэтому предположим, что при некотором k_0 с положительной мнимой частью функция $a(k)$ обращается в нуль; тогда существует такая константа $\mu \in \mathbb{C}$, что

$$\psi_2(x, k_0) = \mu \varphi_1(x, k_0).$$

Для того, чтобы доказать, что некоторая точка принадлежит дискретному спектру дифференциального оператора, необходимо убедиться в том, что соответствующая *формальная* собственная функция квадратично интегрируема, а для этого нужно изучить ее асимптотику; но прежде необходимо убедиться в том, что полученная функция φ_1 удовлетворяет уравнению Шредингера не только при вещественных k. Однако, последнее утверждение очевидно, поскольку уравнение Шредингеру эквивалентно интегральному уравнению (2.15) при произвольных комплексных значениях параметра k, а рассматриваемая нами функция Йоста φ_1 является решением этого уравнения когда $\operatorname{Im} k > 0$. Имеем:

$$|\varphi_1(x, k_0)| \sim |e^{-ik_0 x}| = e^{\operatorname{Im} k_0 x} \to 0 \quad \text{при } x \to -\infty,$$

поскольку $\operatorname{Im} k_0 > 0$ по предположению. Аналогично,

$$|\varphi_1(x, k_0)| = |\mu| \cdot |\psi_2(x, k_0)| \sim |\mu| \cdot |e^{ik_0 x}| = |\mu| e^{-\operatorname{Im} k_0 x} \to 0 \quad \text{при } x \to +\infty.$$

Таким образом, формальная собственная функция $\varphi_1(x, k_0)$ экспоненциально стремится к нулю на бесконечности, т.е. является настоящей собственной функцией для оператора Шредингера, а, значит, $\lambda = k^2$ является точкой дискретного спектра.

Обратно, если $\lambda = k_0^2$, где $\operatorname{Im} k_0 > 0$, является точкой дискретного спектра, то соответствующая собственная функция θ квадратично интегрируема на всей оси. Это, в частности, означает, что она и ее производная по x экспоненциально убывают на бесконечности. Рассмотрим вронскиан функции θ с аналитическим продолжением функции Йоста φ_1; поскольку $\operatorname{Im} k_0 > 0$, обе эти функции стремятся к нулю при $x \to -\infty$ и, соответственно, их вронскиан тоже стремится к нулю; но в силу его постоянства это означает, что он тождественно равен нулю. Таким образом, функции θ и φ_1 линейно зависимы при $k = k_0$. Аналогично доказывается линейная зависимость функций θ и ψ_2 при $k = k_0$, откуда следует, что вронскиан функций Йоста тождественно равен нулю. А это, как мы уже знаем, эквивалентно тому, что $a(k_0) = 0$, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Легко видеть, что коэффициенты отражения и прохождения дают нам исчерпывающую информацию о матрице перехода $T(k)$ при $k \neq 0$ и, следовательно, полностью определяют непрерывный спектр оператора Шредингера. На самом деле, оказывается, что для восстановления матрицы $T(k)$ в точках непрерывного спектра достаточно знать коэффициент отражения $r(k)$ при $k > 0$ и спектральные данные, характеризующие дискретный спектр. Покажем это.

Из определения коэффициента отражения и соотношения (2.23) немедленно вытекает, что

$$|a(k)|^2 = \frac{1}{1 - |r(k)|^2} \tag{2.30}$$

для вещественных $k \neq 0$. Осталось выразить $\arg a(k)$ для этих значений k. Однако, для этого нам потребуется некоторый аппарат теории функций комплексного переменного. Как известно, интегральная формула Коши позволяет выражать значения функции, голоморфной в некоторой области комплексной плоскости, во внутренних точках этой области через ее значения на границе этой области; но для точек на границе области интегральная формула Коши не работает. Тем не менее, имеет место *формула Сохоцкого*: пусть функция f голоморфна в области D и непрерывна вплоть до границы этой области. Предположим, что $z \in \partial D$; тогда при некоторых ограничениях технического характера на функцию f и на контур γ, ограничивающий область D (см. [14]), имеет место следующая формула:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \fint_\gamma \frac{f(\zeta) dz}{\zeta - z}.$$

Поскольку подынтегральная функция имеет особенность на контуре интегрирования, интеграл здесь надо понимать в смысле главного значения:

$$\fint_\gamma \frac{f(\zeta) dz}{\zeta - z} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) dz}{\zeta - z},$$

где γ_ε — контур, полученный из γ выбрасыванием дуги, содержащей точку z и находящейся внутри окружности радиуса ε с центром в точке z.

Предложение 2.9. *Если $k \neq 0$ вещественно, то имеет место следующая формула:*

$$\arg a(k) = \frac{1}{i} \sum_{n=1}^{N} \ln \frac{k - i\varkappa_n}{k + i\varkappa_n} - \frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |a(\nu)|}{\nu - k} d\nu, \tag{2.31}$$

где интегрирование ведется по вещественной оси.

Доказательство.

Мы знаем, что функция $a(k)$ имеет в верхней полуплоскости лишь конечное число простых нулей и стремится к единице при $|k| \to \infty$. Однако, применить формулу Сохоцкого к функции

$a(k)$ в верхней полуплоскости мы не можем, поскольку соответствующий интеграл типа Коши для интеграл для нее по полукругу радиуса r расходится при $r \to \infty$. Преодолеть эту проблему можно, взяв логарифм от функции $a(k)$, но он имеет простые полюса в нулях функции $a(k)$, которые, как мы выяснили, совпадают с точками дискретного спектра оператора Шредингера. Поскольку дискретный спектр рассматриваемого оператора конечен и содержится в отрицательной полуоси, ему соответствуют чисто мнимые значения параметра k:

$$i\varkappa_1,\ i\varkappa_2, \ldots, i\varkappa_N,$$

где $\varkappa_n > 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots, N$ (для определенности будем считать, что $\varkappa_1 > \varkappa_2 > \cdots > \varkappa_N$). Рассмотрим функцию

$$f(k) = a(k) \prod_{n=1}^{N} \frac{k + i\varkappa_n}{k - i\varkappa_n};$$

тогда функция $\ln f(k)$ аналитична в верхней полуплоскости и достаточно быстро стремится к нулю при $|k| \to \infty$. Заметим также, что $|f(k)| = |a(k)|$ при $k \in \mathbb{R}$. Применим к функции $\ln f(k)$ формулу Сохоцкого:

$$\ln f(k) = \ln |f(k)| + i \arg f(k) = \frac{1}{\pi i} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |f(\nu)| + i \arg f(\nu)}{\nu - k} d\nu. \tag{2.32}$$

Легко видеть, что асимптотика (2.26) для функции $a(k)$ при $|k| \to \infty$ гарантирует стремление к нулю интеграла по полуокружности большого радиуса; поэтому в пределе в формуле (2.32) остается лишь интеграл по вещественной оси. Кроме того необходимо отметить, что вообще говоря, функция $f(k)$ не определена при $k = 0$, поскольку при этом значении k не определена функция $a(k)$. Тем не менее, можно показать, что $a(k) = \frac{c}{k} + O(1)$ при $k \to 0$, откуда следует, что интеграл в формуле (2.32) сходится в окрестности $k = 0$. Точкам непрерывного спектра соответствуют вещественные значения k. Поэтому, приравнивая при $k \in \mathbb{R}$ мнимые части в формуле (2.32), получаем следующее:

$$\arg f(k) = -\frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |f(\nu)|}{\nu - k} d\nu. \tag{2.33}$$

Далее, поскольку при $k \in \mathbb{R}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots, N$ имеет место цепочка равенств:

$$\ln \frac{k - i\varkappa_n}{k + i\varkappa_n} = \ln \left| \frac{k - i\varkappa_n}{k + i\varkappa_n} \right| + i \arg \frac{k - i\varkappa_n}{k + i\varkappa_n} = \ln 1 + i \arg \frac{k - i\varkappa_n}{k + i\varkappa_n} = i \arg \frac{k - i\varkappa_n}{k + i\varkappa_n},$$

преобразовывая выражение (2.33) и пользуясь свойствами аргумента и тем, что $|f(k)| = |a(k)|$ при $k \in \mathbb{R}$, окончательно получаем формулу (2.31), $\mathfrak{Q.e.d.}$

Следствие 2.1. *Если $k \neq 0$ вещественно, то имеет место следующая формула:*

$$a(k) = \frac{1}{\sqrt{1 - |r(k)|^2}} \prod_{n=1}^{N} \frac{k - i\varkappa_n}{k + i\varkappa_n} \exp\left(\frac{i}{2\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |r(\nu)|^2)}{\nu - k} d\nu \right). \tag{2.34}$$

Доказательство.

Воспользовавшись формулой (2.30), имеем:

$$a(k) = |a(k)| e^{i \arg a(k)} = \frac{1}{\sqrt{1 - |r(k)|^2}} \prod_{n=1}^{N} \frac{k - i\varkappa_n}{k + i\varkappa_n} \exp\left(-\frac{i}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |r(\nu)|^2)^{-\frac{1}{2}}}{\nu - k} d\nu \right),$$

откуда немедленно получаем (2.34), $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 2.12. В физической литературе формулы типа (2.31), связывающие вещественную и мнимую части аналитической функции, часто называются *дисперсионными соотношениями.*

Замечание 2.13. Ввиду того, что $r(-k) = \bar{r}(k)$ при $k \in \mathbb{R}$ для восстановления функций $a(k)$ и $b(k)$ достоточно знать коэффициент отражения при $k > 0$.

Таким образом, мы показали, что во всех точках непрерывного спектра матрица перехода $T(k)$ полностью определяется коэффициентом отражения $r(k)$ при $k > 0$ (и дискретным спектром), поскольку функции $a(k)$ и $b(k)$ могут быть вычислены по нему с помощью формул (2.23,2.30,2.31).

При доказательстве предложения 2.8 мы установили следующих факт: в точках дискретного спектра аналитические продолжения функций Йоста оказываются линейно зависимыми, и пропорциональными соответствующей собственной функции оператора Шредингера (т.е. сами являются собственными функциями). Для каждого $n = 1, 2, \dots, N$ фиксируем собственную функцию $\varphi_1(x, i\varkappa_n)$ и рассмотрим ее асимптотику:

$$\varphi_1(x, i\varkappa_n) = b_n\psi_2(x, i\varkappa_n) = b_n e^{-\varkappa_n x} + o(1) \quad \text{при } x \to +\infty.$$

Легко заметить, что спектральные данные $\varkappa_n$, b_n, где $n = 1, 2, \dots, N$, полностью характеризуют дискретный спектр оператора Шредингера. Эти параметры вместе со зачениями коэффициента отражения $r(k)$ при $k > 0$ и составляют полный набор спектральных данных в нашей задаче, поскольку в силу соотношений (2.22,2.24) имеют место равенства $a(-k) = \bar{a}(k)$ и $b(-k) = \bar{b}(k)$ для всех действительных $k \neq 0$.

2.4 Интегрирование КдФ методом обратной задачи

Как мы уже видели на примере цепочки Тоды, метод обратной задачи является важным инструментом при изучении интегрируемых уравнений. Суть этого метода состоит в том, чтобы по начальным условиям вычислить спектральные данные (прямая задача), потом описать их эволюцию со временем, а затем восстановить решение по этим спектральным данным (обратная задача). Пока мы только описали спектральные данные и изучили их свойства.

2.4.1 Прямая задача

Опишем сперва решение прямой задачи рассеяния, т.е. некий теоретический способ нахождения спектральных данных

$$\{r(k),\ k > 0,\ \varkappa_n, b_n,\ n = 1, 2, \dots, N\} \tag{2.35}$$

по заданному потенциалу u оператора Шредингера.

Предложение 2.10. *При условии (2.12) на потенциал оператора Шредингера для всех k таких, что* $\operatorname{Im} k > 0$, *выполнено следующее равенство:*

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(y)\chi_+(y, k)dy, \tag{2.36}$$

где χ_+ — решение первого из интегральных уравнений (2.27).

Доказательство.

Прежде всего покажем, что имеет место следующее соотношение:

$$\lim_{x\to+\infty}\chi_+(x,k)=1-\frac{1}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(y)\chi_+(y,k)dy. \tag{2.37}$$

В самом деле, для любого $x\in\mathbb{R}$ имеем:

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{x}e^{2ik(x-y)}u(y)\chi_+(y,k)dy\right|\leqslant\left|e^{2ikx}\right|\int\limits_{-\infty}^{x}\left|e^{-2iky}u(y)\chi_+(y,k)\right|dy=\frac{\int\limits_{-\infty}^{x}\left|e^{-2iky}\right|\cdot|u(y)\chi_+(y,k)|\,dy}{\left|e^{-2ikx}\right|}.$$

Согласно общей теории уравнений Вольтерра, функция χ_+ ограничена при условии (2.12) на потенциал (см. [22, 23]); отсюда следует, что если $\operatorname{Im}k>0$, то интеграл в числителе последней формулы мал по сравнению с ее значенателем при $x\to+\infty$, поскольку $\left|e^{-2ikx}\right|$ экспоненциально растет, в то время как потенциал u достаточно быстро убывает. Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^{x}e^{2ik(x-y)}u(y)\chi_+(y,k)dy\to 0 \tag{2.38}$$

при $x\to+\infty$; поэтому имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\chi_+(x,k)=1+\lim_{x\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{e^{2ik(x-y)}-1}{2ik}u(y)\chi_+(y,k)dy=$$
$$=1+\frac{1}{2ik}\lim_{x\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{2ik(x-y)}u(y)\chi_+(y,k)dy-\frac{1}{2ik}\lim_{x\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{x}u(y)\chi_+(y,k)=$$
$$=1-\frac{1}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(y)\chi_+(y,k)dy.$$

Далее, дифференцируя по x первую их формул (2.8) и используя уже доказанную формулу (2.38), имеем:

$$\chi_+'(x,k)=\int\limits_{-\infty}^{x}e^{2ik(x-y)}u(y)\chi_+(y,k)dy\to 0 \tag{2.39}$$

при $x\to+\infty$. Кроме того, первая из формул (2.28) дает нам, что

$$\lim_{x\to+\infty}\theta_+(x,k)=1,\qquad \lim_{x\to+\infty}\theta_+'(x,k)=0, \tag{2.40}$$

поскольку интегрирование ведется по интервалу x до $+\infty$.

Согласно формуле (2.29) и Лемме 2.1 при любом k из верхней полуплоскости имеем:

$$a(k)=\frac{W(\varphi_1,\psi_2)}{2ik}=\lim_{x\to+\infty}\frac{W(\varphi_1,\psi_2)}{2ik}=\frac{1}{2ik}\lim_{x\to+\infty}W(e^{-ikx}\chi_+(x,k),e^{ikx}\theta_+(x,k))=$$
$$=\frac{1}{2ik}\lim_{x\to+\infty}(2ik\chi_+(x,k)\theta_+(x,k)+W(\chi_+(x,k),\theta_+(x,k)))=1-\frac{1}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(y)\chi_+(y,k)dy,$$

поскольку $W(\chi_+(x,k),\theta_+(x,k))\to 0$ при $x\to+\infty$ в силу формул (2.37,2.39,2.40), $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 2.14. Легко заметить, что формула (2.36) справедлива также и при вещественных $k \neq 0$ в силу непрерывности по k всех входящих в нее функций.

Предложение 2.11. *При вещественных $k \neq 0$ и при условии (2.12) на потенциал оператора Шредингера имеет место равенство*

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2iky} u(y) \chi_+(y,k) dy. \tag{2.41}$$

Доказательство.

Нетрудно показать, что при вещественных $k \neq 0$ справедливо равенство

$$b(k) = -\frac{W(\varphi_1(x,k), \psi_1(x,k))}{2ik}$$

(доказательство совершенно аналогично выводу формулы (2.29)). Далее, из формул (2.27) немедленно вытекает, что

$$\lim_{x\to+\infty} \chi_-(x,k) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} \chi_-(x,k) = 0$$

при $k \in \mathbb{R}$ и что

$$\chi_+'(x,k) = \int\limits_{-\infty}^{x} e^{2ik(x-y)} u(y) \chi_+(y,k) dy$$

при вещественных k. Пользуясь этими формулами и тем, что вронскиан любых двух решений уравнения Шредингера постоянен, имеем:

$$W(\varphi_1, \psi_1) = \lim_{x\to+\infty} W(\varphi_1(x,k), \psi_1(x,k)) = \lim_{x\to+\infty} e^{-2ikx} \left(\chi_+(x,k)\chi_-'(x,k) - \chi_+'(x,k)\chi_-(x,k)\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} e^{-2ikx} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{2ik(x-y)} u(y)\chi_+(y,k) dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2iky} u(y) \chi_+(y,k) dy,$$

Q.e.d.

Следствие 2.2. *Имеет место равенство*

$$\lim_{x\to+\infty} \chi_+(x,k) = a(k). \tag{2.42}$$

Предложение 2.12. *Для каждого $n = 1, 2, \ldots, N$ имеет место равенство*

$$b_n = -\frac{i}{a'(i\varkappa_n)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^2(x, i\varkappa_n) dx. \tag{2.43}$$

Доказательство.

В работе [22] показано, что при условии $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ функция $\chi_+(x,k)$ непрерывно дифференцируема по параметру k во всех точках кроме точки $k = 0$. Поэтому из формулы (2.42) следует, что существует

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\partial \chi_+(x,k)}{\partial k} = a'(k). \tag{2.44}$$

Кроме того, имеем:

$$\varphi_{1,k}(x,k) = \frac{\partial}{\partial k}\left(\chi_+(x,k)e^{-ikx}\right) = \frac{\partial \chi_+(x,k)}{\partial k}e^{-ikx} - ik\chi_+(x,k)e^{-ikx}.$$

Подставляя теперь в последнее равенство $k = i\varkappa_n$ для некоторого $n = 1, 2, \ldots, N$, устремляя $x \to +\infty$ и пользуясь формулой (2.44) и тем, что $a(i\varkappa_n) = 0$, получаем следующую асимптотику:

$$\varphi_{1,k}(x, i\varkappa_n) \sim a'(i\varkappa_n)e^{\varkappa_n x} \quad \text{при } x \to +\infty.$$

Функция Йоста φ_1 удовлетворяет уравнению Шредингера $\mathcal{L}\psi_1 = k^2\psi_1$; дифференцируя это равенство по параметру k и затем подставляя $k = i\varkappa_n$ для некоторого $n = 1, 2, \ldots, N$, имеем:

$$\left(\mathcal{L} + \varkappa_n^2\right)\varphi_{1,k}(x, i\varkappa_n) = 2i\varkappa_n\varphi_1(x, i\varkappa_n). \tag{2.45}$$

Умножим теперь последнее равенство на $\varphi_1(x, i\varkappa_n)$ и проинтегрируем по всей числовой оси:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x, i\varkappa_n)\left(\mathcal{L} + \varkappa_n^2\right)\varphi_{1,k}(x, i\varkappa_n)dx = 2i\varkappa_n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^2(x, i\varkappa_n) \tag{2.46}$$

(интегралы сходятся ввиду того, что $k = i\varkappa_n$ — точка дискретного спектра, т.е. функция φ_1 квадратично интегрируема при этом значении параметра). Изучем теперь левую часть равенства (2.46):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x, i\varkappa_n)\left(\mathcal{L} + \varkappa_n^2\right)\varphi_{1,k}(x, i\varkappa_n)dx =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x, i\varkappa_n)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_{1,k}(x, i\varkappa_n)dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x, i\varkappa_n)(u(x) + \varkappa_n^2)\varphi_{1,k}(x, i\varkappa_n)dx. \tag{2.47}$$

Дважды интегрируя по частям в первом интеграле и пользуясь асимптотикой (2.45), получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x, i\varkappa_n)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_{1,k}(x, i\varkappa_n)dx =$$

$$= \varphi_1(x, i\varkappa_n)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{1,k}(x, i\varkappa_n)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\varphi_1(x, i\varkappa_n)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{1,k}(x, i\varkappa_n)dx =$$

$$= \varkappa_n b_n e^{-\varkappa_n x}a'(i\varkappa_n)e^{\varkappa_n x} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\varphi_1(x, i\varkappa_n)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{1,k}(x, i\varkappa_n)dx =$$

$$= \varkappa_n b_n a'(i\varkappa_n) - \frac{\partial}{\partial x}\varphi_1(x, i\varkappa_n)\varphi_{1,k}(x, i\varkappa_n)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_1(x, i\varkappa_n)\varphi_{1,k}(x, i\varkappa_n)dx =$$

$$= 2\varkappa_n b_n a'(i\varkappa_n) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_1(x, i\varkappa_n)\varphi_{1,k}(x, i\varkappa_n)dx.$$

Подставляя полученное выражение в (2.47), имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x, i\varkappa_n)\left(\mathcal{L} + \varkappa_n^2\right)\varphi_{1,k}(x, i\varkappa_n)dx =$$

$$= -2\varkappa_n b_n a'(i\varkappa_n) - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_1(x, i\varkappa_n)\varphi_{1,k}(x, i\varkappa_n)dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x, i\varkappa_n)(u(x) + \varkappa_n^2)\varphi_{1,k}(x, i\varkappa_n)dx =$$

$$= -2\varkappa_n b_n a'(i\varkappa_n) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{1,k}(x, i\varkappa_n)\left(\mathcal{L} + \varkappa_n^2\right)\varphi_1(x, i\varkappa_n)dx = -2\varkappa_n b_n a'(i\varkappa_n),$$

поскольку $\varphi_1(x, i\varkappa_n)$ является собственной функцией оператора Шредингера с собственным значением $\lambda = k^2 = -\varkappa^2$. Пользуясь теперь формулой (2.46), немедленно получаем (2.43), $\mathfrak{Q.e.d.}$

Мы дали исчерпывающее описание того, как по потенциалу оператора Шредингера определить спектральные данные (2.35). Таким образом, алгоритм решения прямой задачи состоит в следующем: сперва решаем интегральное уравнение (2.27) на функцию χ_+, затем с помощью формулы (2.36) находим функцию $a(k)$, определенную в верхней полуплоскости по параметру k. Далее, находим нули $i\varkappa_1, i\varkappa_2, \ldots, i\varkappa_N$ этой функции в верхней полуплоскости и затем, пользуясь формулой (2.43), находим коэффициенты b_n. Ну и наконец, пользуясь формулой (2.41), находим функцию $b(k)$ при $k > 0$ и коэффициент отражения $r(k) = a(k)/b(k)$.

2.4.2 Эволюция спектральных данных

Рассмотрим теперь изоспектральную деформацию оператора Шредингера, при которой эволюция волновой функции задается формулой $\psi_t = \mathcal{A}\psi$, где оператор $\mathcal{A}$ имеет вид (2.5). Как мы уже знаем, в этом случае потенциал $u = u(x, t)$ удовлетворяет уравнению Кортевега-де Фриза. Поэтому, зная потенциал $u(x, 0)$ оператора Шредингера в начальный момент времени $t = 0$ и найдя методом обратной задачи потенциал в произвольный момент времени t, мы сможем решить задачу Коши для уравнения КдФ. Опишем эволюцию спектральных данных; в случае уравнения КдФ этот шаг метода обратной задачи является наиболее простым.

Теорема 2.2. *При описанной выше изоспектральной деформации эволюция спектральных данных, отвечающих за непрерывный спектр, подчиняется уравнениям Гарднера–Грина–Крускала–Миуры:*

$$\dot{a}(k, t) = 0, \quad \dot{b}(k, t) = 8ik^3 b(k, t), \tag{2.48}$$

где точка обозначает производную по переменной t.

Доказательство.

Для того, чтобы описать эволюцию коэффициентов $a(k, t)$ и $b(k, t)$ необходимо сперва описать деформацию функции Йоста $\varphi_1(x, k)$. Пусть $\varphi_1(x, t, k)$ и $\varphi_2(x, t, k)$ обозначают при каждом t такие решения уравнения Шредингера, которые имеют асимптотику e^{-ikx} и e^{ikx} при $x \to -\infty$.[2] Легко видеть, что из представления Лакса (2.7) для уравнения КдФ немедленно

[2] Отметим, что кажущееся на первый взгляд верным утверждение о том, что эволюция функции $\varphi_1(x, t, k)$ задается уравнением $\dot{\varphi}_1(x, t, k) = \mathcal{A}\varphi_1(x, t, k)$ неверно, поскольку при рассматриваемой изоспектральной деформации асимптотика собственных функций, вообще говоря, не сохраняется; это уравнение задает деформацию собственной функции, но при этом она перестает быть функцией Йоста.

вытекает, что операторы $\partial_t - \mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ коммутируют. Это означает, что каждое собственное подпространство для оператора $\mathcal{L}$ инвариантно относительно оператора $\partial_t - \mathcal{A}$. Разложим функцию $(\partial_t - \mathcal{A})\,\varphi_1(x,t,k)$ по базису $\{\varphi_1, \varphi_2\}$:

$$(\partial_t - \mathcal{A})\,\varphi_1(x,t,k) = \alpha(t,k)\varphi_1(x,t,k) + \beta(t,k)\varphi_2(x,t,k).$$

Переходя теперь к пределу при $x \to -\infty$ в последнем равенстве и учитывая, что

$$\mathcal{A} = -4\partial_x^3 + 6u\partial_x + 3u_x \to -4\partial_x^3 \quad \text{при } x \to -\infty,$$

получаем, что

$$4ik^3\varphi_1(x,t,k) \sim \alpha(t,k)\varphi_1(x,t,k) + \beta(t,k)\varphi_2(x,t,k) \quad \text{при } x \to -\infty,$$

поскольку потенциал u быстро убывает на бесконечности, а асимптотика функции Йоста при $t \to -\infty$ не изменяется со временем. Поэтому, $\alpha(t,k) = 4ik^3$, $\beta(t,k) = 0$, т.е.

$$(\partial_t - \mathcal{A})\,\varphi_1(x,t,k) = 4ik^3\varphi_1(x,t,k). \tag{2.49}$$

Рассматривая теперь асимптотику этого выражения при $x \to +\infty$, имеем:

$$\left(\frac{\partial a(t,k)}{\partial t} + 4ik^3 a(k,t)\right)e^{-ikx} + \left(\frac{\partial b(t,k)}{\partial t} - 4ik^3 b(k,t)\right)e^{ikx} \sim 4ik^3\left(a(t,k)e^{-ikx} + b(t,k)e^{ikx}\right),$$

Откуда немедленно вытекают требуемые соотношения (2.48), $\mathfrak{Q.e.d.}$

Следствие 2.3. *Эволюция во времени коэффициентов $a(k)$ и $b(k)$ выглядит следующим образом:*

$$a(k,t) = a(k,0), \quad b(k,t) = b(k,0)e^{8ik^3t}.$$

Теперь опишем эволюцию спектральных данных, характеризующих дискретный спектр. Поскольку деформация является изоспектральной, собственные значения постоянны: $\dot{\varkappa}_n = 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots, N$.

Предложение 2.13. *При изоспектральной деформации оператора Шредингера, задаваемой оператором третьего порядка, эволюция коэффициентов b_n, где $n = 1, 2, \ldots, N$, подчиняется уравнению*

$$\dot{b}_n(t) = 8\varkappa_n^3 b_n(t). \tag{2.50}$$

Доказательство.

При доказательстве теоремы 2.2 мы показали, что эволюция всякого (формального) решения уравнения Шредингера с асимптотикой e^{-ikx} при $x \to -\infty$ подчиняется закону (2.49). Пусть теперь $k = i\varkappa_n$; изучим, что происходит при $x \to +\infty$:

$$\left(\frac{\partial b_n(t)}{\partial t} - 4\varkappa_n^3 b_n(t)\right)e^{-\varkappa_n x} \sim 4\varkappa_n^3 e^{-\varkappa_n x}.$$

Отсюда немедленно выводится уравнение (2.50), $\mathfrak{Q.e.d.}$

Следствие 2.4. *Эволюция во времени коэффициентов b_n выглядит следующим образом:*

$$b_n(t) = b(0)e^{8\varkappa_n^3 t},$$

где $n = 1, 2, \ldots, N$.

Таким образом, теперь мы в состоянии явно описать эволюцию во времени данных рассеяния (2.35):

$$\{r(k,0),\ k>0,\ \varkappa_n, b_n(0),\ n=1,\ldots,N\} \to \left\{r(k,0)e^{8ik^3t},\ k>0,\ \varkappa_n, b_n(0)e^{8\varkappa_n^3 t},\ n=1,\ldots,N\right\}.$$

2.4.3 Решение обратной задачи

Сведение дифференциальных уравнений к интегральным дает нам мощный инструмент, поскольку теория интегральных уравнений разработана очень хорошо и интегральные операторы, возникающие в различных задачах, как правило, оказываются ограниченными или даже компактными (в отличии от дифференциальных операторов). Мы уже показали, как свести решение прямой задачи для оператора Шредингера к уравнению Вольтерра второго рода. Покажем теперь, как свести решение обратной задачи к другому интегральному уравнению.

Согласно общей теории уравнений Вольтерра второго рода (см. [20]) решение уравнений вида (2.20,2.21) можно искать в некотором специальном виде. В частности, решение соответствующего интегрального уравнения на функцию $\psi_2(x,k)$ может быть найдено в виде

$$\psi_2(x,k) = e^{ikx} + \int\limits_x^{+\infty} K(x,y)e^{iky}dy, \tag{2.51}$$

где $K(x,y)$ — новая неизвестная вещественно-значная функция, определенная при $y \geqslant x$, и $k \in \mathbb{R}$. Поскольку функция $\psi_2(x,k)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} k > 0$, это интегральное представление имеет место и при всех комплексных k с положительной мнимой частью.

Согласно своему определению, при $k \in \mathbb{R}$ функции φ_1, ψ_1 и ψ_2 связаны соотношением

$$\varphi_1(x,k) = a(k)\psi_1(x,k) + b(k)\psi_2(x,k).$$

Разделим это соотношение на $a(k)$, вычтем из обеих его частей e^{-ikx}, затем умножим на e^{iky} при произвольном фиксированном $y \in \mathbb{R}$ и проинтегрируем[3] по переменной k:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\varphi_1(x,k)e^{iky}}{a(k)} - e^{-ik(x-y)} \right) dk = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iky} \big(\psi_1(x,k) - e^{-ikx} + r(k)\psi_2(x,k)\big)\, dk. \tag{2.52}$$

Пользуясь теоремой Коши о вычетах (функция $a(k)$ имеет простые нули в точках дискретного спектра $i\varkappa_n$, где $n = 1, 2, \ldots, N$), имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\varphi_1(x,k)e^{iky}}{a(k)} - e^{-ik(x-y)} \right) dk = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \operatorname*{res}_{k=i\varkappa_n} \left(\frac{\varphi_1(x,k)e^{iky}}{a(k)} \right) =$$

$$= 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \frac{\varphi_1(x,i\varkappa_n)e^{-\varkappa_n y}}{a'(i\varkappa_n)} = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n\psi_2(x,i\varkappa_n)e^{-\varkappa_n y}}{a'(i\varkappa_n)}. \tag{2.53}$$

При вычислении несобственного интеграла мы, как обычно, воспользовались тем, что интеграл по полукругу радиуса R от подынтегральной функции стремится к нулю при $R \to \infty$ (это следует из асимптотических свойств функций Йоста). Подставляя теперь интегральное представление (2.51) в равенство (2.53), получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\varphi_1(x,k)e^{iky}}{a(k)} - e^{-ik(x-y)} \right) dk = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n e^{-\varkappa_n(x+y)}}{a'(i\varkappa_n)} + 2\pi i \int\limits_x^{+\infty} \left(K(x,z) \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n e^{-\varkappa_n(y+z)}}{a'(i\varkappa_n)} \right) dz.$$

[3] Сходимость интегралов обеспечивается асимптотическими свойствами функций Йоста по переменной k. Мы не будем останавливаться на этом вопросе, см. [10].

Согласно (2.22) при вещественном k имеет место равенство

$$\psi_1(x,k)=\bar{\psi}_2(x,k)=e^{-ikx}+\int\limits_x^{+\infty}K(x,y)e^{-iky}dy;$$

используем его для преобразования правой части (2.52):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{iky}\left(\psi_1(x,k)-e^{-ikx}+r(k)\psi_2(x,k)\right)dk=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{iky}\left(\int\limits_x^{+\infty}K(x,z)e^{-ikz}dz+r(k)e^{ikx}+r(k)\int\limits_x^{+\infty}K(x,z)e^{ikz}dz\right)dk=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{iky}\left(\int\limits_x^{+\infty}K(x,z)e^{-ikz}dz\right)dk+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(r(k)e^{ik(x+y)}+\int\limits_x^{+\infty}K(x,z)r(k)e^{ik(y+z)}dz\right)dk.$$

Поскольку функция $K(x,y)$ определена лишь при $y\geqslant x$, первый из интегралов в последнем выражении представляет собой композицию прямого и обратного преобразований Фурье с точностью до числового множителя. В самом деле, положим

$$\tilde{K}(x,y)=\begin{cases}K(x,y), & y\geqslant x\\ 0, & y<x\end{cases}.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{iky}\left(\int\limits_x^{+\infty}K(x,z)e^{-ikz}dz\right)dk=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{iky}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{K}(x,z)e^{-ikz}dz\right)dk=2\pi\tilde{K}(x,y).$$

Таким образом, равенство (2.52) при $y\geqslant x$ может быть переписано следующим образом:

$$2\pi\left(-\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n e^{-\varkappa_n(x+y)}}{ia'(i\varkappa_n)}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}r(k)e^{ik(x+y)}dk\right)=$$

$$=2\pi K(x,y)+2\pi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(x,z)\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n e^{-\varkappa_n(y+z)}}{ia'(i\varkappa_n)}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}r(k)e^{ik(y+z)}dk\right)dz.$$

Далее, вводя обозначение

$$F(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n e^{-\varkappa_n x}}{ia'(i\varkappa_n)}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}r(k)e^{ikx}dk, \tag{2.54}$$

окончательно получаем:

$$K(x,y)+F(x+y)=\int\limits_x^{+\infty}K(x,z)F(y+z)dz=0,\quad \text{где } y\geqslant x. \tag{2.55}$$

Интегральное уравнение (2.55) называется *уравнением Гельфанда–Левитана–Марченко.*

Последний шаг при решении обратной задачи состоит в восстановлении потенциала оператора Шредингера по преобразованным спектральным данным. Имеет место следующая

Теорема 2.3. *Пусть $K(x,y)$ — решение уравнения (2.55). Тогда потенциал оператора Шредингера восстанавливается с помощью следующей формулы обращения:*

$$u(x) = -2\frac{d}{dx}K(x,x). \tag{2.56}$$

Доказательство.

Пользуясь аналитическими свойствами потенциала оператора Шредингера и оценками из работ [22, 23], можно показать, что функция θ_+ имеет следующую асимптотику по параметру k:

$$\theta_+(x,k) = 1 + \frac{1}{2ik}\int\limits_x^{+\infty} u(y)dy + o\left(\frac{1}{k}\right), \quad |k| \to \infty,\ \operatorname{Im} k > 0.$$

Отсюда следует, что потенциал восстанавливается по следующей формуле:

$$u(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lim_{|k|\to\infty}(2ik\theta_+(x,k) - 1)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lim_{|k|\to\infty}(2ike^{-ikx}\psi_2(x,k) - 1)\right). \tag{2.57}$$

Согласно формуле (2.51) имеем:

$$2ik(1 - e^{-ikx}\psi_2(x,k)) = -2ik\int\limits_x^{+\infty} K(x,y)e^{ik(y-x)}dy = -2\int\limits_x^{+\infty} K(x,y)\frac{\partial}{\partial y}e^{ik(y-x)}dy =$$
$$= -\,2K(x,y)\frac{\partial}{\partial y}e^{ik(y-x)}\Big|_x^{+\infty} + 2\int\limits_x^{+\infty} K_y(x,y)e^{ik(y-x)}dy = 2K(x,x) + 2\int\limits_x^{+\infty} K_y(x,y)e^{ik(y-x)}dy.$$

При переходе к пределу при $|k| \to \infty$, поскольку $\operatorname{Im} k > 0$, последний интеграл стремится к нулю. В итоге, учитывая (2.57), приходим к требуемой формуле (2.56), $\mathfrak{Q.e.d.}$

Итак, общая схема интегрирования уравнения Кортевега-де Фриза методом обратной задачи выглядит следующим образом: по заданным начальным условиям $u(x,0)$ в задаче Коши для уравнения КдФ строим соответствующий оператор Шредингера с потенциалом $u(x,0)$ и находим данные рассеяния $\{r(k),\ k > 0,\ \varkappa_n,\ b_n,\ n = 1,2,\ldots,N\}$ для этого оператора путем решения интегральных уравнений (2.36,2.41,2.43). Затем, решая уравнения Гарднера–Грина–Крускала–Миуры, находим эволюцию данных рассеяния $\{r(k,t),\ k > 0,\ \varkappa_n,\ b_n(t),\ n = 1,2,\ldots,N\}$ и строим для них функцию $F(x,t)$ по формуле (2.54). Потом, решая уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко для этой построенной функции, находим преобразованное ядро $K(x,y,t)$, и, наконец, применяя формулу обращения (2.56), находим искомую функцию $u(x,t)$.

Замечание 2.15. На первый взгляд, описанная выше процедура носит чисто теоретический характер, поскольку как прямая, так и обратная задачи требуют решения интегральных уравнений. Однако, как мы продемонстрируем дальше, она вполне может быть применена на практике для явного нахождения многосолитонных решений уравнения КдФ.

2.5 Многосолитонные решения КдФ

В этом параграфе мы покажем, как схема интегрирования уравнения КдФ методом обратной задачи может быть использована для нахождения целого класса явных решений этого уравнения, которые, как оказывается, полностью определяют асимптотику всех его решений.

2.5.1 Безотражательные потенциалы

Мы уже сталкивались с примером потенциала оператора Шредингера, коэффициент отражения для которого тождественно равен нулю (см. пример 2.2), и этот пример будет для нас модельным. Будем говорить, что потенциал u оператора Шредингера является *безотражательным*, если соответствующий коэффициент отражения $r(k)$ тождественно равен нулю (где $k \in \mathbb{R}$). Это означает, что коэффициент $b(k)$ тождественно равен нулю, откуда согласно (2.23), получаем, что $|a(k)| \equiv 1$ при $k \in \mathbb{R}$. Поскольку функция $a(k)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость и имеет нули в точках дискретного спектра $i\varkappa_n$, где $n = 1, 2, \ldots, N$, в силу теоремы единственности она пропорциональна функции

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{k - i\varkappa_n}{k + i\varkappa_n}. \tag{2.58}$$

Но мы значем, что при $k \to \infty$ амплитуда рассеяния $a(k)$ стремится к единице. Отсюда следует, что $a(k)$ совпадает с функцией (2.58).

Поскольку коэффициент отражения тождественно равен нулю, ядро $F(x)$ в уравнении Гельфанда–Левитана–Марченко превращается в сумму экспонент:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{N} \beta_n e^{-\varkappa_n x}, \quad \text{где } \beta_n = \frac{b_n}{ia'(i\varkappa_n)}.$$

Поэтому решение этого интегрального уравнения также будем искать в виде суммы экспонент:

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{N} K_n(x) e^{-\varkappa_n y}.$$

Тогда интеграл в уравнении (2.55) принимает следующий вид:

$$\int\limits_{x}^{+\infty} K(x,z)F(y+z)dz = \sum_{m,n=1}^{N} K_m(x)\beta_n e^{-\varkappa_n y} \int\limits_{x}^{+\infty} e^{-(\varkappa_n+\varkappa_m)z} dz = \sum_{m,n=1}^{N} K_m(x) \frac{\beta_n e^{-(\varkappa_n+\varkappa_m)x}}{\varkappa_n + \varkappa_m} e^{-\varkappa_n y},$$

а само уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко записывается так:

$$\sum_{n=1}^{N} K_n(x) e^{-\varkappa_n y} + \sum_{n=1}^{N} \beta_n e^{-\varkappa_n (x+y)} + \sum_{m,n=1}^{N} K_m(x) \frac{\beta_n e^{-(\varkappa_n+\varkappa_m)x}}{\varkappa_n + \varkappa_m} e^{-\varkappa_n y} = 0. \tag{2.59}$$

Поскольку при каждом фиксированном x левая часть полученного уравнения представляет собой линейную комбинацию экспонент $e^{-\varkappa_n y}$ с различными показателями, уравнение (2.59) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$K_n(x) + \sum_{m=1}^{N} K_m(x) \frac{\beta_n e^{-(\varkappa_n+\varkappa_m)x}}{\varkappa_n + \varkappa_m} = -\beta_n e^{-\varkappa_n x}, \quad \text{где } n = 1, 2, \ldots, N.$$

Легко видеть, что полученная система уравнений линейна относительно неизвестных функций $K_n(x)$; обозначим за $A(x) = (A_{nm}(x))$ соответствующую матрицу:

$$A_{nm}(x) = \delta_{nm} + \frac{\beta_n e^{-(\varkappa_n+\varkappa_m)x}}{\varkappa_n + \varkappa_m},$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера. Решая эту систему по правилу Крамера, получаем:

$$K_n(x) = \frac{\det A^{(n)}(x)}{\det A(x)},$$

где через $A^{(n)}$ обозначена матрица, получающаяся из A заменой ее n-ного столбца на столбец правых частей

$$(-\beta_1 e^{-\varkappa_1 x}, -\beta_2 e^{-\varkappa_2 x}, \ldots, -\beta_N e^{-\varkappa_N x})^t.$$

Таким образом,

$$K(x,x) = \frac{1}{\det(A(x))} \sum_{n=1}^{N} \det A^{(n)}(x) e^{-\varkappa_n x}. \tag{2.60}$$

Заметим теперь, что известное правило дифференцирования определителя $\det A(x)$ дает в точности сумму в правой части равенства (2.60), поскольку

$$\frac{d}{dx}\left(A_{nm}(x)\right) = -\beta_n e^{-(\varkappa_n+\varkappa_m)x} = (-\beta_n e^{-\varkappa_m x})e^{-\varkappa_n x}.$$

Отсюда следует, что формулу (2.60) можно переписать в виде

$$K(x,x) = \frac{d}{dx} \ln \det A(x),$$

откуда, пользуясь формулой обращения (2.56), получаем явное выражение для потенциала:

$$u(x) = -2\frac{d^2}{dx^2} \ln \det A(x).$$

2.5.2 Взаимодействие солитонов

Пусть теперь потенциал эволюционирует со временем. Тогда изменение спектральных данных подчиняется уравнениям (2.48,2.50). В случае безотражательных потенциалов это означает, что матричные элементы матрицы $A(x,t)$ выражаются следующим образом:

$$A_{nm}(x,t) = \delta_{nm} + \frac{\beta_n e^{-(\varkappa_n+\varkappa_m)x+8\varkappa_n^3 t}}{\varkappa_n+\varkappa_m}, \tag{2.61}$$

где $\beta_n = \beta_n(0) = \mathrm{const}$. Соответствующее решение уравнение Кортевега-де Фриза восстанавливается по формуле

$$u(x,t) = -2\frac{d^2}{dx^2} \ln \det A(x,t); \tag{2.62}$$

такие решения называются *многосолитонными*.

Нетрудно убедиться в том, что при $N = 1$ формулы (2.61,2.62) дают уже известное нам односолитонное решение КдФ: обозначим для краткости $\gamma = \frac{\beta}{2\varkappa}e^{8\varkappa^3 t}$, тогда

$$u(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln\left(1 + \frac{\beta e^{-2\varkappa x+8\varkappa^3 t}}{2\varkappa}\right) = -2\cdot\frac{4\gamma\varkappa^2}{(e^{\varkappa x}+\gamma e^{-\varkappa x})^2} = -\frac{2\varkappa^2}{\mathrm{ch}^2\left(\varkappa(x-4\varkappa^2 t+\delta)\right)},$$

где $\delta = -\frac{1}{2\varkappa}\ln\frac{\beta}{2\varkappa}$. Легко видеть, что полученная формула в точности совпадает с формулой (2.9), если положить $c = 4\varkappa^2$. Таким образом, физический смысл квадрата спектрального параметра $\varkappa$ — скорость распространения солитона (с точностью до коэффициента); при этом параметр β отвечает за фазу.

Рассмотрим теперь более подробно случай $N = 2$ и покажем, что в этом случае безотражательный потенциал описывает взаимодействие двух солитонов. Будем для определенности считать, что $\varkappa_2 > \varkappa_1$. В этом случае формула (2.62) приводит к следующему выражению для потенциала:

$$u(x,t) =$$

$$= -2\ln\left(\left(1+\frac{\beta_1 e^{-2\varkappa_1 x+8\varkappa_1^3 t}}{2\varkappa_1}\right)\left(1+\frac{\beta_2 e^{-2\varkappa_2 x+8\varkappa_2^3 t}}{2\varkappa_2}\right)-\frac{\beta_1\beta_2}{(\varkappa_1+\varkappa_2)^2}e^{-2(\varkappa_1+\varkappa_2)x+8(\varkappa_1^3+\varkappa_2^3)t}\right)''_{xx} =$$

$$= -2\frac{d}{dx}\left(\frac{-2\varkappa_1 e^{\theta_1}-2\varkappa_2 e^{\theta_2}-2(\varkappa_1+\varkappa_2)Be^{\theta_1+\theta_2}}{1+e^{\theta_1}+e^{\theta_2}+Be^{\theta_1+\theta_2}}\right), \quad (2.63)$$

где введены следующие обозначения:

$$\theta_n = -2\varkappa_n x + 8\varkappa_n^3 t + \ln\frac{\beta_n}{2\varkappa_n}, \quad \text{где } n=1,2, \quad B = \left(\frac{\varkappa_2-\varkappa_1}{\varkappa_1+\varkappa_2}\right)^2.$$

Изучим поведение решения (2.63) вблизи прямой $\theta_1 = 0$, т.е. тогда, когда $x \sim 4\varkappa_1^2 t + \frac{1}{2\varkappa_1}\ln\frac{\beta_1}{2\varkappa_1}$. Это означает, что

$$\theta_2 = 8\varkappa_2(\varkappa_2^2-\varkappa_1^2)t + \ln\frac{\beta_2}{2\varkappa_2} - \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\ln\frac{\beta_1}{2\varkappa_1},$$

т.е. $\theta_2 \to -\infty$ при $t \to -\infty$ вдоль прямой $\theta_1 = 0$. Поскольку x входит в выражение для $u(x,t)$ экспоненциально, при переходе к пределу при $t \to -\infty$ можно пренебречь всеми выражениями, содержащими θ_2. Поэтому,

$$u(x,t) \sim -\frac{8\varkappa_1^2 e^{\theta_1}}{1+e^{\theta_1}} + 2\left(\frac{-2\varkappa_1 e^{\theta_1}}{1+e^{\theta_1}}\right)^2 = -\frac{8\varkappa_1^2 e^{\theta_1}}{(1+e^{\theta_1})^2} = -\frac{2\varkappa_1^2}{\operatorname{ch}^2\frac{\theta_1}{2}} = -\frac{2\varkappa_1^2}{\operatorname{ch}^2(\varkappa_1(x-4\varkappa_1^2 t+\delta_1))},$$

где $\delta_1 = -\frac{1}{2\varkappa_1}\ln\frac{\beta_1}{2\varkappa_1}$ т.е. в пределе при $t \to -\infty$ вдоль прямой $\theta_1 = 0$ мы видим распространение одиночного солитона амплитуды $2\varkappa_1^2$ со скоростью $4\varkappa_1^2$.

Аналогичным образом теперь изучим поведение решения (2.63) вблизи прямой $\theta_1 = 0$ при $t \to +\infty$. В данном случае $e^{-\theta_2}$ экспоненциально стремится к нулю, поэтому деля числитель и знаменатель дроби в правой части равенства (2.63) на $e^{\theta_1+\theta_2}$ и отбрасывая экспоненциально убывающие слагаемые, получаем:

$$u(x,t) \sim -2\frac{d}{dx}\left(\frac{-2\varkappa_2 e^{-\theta_1}-2(\varkappa_1+\varkappa_2)B}{e^{-\theta_1}+B}\right) = -\frac{2\varkappa_1^2}{\operatorname{ch}^2\frac{\theta_1+\ln B}{2}},$$

т.е. в пределе при $t \to +\infty$ вдоль прямой $\theta_1 = 0$ мы тоже видим распространение одиночного солитона амплитуды $2\varkappa_1^2$ со скоростью $4\varkappa_1^2$, но с измененной фазой $\tilde{\delta}_1 = \delta_1 - \frac{\ln B}{2\varkappa_1}$.

Нетрудно показать, что похожим образом устроена динамика вдоль прямой $\theta_2 = 0$: при $t \to \pm\infty$ мы имеем один и тот же солитон, но с различными фазами. Таким образом, при изменении времени t от $-\infty$ до $+\infty$ мы можем наблюдать следующую картину: солитон с большей амплитудой $2\varkappa_2^2$ догоняет солитон с меньшей амплитудой $2\varkappa_1^2$, они взаимодействуют, после чего расходятся, сохраняя свои амплитуды и свои скорости, на получая сдвиги по фазе. Это свойство взаимодействия волн в физической литературе принимается за определение солитона.

Замечание 2.16. Разобранное нами двухсолитонное решение уравнения КдФ, в некотором смысле, является модельным: можно показать, что N-солитонные решения также описывают попарные столкновения солитонов (более быстрые догоняют более медленных), и при каждом попарном взаимодействии солитоны не изменяют своей скорости и амплитуды, но получают сдвиг по фазе, см. [10].

Замечание 2.17. Отметим еще одно немаловажное свойство многосолитонных решений уравнения КдФ. Поскольку это уравнение является нелинейным, линейная комбинация его решений, вообще говоря, не является решением. Конечно, сумма двух различных односолитонных решений не даст точного решения уравнения КдФ; однако, асимптотика при больших временах у такой функции будет той же, что и у подходящего двухсолитонного решения. Таким образом, у уравнения КдФ на множестве солитонных решений наблюдается свойство “асимптотической линейности”.

Описанные нами многосолитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза интересны не только потому, что они представляют собой достаточно обширный класс точных решений этого уравнения с интересными свойствами, но и потому, что они описывают асимптотику общего решения этого нелинейного уравнения. Имеет место следующая

Теорема 2.4. *Пусть начальное условие $u(x,0)$ удовлетворяет требованию (2.12). Тогда решение соответствующей задачи Коши для уравнения КдФ имеет следующую асимптотику:*

$$u(x,t) = u_N(x,t) + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{при } t \to +\infty,$$

где u_N — N-солитонное решение, построенное по дискретному спектру оператора Шредингера с потенциалом $u(x,0)$.

2.6 Прямые методы интегрирования

Мы обсудили, как применять метод обратной задачи рассеяния к уравнению Кортевега–де Фриза. Хотя эта конструкция и является универсальной (т.е. теоретически работает для произвольных начальных данных, достатояно быстро убывающих на бесконечности), для нахождения важных классов частных решений интегрируемых нелинейных уравнений иногда бывает удобнее пользоваться прямыми методами, не требующими построения данных рассеяния и решения обратной задачи. Приведем здесь два таких метода, каждый из которых позволяет получать солитонные решения КдФ. Следует отметить, что в отличии от метода обратной задачи, прямые методы дают возможность находить лишь частные решения.

2.6.1 Метод Хироты

Опишем прямой метод отыскания солитонных решений уравнения КдФ, основанный на замене, приводящей это уравнение к так называемой *билинейной форме.*

Предложение 2.14. *Если $u(x,t)$ — решение уравнения Кортевега–де Фриза, то функция $f(x,t)$, определяемая равенством $u = -2(\ln f)_{xx}$, удовлетворяет следующему уравнению:*

$$ff_{xt} - f_x f_t + ff_{xxxx} - 4f_x f_{xxx} + 3f_{xx}^2 = 0. \tag{2.64}$$

Доказательство.

Перепишем уравнение КдФ в виде

$$u_t + u_{xxx} - 3(u^2)_x = 0$$

и подставим туда $u = -2(\ln f)_{xx}$. После однократного интегрирования имеем:

$$(\ln f)_{xt} + (\ln f)_{xxxx} + 6\left((\ln f)_{xx}\right)^2 = 0. \tag{2.65}$$

Дифференцируя логарифмическую производную, получаем:

$$(\ln f)_{xt} = \frac{f_{xt}}{f} - \frac{f_x f_t}{f^2}$$

$$(\ln f)_{xxx} = \left(\frac{f_{xx}}{f} - \left(\frac{f_x}{f}\right)^2\right)_x = \frac{f_{xxx}}{f} - 3\frac{f_x f_{xx}}{f^2} + 2\left(\frac{f_x}{f}\right)^3$$

$$(\ln f)_{xxxx} = \frac{f_{xxxx}}{f} - 4\frac{f_x f_{xx}}{f^2} - 3\left(\frac{f_{xx}}{f}\right)^2 + 12\frac{f_{xx}\left(f_x\right)^2}{f^3} + 6\left(\frac{f_x}{f}\right)^4.$$

Подставляя полученные выражения для производных в уравнение (2.65), приходим к уравнению (2.64), Q.e.d.

Замечание 2.18. В литературе уравнение (2.64) обычно называется *билинейным уравнением Хироты*, а переход от нелинейного уравнения к уравнению, линейному по каждой входящей в него переменной и однородному степени два в этом смысле — *методом Хироты*. На первый взгляд кажется, что уравнение (2.64) ничем не лучше исходного уравнения КдФ, но, как мы увидим, его билинейная структура принесет свои плоды при построении солитонных решений. На самом деле, ничего удивительного в том, что уравнение Хироты оказывается связанным с солитонными решениями КдФ нет, поскольку замена, приводящая к нему, списана с формулы (2.62) для восстановления безотражательного потенциала, где $f(x,t) = \det A(x,t)$. Более того, поскольку солитонные решения выражаются через этот определитель, исследование уравнения, которому он удовлетворяет, выглядит даже более естественным.

Будем искать решение уравнения (2.64) в виде формального ряда теории возмущений по малому параметру ε:

$$f = 1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \ldots \tag{2.66}$$

Подставим этот ряд в уравнение Хироты и разложим по степеням ε. Тогда уравнение (2.64) сведется к бесконечной серии уравнений на функции $f^{(n)}$. Первые два нетривиальных уравнения из этого бесконечного списка имеют следующий вид:

$$f^{(1)}_{xt} + f^{(1)}_{xxxx} = 0 \tag{2.67}$$

$$f^{(2)}_{xt} + f^{(2)}_{xxxx} = f^{(1)}_x f^{(1)}_t - 3\left(f^{(1)}_{xx}\right)^2 + 4 f^{(1)}_x f^{(1)}_{xxx}; \tag{2.68}$$

дальнейшие уравнения в этом списке уже черезчур громоздкие, и мы не будем их здесь приводить. Отметим, что первое из этих уравнений является линейным, что будет важно для нас в дальнейшем.

Пусть m, n — неотрицательные целые числа, а V — некоторое функциональное пространство. Определим *оператор Хироты* $D_x^m D_t^n : V \times V \to V$ равенством

$$D_x^m D_t^n(f,g) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \xi}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right)^n \left(f(x,t)g(\xi,\tau)\right)\right)\bigg|_{\xi=x,\tau=t}.$$

Оператор Хироты удовлетворяет целому ряду легко проверяемых свойств, таких, как, например, билинейность или специального вида симметричность (см. [13], стр. 326–327). Используя эти свойства, нетрудно проверить, что поскольку уравнение Хироты (2.64) билинейно (в указанном выше смысле), оно может быть переписано в виде

$$(D_x D_t - D_x^4)(f,f) = 0.$$

В силу линейности оператора Хироты очевидно, что после разложения по степеням ε для каждого натурального n коэффициент при ε^n имеет вид

$$\sum_{k=0}^{n} (D_x D_t - D_x^4)(f^{(k)}, f^{(n-k)}), \tag{2.69}$$

где принято соглашение $f^{(0)} \equiv 1$.

Прямой проверкой доказывается следующее

Предложение 2.15. *Для любого натурального N линейное уравнение (2.67) допускает решение вида*

$$f^{(1)}(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e^{k_n x - k_n^3 t}, \tag{2.70}$$

где a_n, k_n — произвольные постоянные.

При $N = 1$ легко убедиться в том, что подстановка решения вида (2.70) в уравнение (2.68) приводит к уравнению

$$(D_x D_t - D_x^4)(f^{(2)}, f^{(2)}) = 0,$$

у которого есть тривиальное решение $f^{(2)} \equiv 0$. Далее, очевидно, что при таком выборе $f^{(2)}$ все остальные уравнения (2.69) допускают тривиальные решения $f^{(n)} \equiv 0$, т.е. ряд (2.66) по степеням ε обрывается на втором члене. Таким образом,

$$f(x,t) = 1 + e^{k_1 x - k_1^3 t}.$$

Нетрудно проверить, что двукратное дифференцирование логарифма этого решения уравнения Хироты даст односолитонное решение уравнения КдФ.

Задача 2.4. Показать, что при $N = 2$ выбор тривиального решения $f^{(3)} \equiv 0$ следующего уравнения обрубает ряд (2.66) на третьем члене и что соответствующее решение уравнения Хироты приводит к двухсолитонному решению уравнения КдФ.

На самом деле, можно показать, что выбор решения уравнения (2.67) в виде (2.70), во-первых, делает ряд (2.66) конечным, а, во-вторых, приводит к N-солитонным решениям КдФ при любом натуральном N. Мы не будет доказывать этот факт (его индуктивное доказательство весьма громоздко и описано, например, в книге [1], стр. 202–207), а лишь сформулируем его строго.

Теорема 2.5. *Пусть N — произвольное натуральное число. Тогда если выбрать решение уравнения (2.67) в виде*

$$f^{(1)}(x,t) = \sum_{n=1}^{N} e^{\theta_n},$$

где $\theta_n = k_n x - k_n^3 t + \ln \alpha_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots, N$, а k_n и α_n — произвольные постоянные, то уравнение Хироты допускает решение в виде конечного ряда (2.66), где

$$f^{(N+1)} = F^{(N+2)} = \cdots \equiv 0.$$

Это решение f_N выражается следующей формулой:

$$f_N(x,t) = \sum \exp\left(\sum_{n=1}^{N} \mu_n \theta_n + \sum_{1 \leqslant n < m}^{N} \mu_n \mu_m B_{nm} \right),$$

где все μ_n могут принимать значение 0 или 1, внешнее суммирование ведется по всевозможным наборам $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ из нулей и единиц, а коэффициенты B_{nm} имеют следующий вид:

$$B_{nm} = 2 \ln \left(\frac{k_n - k_m}{k_n + k_m} \right).$$

При этом $u_N(x,t) = -2(\ln f_N(x,t))_{xx}$ является N-солитонным решением уравнения КдФ.

2.6.2 Преобразования Бэклунда

Обсудим теперь еще один прямой метод, позволяющий строить солитонные решения уравнения КдФ.

Определение 2.5. Пусть $E_1(x,t,u,u_x,u_t,\dots)=0$ и $E_2(x,t,v,v_x,v_t,\dots)=0$ — два уравнения в частных производных на неизвестные функции $u(x,t)$ и $v(\xi,\tau)$ соответственно. Будем говорить, что соотношения

$$v_x = F(x,t,u,v,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\dots), \quad v_t = G(x,t,u,v,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\dots) \tag{2.71}$$

задают *преобразование Бэклунда* для этих уравнений, если выполнены следующие условия:

i) для всякого решения u уравнения $E_1=0$ функция v, определяемая формулами (2.71) с точностью до констант интегрирования, является решением уравнения $E_2=0$, причем условие совместности $v_{xt}\equiv v_{tx}$ равенств (2.71) эквивалентно уравнению $E_1=0$;

ii) уравнения (2.71) могут быть разрешены относительно u_x и u_t в точке общего положения т.е. существуют функции $\tilde F$ и $\tilde G$ такие, что

$$u_x = \tilde F(x,t,v,u,v_x,v_t,v_{xx},v_{xt},v_{tt},\dots), \quad u_t = G(x,t,v,u,v_x,v_t,v_{xx},v_{xt},v_{tt},\dots); \tag{2.72}$$

iii) для всякого решения v уравнения $E_2=0$ функция u, определяемая формулами (2.72) с точностью до констант интегрирования, является решением уравнения $E_1=0$, причем условие совместности $u_{xt}\equiv u_{tx}$ равенств (2.71) эквивалентно уравнению $E_2=0$.

Пример 2.3. Рассмотрим *модифицированние уравнение Кортевега–де Фриза* (сокращенно мКдФ):

$$u_t + u_{xxx} - 6u^2 u_x = 0.$$

Прямая проверка показывает, что *преобразование Миуры*

$$v = u_x + u^2 \tag{2.73}$$

переводит произвольное его решение в решение уравнения КдФ:

$$v_t = u_{xt} + 2uu_t, \quad v_x = u_{xx} + 2uu_x, \quad v_{xx} = u_{xxx} + 2u_x^2 + 2uu_{xx}, \quad v_{xxx} = u_{xxxx} + 6u_x u_{xx} + 2uu_{xxx},$$

поэтому

$$\begin{aligned} v_t + v_{xxx} - 6vv_x &= u_{xt} + 2uu_t + u_{xxxx} + 6u_x u_{xx} + 2uu_{xxx} - 6(u_x+u^2)(u_{xx}+2uu_x) = \\ &= -u_{xxxx} + 12uu_x^2 + 6u^2u_{xx} - 2u(u_{xxx} - 6u^2u_x) + u_{xxxx} + 6u_xu_{xx} + 2uu_{xxx} - \\ &\qquad - 6u_xu_{xx} - 6u^2u_{xx} - 12uu_x^2 - 12u^3u_x = 0. \end{aligned}$$

Убедимся в том, что преобразование Миуры является частным случаем преобразования Бэклунда. В данном случае, у нас нет связи между неизвестными функциями вида (2.71), формула (2.73) намного проще, поскольку она — явная. Тем не менее, продифференцировав (2.73) по переменным x и t, мы легко получим соотношения вида (2.71):

$$v_x = u_{xx} + 2uu_x, \quad v_t = u_{xt} + 2uu_t = -u_{xxxx} - 2uu_{xxx} + 6u^2u_{xx} + 12uu_x^2 + 12u^3u_x.$$

С помощью перекрестного дифференцирования нетрудно проверить, что эти формулы совместны, если и только если u — решение уравнения мКдФ (хотя в данном случае это условие тривиально, поскольку изначально замена была явной).

Выведем теперь формулы для обратной замены. Из равенства $v_t = u_{xt} + 2uu_t$, пользуясь уравнением мКдФ, получаем:

$$2uu_t = v_t - u_{xt} = v_t + u_{xxxx} - 12uu_x^2 - 6u^2u_xx. \tag{2.74}$$

Дифференцируя теперь равенство (2.73) по переменной x, имеем:

$$u_{xx} = v_x - 2uv + 2u^3, \quad u_{xxxx} = v_{xxx} - 6vv_{xx} - 2uv_{xx} + 10u^2v_x + 16uv^2 - 40u^3v + 24u^5;$$

подставляя полученные выражения для производных в (2.74), окончательно находим:

$$u_x = v - u^2, \quad u_t = -v_{xx} + 2uv_x + 2v^2 - 2u^2v.$$

Нетрудно проверить, что модифицированое преобразование Миуры

$$v = u_x + u^2 + c,$$

где $c = \mathrm{const}$, связывает уравнением КдФ с уравнением

$$u_t + u_{xxx} - 6(u^2 + c)u_x = 0, \tag{2.75}$$

которое допускает замену $u \to -u$. Это означает, что функция

$$v_1 = -u_x + u^2 + c$$

удовлетворяет уравнению КдФ. Таким образом, замена $v \mapsto v_1$ задает автопреобразование Бэклунда для этого уравнения.

Можно записать композицию прямого и обратного преобразований Миуры и получить формулы для автопреобразования Бэклунда для уравнения КдФ, но мы введем дополнительные переменные w и w_1 равенствами $v = w_x$ и $v_1 = w_{1,x}$ и запишем в преобразование Бэклунда в их терминах.

Предложение 2.16. *Имеют место следующие формулы:*

$$\begin{cases} (w + w_1)_x = (w - w_1)^2 + c \\ (w + w_1)_t = 6(w + w_1)_x(w - w_1)_x + (w - w_1)_{xxx} \end{cases}. \tag{2.76}$$

Доказательство.

Соотношения (2.76) немедленно вытекают из того, что $u = w - w_1$ удовлетворяет уравнению (2.75) и из равенства $u^2 + c = (w + w_1)_x$, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Рассмотрим тривиальное решение $v = 0$ уравнения КдФ и положим $w = 0$. Тогда система (2.76) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} w_{1,x} = w_1^2 + c \\ w_{1,t} = -6w_{1,x}^2 - w_{1,xxx} \end{cases}. \tag{2.77}$$

Первое из этих уравнений легко интегрируется; будем дальше предполагать, что $c = -\varkappa^2 < 0$. Тогда его общее решение записывается в виде

$$\left|\frac{w_1 - \varkappa}{w_1 + \varkappa}\right| = e^\theta,$$

где $\theta = 2\varkappa(x + a)$ и $a = a(t)$ — произвольная функция одного аргумента. Если модуль раскрывается со знаком минус, то общее решение записывается в виде $w_1 = -\varkappa \operatorname{th} \frac{\theta}{2}$, откуда получаем, что

$$v_1 = -\frac{\varkappa^2}{\operatorname{ch}^2 \theta}.$$

Дифференцируя функцию w_1, имеем:

$$w_{1,t} = -\frac{\varkappa^2 a'(t)}{\operatorname{ch}^2(\varkappa(x+a(t)))}, \quad w_{1,x} = -\frac{\varkappa^2}{\operatorname{ch}^2(\varkappa(x+a(t)))},$$
$$w_{1,xxx} = -\frac{6\varkappa^4 \operatorname{sh}^2(\varkappa(x+a(t)))}{\operatorname{ch}^6(\varkappa(x+a(t)))} + \frac{2\varkappa^4}{\operatorname{ch}^2(\varkappa(x+a(t)))}.$$

Подставляя выражения для производных во второе из уравнений (2.77), получаем, что $a'(t) = -4\varkappa^2$, откуда $a = -4\varkappa^2 t + \delta$, где δ — константа интегрирования. Таким образом,

$$v_1(x,t) = -\frac{\varkappa^2}{\operatorname{ch}^2(\varkappa(x - 4\varkappa^2 t + \delta))},$$

т.е. преобразование Бэклунда переводит тривиальное решение уравнения Кортевега–де Фриза в односолитонное решение.

Задача 2.5. Проверить, что применение преобразования Бэклунда с другой константой $\tilde{c}$ к полученному односолитонному решению даст двухсолитонное решение КдФ.

Можно показать (см. [1], стр. 186–188), что последовательное применение N преобразований Бэклунда с различными константами к тривиальному решению уравнения КдФ даст N-солитонное решение: каждое преобразование Бэклунда добавляет одно собственное значение к спектру соответствующего оператора Шредингера, т.е. увеличивает количество солитонов на единицу.

Замечание 2.19. Ситуация, когда цепочка преобразований, переводящих решения уравнений в решения, позволяет из тривиального решения получать нетривиальные, довольно типична в теории интегрируемых систем. Мы уже сталкивались с подобной схемой при изучении преобразований Дарбу для одномерных дифференциальных операторов: цепочка преобразований Дарбу позволяет "одеть" какой-нибудь простой оператор (например, ∂^2) и получить нетривиальные решения соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений.

2.7 Полная интегрируемость КдФ

Мы описали общую схему интегрирования уравнения КдФ методом обратной задачи рассеяния и обсудили некоторые прямые методы интегрирования этого уравнения. Теперь наша задача состоит в том, чтобы описать гамильтонову и бигамильтонову теории уравнения КдФ и на примере этого уравнения показать, как обобщаются на бесконечномерный случай, т.е. на случай эволюционных уравнений в частных производных вида

$$u_t = K(u, u_x, u_{xx}, \dots) \tag{2.78}$$

те понятия, которые мы изучали в Главе 1 для конечномерных динамических систем.

2.7.1 Теоретико-полевые скобки Пуассона

В конечномерном случае наиболее общий подход к интегрируемым системам был связан с понятием пуассоновой структуры. Введем теперь бесконечномерный аналог скобки Пуассона и попытаемся записать уравнение КдФ в гамильтоновом виде относительно такой обобщенной скобки Пуассона. И изученном нами случае пуассонова многообразия пуассонова структура — это бивектор, т.е. билинейная функция, действующая на ковекторах — на градиентах функций, определенных на этом пуассоновом многообразии. Поэтому при переходе к бесконечномерному случаю естественно заменить гладкие функции на дифференцируемые функционалы; для интегральных функционалов вида

$$\mathcal{S} = \int_{-\infty}^{+\infty} L(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) dx,$$

как мы уже обсуждали (см. Замечание 1.4), бесконечномерным аналогом градиента является вариационная производная

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta u(x)} = \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right) + \dots$$

(см. раздел 1.1.4). Мы не будем давать общих определений, пригодных для систем эволюционных уравнений и использующих формальное вариационное исчисление (эта техника подробно изложена, например, в книге [18]), а ограничимся лишь частным случаем, который проиллюстрируем примером уравнения КдФ.

Определение 2.6. *Теоретико-полевой скобкой Пуассона* двух дифференцируемых по Гато интегральных функционалов $\mathcal{F} = \mathcal{F}(u, u_x, u_{xx}, \dots)$ и $\mathcal{G} = \mathcal{G}(u, u_x, u_{xx}, \dots)$ называется функционал

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u(x)} D\left(\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta u(x)}\right) dx, \tag{2.79}$$

где D — некоторый линейный оператор, определенный на вариационных производных таких интегральных функционалах, если выполнены условие кососимметричности $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = -\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}$ и тождество Якоби. При этом линейный оператор D называется *гамильтоновым оператором.*

Замечание 2.20. Мы не будем вдаваться в детали и, например, аккуратно описывать то пространство, на котором действуют рассматриваемые функционалы. Тем более, мы не будем исследовать условия, при которых оператор D является гамильтоновым, отсылая читателя к книге [18]. Наша задача на данном этапе состоит лишь в том, чтобы показать, что те скобки Пуассона, которые мы введем ниже для уравнения КдФ, являются вполне естественными бесконечномерными аналогами скобок Пуассона, введенных в Главе 1. Отметим также, что гамильтонов оператор при этом является аналогом пуассонова бивектора: в самом деле, конечномерную скобку Пуассона можно в координатах записать следующим образом:

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^{n} \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^{n} (\nabla f)_i D\,(\nabla g)^i\,,$$

где $D = (\omega^{ij})$ — линейное отображение, определенное на ковекторах.

Определение 2.7. Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{H}(u, u_x, u_{xx}, \dots)$ — некоторый интегральный функционал. Тогда представление уравнения (2.78) в виде $u_t = \{\mathcal{H}, \mathcal{X}\}$, где $\mathcal{X}$ — функционал взятия значения в точке x,

$$\mathcal{X}(u) = \int_{\infty}^{+\infty} \delta(x-y) u(y) dy = u(x),$$

$\{\cdot,\cdot\}$ — некоторая теоретико-полевая скобка Пуассона, а $\delta(x)$ — дельта-функция, называется *гамильтоновым.* При этом функционал $\mathcal{H}$ называется *гамильтонианом.*

Замечание 2.21. Легко видеть, что данное определение гамильтоновой системы вполне согласуется с конечномерным: если в конечномерном случае в правой части стояла скобка Пуассона гамильтониана с координатными функциями, то в бесконечномерном — там стоит теоретико-полевая скобка с координатным функционалом взятия значения в точке.

Замечание 2.22. Следует понимать, что представление $u_t = \{\mathcal{H}, \mathcal{X}\}$, на самом деле, является равенством функционалов (левую часть тоже надо интерпретировать как функционал взятия значения частной производной по t), хотя, будучи записанным в координатах, оно принимает вид эволюционного уравнения (2.78).

2.7.2 Скобка Гарднера–Захарова–Фаддеева

Определение 2.8. *Скобкой Гарднера–Захарова–Фаддеева называется теоретико-полевая скобка Пуассона вида (2.79), соответствующая гамильтонову оператору $D = \partial/\partial x$ взятия полной производной по переменной x:*

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta u(x)} \right) dx.$$

Замечание 2.23. Поскольку мы работаем на пространстве быстро убывающих функций, кососимметричность скобки Гарднера–Захарова–Фаддеева очевидна — интегрируя по частям, имеем:

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta u(x)} \right) dx = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u(x)} \right) \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta u(x)} dx = -\{\mathcal{G}, \mathcal{F}\}.$$

В данном случае справедливость тождества Якоби вытекает из того, что гамильтонов оператор не зависит от точки u. Вообще говоря, непосредственная проверка справедливости тождества Якоби для теоретико-полевых скобок весьма затруднительна. Формальные вариационные методы позволяют сделать проверку тождества Якоби более эффективной, сведя ее проверке некоторого бесконечномерного аналога условия Схоутена (см. [18]).

Предложение 2.17. *Уравнение КдФ является гамильтоновой системой относительно скобки Гарднера–Захарова–Фаддеева с гамильтонаином*

$$\mathcal{H} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{u_x^2}{2} - u^3 \right) dx. \tag{2.80}$$

Доказательство.

Найдем вариационную производную гамильтониана (2.80)

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u(x)} = \frac{\partial}{\partial u} \left(-\frac{u_x^2}{2} - u^3 \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial u_x} \left(-\frac{u_x^2}{2} - u^3 \right) \right) = u_{xx} - 3u^2$$

и проверим, что скобка координатного функционала с гамильтонианом дает правую часть уравнения КдФ:

$$\{\mathcal{H}, \mathcal{X}\} = -\{\mathcal{X}, \mathcal{H}\} = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta \mathcal{X}}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u(x)} \right) dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-y) \frac{\partial}{\partial y} \left(3u^2 - u_{yy} \right) dy = 6uu_x - u_{xxx},$$

Q.e.d.

Замечание 2.24. Иногда в литературе теоретико-полевая скобка Гарднера–Захарова–Фаддеева вводится равенством
$$\{u(x), u(y)\} = \delta'(y - x). \tag{2.81}$$
Эту запись нужно понимать следующим образом: в левой части стоят координатные функционалы взятия значений в точках x и y; в наших обозначениях их скобка Пуассона запишется следующим образом:
$$\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta \mathcal{X}}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta \mathcal{Y}}{\delta u(x)} \right) dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - z)\delta'(y - z)dz = \delta'(y - x).$$
Как мы значем, в конечномерном случае достаточно задать скобки Пуассона координатных функций, а затем, пользуясь тождеством Лейбница, можно вычислить скобку Пуассона двух произвольных функций. Аналогичный подход можно развить и в бесконечномерном случае, но здесь аналогом скобки Пуассона координатных функций является скобка Пуассона функционалов взятия значения функции в точке, т.е. $\delta'(y - x)$ является беконечномерным аналогом матрицы пуассоновой структуры. Именно поэтому, на самом деле, формула (2.81) полностью задает скобку Гарднера–Захарова–Фаддеева и иногда принимается за ее определение.

2.7.3 Интегралы Крускала

При исследовании конечномерных динамических систем важную роль для нас играла задача нахождения первых интегралов. Поэтому в бесконечномерном аналоге этой теории тоже вполне естественно заняться поиском интегралов движения, т.е. таких функционалов, зависящих от $u, u_x, u_{xx}, \ldots$, которые не изменяются в силу соответствующего эволюционного уравнения. В случае уравнения КдФ, как мы знаем, функция спектрального параметра $a(k)$ не изменяется со временем (уравнения Гарднера–Грина–Крускала–Миуры), т.е. является интегралом движения для этого уравнения. Однако, эта функция задана неявно — для ее нахождения по заданному потенциалу оператора Шредингера нужно решить одно из интегральных уравнений (2.27), а затем воспользоваться формулой (2.36). Тем не менее, оказывается, что по этой функции можно построить производящую функцию для интегралов уравнения КдФ, которые могут быть найдены явно, и плотности которых полиномиально зависят от $u, u_x, u_{xx}, \ldots$

Пусть $\varphi_1(x, k)$ — аналитическое продолжение функции Йоста для оператора Шредингера, заданной своей асимптотикой $\varphi_1(x, k) = e^{-ikx} + o(1)$ при $x \to -\infty$, в полуплоскость $\operatorname{Im} k > 0$. Рассмотрим функцию $\zeta(x, k) = ik + (\ln \varphi_1(x, k))'$ (здесь и на протяжении всего параграфа штрих обозначает производную по переменной x). Поскольку функция Йоста φ_1 продолжается в верхнюю плоскость с сохранением своей асимптотики по x, интегрируя, получаем:
$$\varphi_1(x, k) = e^{ikx + \int\limits_{-\infty}^{x} \zeta(y,k)dy}.$$
Поэтому, из формул (2.36) и (2.37) немедленно вытекает, что если $\operatorname{Im} k > 0$, то
$$a(k) = \lim_{x\to+\infty} \chi_+(x, k) = \lim_{x\to+\infty} \varphi_1(x, k)e^{ikx} = \lim_{x\to+\infty} e^{\int\limits_{-\infty}^{x} \zeta(y,k)dx}.$$
Таким образом, при достаточно больших $|k|$ (поскольку $a(k)$ обращается в нуль лишь в точках дискретного спектра, а их конечное число, достаточно потребовать $|k| > \varkappa_1$) имеет место равенство
$$\ln a(k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \zeta(x, k)dx. \tag{2.82}$$

Поэтому то обстоятельство, что коэффициент $a(k)$ является интегралом движения для уравнения КдФ, наводит на мысль попытаться представить функцию $\zeta(x,k)$ в качестве производящей для бесконечного набора интегралов КдФ, использовав k как спектральный параметр.

Предложение 2.18. *Функция $\zeta(x,k)$ удовлетворяет уравнению Риккати*

$$\zeta' + \zeta^2 - 2ik\zeta - u = 0. \tag{2.83}$$

Решение этого уравнения может быть найдено в виде формального ряда по параметру k, где $\operatorname{Im} k > 0$, $|k| \to \infty$:

$$\zeta(x,k) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\zeta_j(x)}{(2ik)^j}. \tag{2.84}$$

Доказательство.

Подставим функцию ζ в уравнение Рикатти и воспользуемся уравнением Шредингера:

$$\zeta' + \zeta^2 - 2ik\zeta = \left(\frac{\varphi_1''}{\varphi_1} - \left(\frac{\varphi_1'}{\varphi_1}\right)^2\right) + \left(ik + \frac{\varphi_1'}{\varphi_1}\right)^2 - 2ik\left(ik + \frac{\varphi_1'}{\varphi_1}\right) = \frac{\varphi_1''}{\varphi_1} + k^2 = u.$$

Далее, поскольку для функции $\chi_+(x,k) = e^{ikx}\varphi_1(x,k)$ справедлива следующая асимптотика (см. [22, 23]) по параметру k,

$$\chi_+(x,k) = 1 - \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{x} u(y)dy + o\left(\frac{1}{k}\right), \quad |k| \to \infty,\ \operatorname{Im} k > 0,$$

функция $\zeta(x,k)$ стремится к нулю при $|k| \to \infty$. Поэтому ее разложение в формальный ряд на бесконечности по параметру k имеет вид (2.84), $\mathfrak{Q.e.d.}$

Предложение 2.19. *Коэффициенты разложения (2.84) вещественны и удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:*

$$\zeta_1(x) = -u(x), \quad \zeta_{j+1}(x) = \zeta_n'(x) + \sum_{l=1}^{j-1} \zeta_l(x)\zeta_{j-l}(x), \quad j = 1, 2, \dots \tag{2.85}$$

Доказательство.

Подставляя ряд (2.84) в уравнение (2.83), разложим результат по степеням k. Легко видеть, что в этом разложении будут присутствовать неположительные степени спектрального параметра k. Равенство нулю свободного члена дает первую из формул (2.85), а равенство нулю коэффициентов при k^{-j}, где $j > 1$, приводит к условию:

$$\frac{\zeta_j'(x)}{(2i)^j} + \sum_{m+l=j} \frac{\zeta_m(x)}{(2i)^m}\frac{\zeta_l(x)}{(2i)^l} - 2i\frac{\zeta_{j+1}(x)}{(2i)^{j+1}} = 0,$$

которое немедленно дает вторую из формул (2.85). Вещественность всех ζ_n следует из явного вида рекуррентных формул (2.85), $\mathfrak{Q.e.d.}$

Пример 2.4. Нетрудно вычислить несколько первых коэффициентов ряда (2.84):

$$\begin{aligned}
\zeta_2(x) &= -u_x,\\
\zeta_3(x) &= -u_{xx} + u^2,\\
\zeta_4(x) &= -u_{xxx} + 4uu_x,\\
\zeta_5(x) &= -u_{xxxx} + 5u_x^2 + 6uu_{xx} - 2u^3.
\end{aligned}$$

Легко заметить, что ζ_2 и ζ_4 являются полными производными.

Теорема 2.6. *Функции*

$$\mathcal{I}_j = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \zeta_{2j+3}(x)dx, \quad j = -1, 0, 1, \dots \tag{2.86}$$

являются интегралами движения для уравнения Кортевега-де Фриза. Каждый из них полиномиально зависит от функции u и ее производных по переменной x. Интегралы от четных коэффициентов ряда (2.84) равны нулю.

Доказательство.

Тот факт, что функционалы (2.86) являются интегралами движения, немедленно вытекает из того, что функция $a(k)$ не изменяется со временем. Полиномиальность этих интегралов следует из рекуррентной формулы (2.85). Осталось показать, что интегралы от четных коэффициентов тривиальны. Рассмотрим для этого вещественную и мнимую части функции $\zeta(x,k)$: пусть

$$\xi(x,k) = \operatorname{Re}\zeta(x,k), \quad \eta(x,k) = \operatorname{Im}\zeta(x,k).$$

Тогда при вещественном k в силу вещественности потенциала мнимая часть уравнения (2.83) принимает вид

$$\eta' + 2\xi\eta - 2k\xi = 0,$$

откуда

$$\xi = \frac{\eta'}{2(k-\eta)} = -\frac{1}{2}\left(\ln(\eta - k)\right)'_x.$$

Но при вещественном k из (2.84) имеем:

$$\xi(x,k) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\zeta_{2j}(x)}{(2k)^{2j}},$$

откуда следует, что все четные коэффициенты ряда (2.84) являются полными производными по x. А это означает, что интегралы от них зануляются, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 2.25. Полиномиальные интегралы движения (2.86) для уравнения КдФ иногда называются *интегралами Крускала.*

Пример 2.5. Подставляя явные выражения для коэффициентов ζ_n при небольших n, имеем:

$$\mathcal{I}_{-1} = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx,$$

$$\mathcal{I}_0 = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (-u_{xx} + u^2)dx = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2(x,t)dx,$$

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (-u_{xxxx} + 5u_x^2 + 6uu_{xx} - 2u^3)dx = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (u_x^2 + 2u^3)dx.$$

Легко заметить, что интеграл $\mathcal{I}_1$ совпадает с гамильтонианом (2.80).

Описанная выше рекуррентная процедура позволяет легко строить интегралы движения для уравнения КдФ. Более того, можно показать, что для бесконечно гладких потенциалов интегралы Крускала явным образом выражаются через данные рассеяния. А именно, имеет место следующее

Предложение 2.20. *Если коэффициент отражения $r(k)$ убывает при $|k| \to \infty$ быстрее любой степени $\frac{1}{k}$, то для любого $j = -1, 0, 1, \ldots$ имеет место формула*

$$\mathcal{I}_j = \frac{2^{2j+3}}{2j+3} \sum_{n=1}^{N} \varkappa_n^{2j+3} - (-1)^j \frac{2^{2j+2}}{\pi} \int_0^{+\infty} \nu^{2j+2} \ln(1 - |r(\nu)|^2) d\nu. \tag{2.87}$$

Доказательство.

Воспользуемся доказанной ранее форулой (2.34) и запишем асимптотический ряд для функции $\ln a(k)$ по степеням $\frac{1}{k}$ при $|k| \to \infty$. Имеем:

$$\ln \prod_{n=1}^{N} \frac{k - i\varkappa_n}{k + i\varkappa_n} = \sum_{n=1}^{N} \ln \frac{k - i\varkappa_n}{k + i\varkappa_n} = \sum_{n=1}^{N} \ln \frac{1 - \frac{i\varkappa_n}{k}}{1 + \frac{i\varkappa_n}{k}} =$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \left(-\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{i\varkappa_n}{k} \right)^j - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \left(\frac{i\varkappa_n}{k} \right)^j \right) = -\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{2j-1} \left(\frac{i\varkappa_n}{k} \right)^{2j-1}.$$

Далее, поскольку

$$\frac{1}{\nu - k} = -\frac{1}{1 - \frac{\nu}{k}} \frac{1}{k} = -\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{k} \right)^j \cdot \frac{1}{k} = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\nu^{j-1}}{k^j},$$

имеем:

$$\fint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1 - |r(\nu)|^2)}{\nu - k} d\nu = -\sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nu^{j-1}}{k^j} \ln\left(1 - |r(\nu)|^2\right) d\nu = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k^j} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^{j-1} \ln\left(1 - |r(\nu)|^2\right) d\nu,$$

откуда видно, что коэффициенты при четных степенях k равны нулю в силу того, что $|r(-\nu)| = |r(\nu)|$ при вещественных ν. Кроме того, поскольку $r(k)$ по предположению убывает быстрее любой степени $\frac{1}{k}$, множитель $(1 - |r(k)|^2)^{-1/2}$ не даст никакого вклада в асимптотический ряд:

$$\left(1 - |r(k)|^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}|r(k)|^2 - \frac{3}{8}|r(k)|^4 + \ldots$$

Таким образом, получаем:

$$\ln a(k) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i}{k^{2j-1}} \left(\frac{2(-1)^j}{2j-1} \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa_n^{2j-1} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^{2j-2} \ln\left(1 - |r(\nu)|^2\right) d\nu \right) =$$
$$= \sum_{j=-1}^{\infty} \frac{i}{k^{2j+3}} \left(\frac{2(-1)^j}{2j+3} \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa_n^{2j+3} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^{2j+2} \ln\left(1 - |r(\nu)|^2\right) d\nu \right) =$$
$$= \sum_{j=-1}^{\infty} \frac{i(-1)^j}{(2k)^{2j+3}} \left(\frac{2^{2j+4}}{2j+3} \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa_n^{2j+3} - \frac{(-1)^j 2^{2j+3}}{\pi} \int_0^{+\infty} \nu^{2j+2} \ln\left(1 - |r(\nu)|^2\right) d\nu \right), \tag{2.88}$$

где мы перешли от интегрирования по вещественной оси к интегрированию по полуоси ввиду того, что $|r(-\nu)| = |r(\nu)|$.

С другой стороны, перепишем теперь формулу (2.82), учитывая разложение (2.84) и то, что интегралы от ζ_j зануляются при нечетных j:

$$\ln a(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x,k)dx = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2ik)^j} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_j(x)dx = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2ik)^{2j-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_{2j-1}(x)dx =$$

$$\sum_{j=-1}^{\infty} \frac{1}{(2ik)^{2j+3}} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_{2j+3}(x)dx = \sum_{j=-1}^{\infty} \frac{i(-1)^j}{(2k)^{2j+3}} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_{2j+3}(x)dx = \sum_{j=-1}^{\infty} \frac{i(-1)^j}{(2k)^{2j+3}} \cdot 2\mathcal{I}_j \quad (2.89)$$

(в последнем равенстве мы воспользовались формулой (2.86)). Теперь, сопоставляя выражения (2.88) и (2.89), окончательно получаем требуемое равенство (2.87), $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 2.26. Легко заметить, что формула (2.87) дает явное выражение всех интегралов Крускала в терминах данных рассеяния, что, впрочем, неудивительно. В частности, гамильтониан $\mathcal{H}$ для уравнения КдФ имеет вид

$$\mathcal{H} = \mathcal{I}_1 = \frac{32}{5} \sum_{n=1}^{N} \varkappa_j^5 + \frac{16}{\pi} \int_0^{+\infty} \nu^4 \ln\left(1 - |r(\nu)|^2\right) d\nu.$$

Замечание 2.27. Можно показать, что если потенциал оператора Шредингера является бесконечно гладким, то коэффициент отражения $r(k)$ убывает при $|k| \to \infty$ быстрее любой степени $\frac{1}{k}$, т.е. в этом случае применимо Предложение 2.20.

2.7.4 Переменные “действие-угол”

2.8 Бигамильтонова теория КдФ

Глава 3

Другие примеры интегрируемых систем

Первая глава данного курса посвящена изучению систем обыкновенных дифференциальных уравнений и интегрируемости этих систем по Лиувиллю. Во второй главе изучалась теория одного замечательного уравнения — уравнения Кортевега-де Фриза (точнее, та часть этой теории, которая связана с быстро убывающими потенциалами), на примере которого мы показали, во-первых, как работает метод обратной задачи рассеяния и что такое интегрируемость методом обратной задачи, а, во-вторых, как гамильтонов подход к динамическим системам обобщается на бесконечномерный случай.

Теория интегрируемых систем, зародившись из нескольких замечательных работ, написанных в 60-е годы прошлого века, за последние четыре десятилетия бурно развилась и выделилась в самостоятельный раздел математики (который, тем не менее, очень тесно связан с другими разделами математики, такими, как дифференциальные уравнения, теория динамических систем, математическая физика, дифференциальная геометрия или даже алгебраическая геометрия). Написаны сотни замечательных работ, построена масса новых примеров интегрируемых систем, получены частичные классификационные результаты... Поэтому задача знакомства со всей теорией интегрируемых систем (или даже краткого описания всех наиболее известных интегрируемых систем) в рамках одного вводного годового курса представляется совершенно неразрешимой. Поэтому, для того, чтобы сделать картину более полной, в третьей главе мы очень кратно обсудим еще несколько примеров хорошо известных интегрируемых систем и коснемся еще нескольких подходов к интегрируемости.

3.1 Гиперболические уравнения

В этом параграфе мы кратно обсудим основные один класс явно интегрируемых уравнений в частных производных. Пока мы рассматривали более сложные подходы к интегрируемости, такие как интегрируемость по Лиувиллю или интегрируемость методом обратной задачи — методы, появившиеся во второй половине 20 века. Явная интегрируемость — это то, что интересовало классиков 19 века, таких, как Лаплас, Дарбу, Лиувилль. Но прежде чем говорить о явно интегрируемых гиперболических уравнения, разберем один простой, но поучительный и, возможно, мотивирующий пример.

3.1.1 Уравнение Лиувилля

Уравнение Лиувилля

$$u_{xy} = e^u \tag{3.1}$$

на функцию двух независимых переменных x и y было изучено и полностью проинтегрировано Ж. Лиувиллем еще в 1853 году. Подход к дифференциальным уравнениям, господствовавший в те времена, под интегрируемостью уравнения позразумевал возможность записать его общее решение в явном виде. Именно это и сделал Лиувилль, доказав следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Общее решение уравнения уравнения Лиувилля (3.1) имеет вид*

$$u(x,y) = \ln \frac{2\theta_1'(x)\theta_2'(y)}{(\theta_1(x)+\theta_2(y))^2} \tag{3.2}$$

этого уравнения, где θ_1 и θ_2 — произвольные функции[1] *одной переменной.*

Доказательство.

Пусть функция $v = v(x,y)$ удовлетворяет волновому уравнению $v_{xy} = 0$. Нетрудно проверить, что в этом случае функция

$$u = \ln \frac{2v_x v_y}{v^2}$$

удовлетворяет уравнению Лиувилля. Поскольку общее решение волнового уравнения имеет вид $v(x,y) = \theta_1(x) + \theta_2(y)$, где θ_1 и θ_2 — произвольные функции одной переменной, формула (3.2) задает решение уравнение Лиувилля для произвольных θ_1 и θ_2. Но в силу того, что формула (3.2) допускает функциональный произвол в две функции одной переменной, она задает общее решение уравнение Лиувилля, $\mathfrak{Q.e.D.}$

Кроме возможности явного нахождения общего решения, другим интересным свойством уравнения Лиувилля является наличие x- и y-*интегралов*, т.е. таких функций от зависимой переменной u и ее производных, что их полная производная в силу уравнения по переменной x (или, соответственно, по переменной y) равна нулю[2]. Понятие y-интеграла, в некотором смысле, обобщает понятие первого интеграла для системы обыкновенных дифференциальных уравнений; однако, как мы увидим дальше, в отличии от одномерного случая, наличие нетривиальных интегралов у уравнения в частных производных является обстоятельством исключительным. В самом деле, в одномерном случае, согласно теореме о выпрямлении векторного поля, всякое уравнение имеет первые интегралы (которые при этом, естественно, не обязаны выражаться в квадратурах), а в многомерном случае y-интеграл должен удовлетворять нетривиальной системе уравнений в частных производных.

Прямой проверкой доказывается следующее

Предложение 3.2. *Функции*

$$I = u_{yy} - \frac{1}{2}u_y^2 \quad \text{и} \quad J = u_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2$$

являются x- и y-интегралами соответственно для уравнения Лиувилля.

Нетрудно проверить, эти функции I и J являются *минимальными интегралами* для этого уравнения, т.е. интегралами минимального порядка. В самом деле, если предположить, что уравнение (3.1) обладает y-интегралом вида $G = G(x,y,u,u_x,u_y)$, то взятие оператора полного дифференцирования D_y немедленно приводит к тому, что функция G должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial u}u_y + \frac{\partial G}{\partial u_x}e^u + \frac{\partial G}{\partial u_y}u_{yy} = 0,$$

что невозможно, поскольку она не зависит от u_{yy}. Следует также отметить, что минимальный интеграл определен неоднозначно: например, произвольная функция $\theta = \theta(x,J)$ тоже будет y-интегралом того же порядка, что и функция J. Очевидно также, что если J — y-интеграл некоторого уравнения, то и любая функция G вида

$$G(x, J, D_y(J), \dots D_y^k(J))$$

является y-интегралом этого уравнения.

[1] Мы здесь не будем обсуждать вопрос о том, в каком функциональном пространстве ищется решение.

[2] Строгое определение y-интегралов для гиперболических уравнений будет дано ниже.

3.1.2 Преобразования Дарбу–Лапласа

Рассмотрим линейный гиперболический дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} = \partial_x \partial_y + a\partial_x + b\partial_y + c, \tag{3.3}$$

где ∂_x и ∂_y — операторы частного дифференцирования по x и y соответственно, а a, b и c — функции двух независимых переменных x и y.

Нетрудно проверить, что оператор $\mathcal{L}$ вида (3.3) можно представить в двух следующих видах:

$$\mathcal{L} = (\partial_x + b)(\partial_y + a) + k = (\partial_y + a)(\partial_x + b) + h, \tag{3.4}$$

где $k = c - ab - a_x$ и $h = c - ab - b_y$ — *инварианты Лапласа* оператора $\mathcal{L}$. Инварианты Лапласа, как мы увидим ниже, играют существенную роль в теории гиперболических уравнений. Для начала докажем несколько простых утверждений, их использующих.

Предложение 3.3. *Гиперболический оператор $\mathcal{L}$ вида (3.3) допускает факторизацию если и только если хотя бы один его инвариантов Лапласа равен нулю.*

Доказательство.

Достаточность условия $hk = 0$ очевидна из равенств (3.4). Предположим теперь, что оператор $\mathcal{L}$ раскладывается в произведение двух операторов первого порядка:

$$\mathcal{L} = (\alpha_1 \partial_x + \beta_1 \partial_y + \gamma_1)(\alpha_2 \partial_x + \beta_2 \partial_y + \gamma_2).$$

Поскольку $\mathcal{L}$ — гиперболический дифференциальный оператор, коэффициенты при ∂_x^2 и ∂_y^2 должны быть равны нулю. Это означает, что $\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2 = 0$, т.е. что либо $\alpha_1 = \beta_2 = 0$, либо $\alpha_2 = \beta_1 = 0$. Рассмотрим более подробно первый случай:

$$\mathcal{L} = (\beta_1 \partial_y + \gamma_1)(\alpha_2 \partial_x + \gamma_2) = \alpha_2\beta_1 \partial_x \partial_y + (\alpha_2\gamma_1 + \alpha_{2,y}\beta_1)\partial_x + \beta_1\gamma_2 \partial_y + (\gamma_1\gamma_2 + \beta_1\gamma_{2,y});$$

из последнего равенства следует, что $\alpha_2\beta_1 = 1$, $\alpha_2\gamma_1 + \alpha_{2,y}\beta_1 = a$, $\beta_1\gamma_2 = b$, $\gamma_1\gamma_2 + \beta_1\gamma_{2,y} = c$. Тогда

$$h = \gamma_1\gamma_2 + \beta_1\gamma_{2,y} - \alpha_2\beta_1\gamma_1\gamma_2 - \alpha_{2,y}\beta_1^2\gamma_2 - \beta_{1,y}\gamma_2 - \beta_1\gamma_{2,y} = -\gamma_2(\alpha_{2,y}\beta_1^2 + \beta_{1,y}) = 0,$$

поскольку $\alpha_2\beta_1 = 0$. Второй случай аналогично приведет у равенству $k = 0$, **Q.e.d.**

Замечание 3.1. Доказанное предложение демонстрирует принципиальную разницу между одномерным и двумерным случаями: в одномерном случае любой линейный дифференциальный оператор (не обязательно второго порядка) раскладывается в произведение простейших, а в двумерном случае уже для гиперболических операторов второго порядка факторизуемость представляет собой довольно жесткое условие зануления хотя бы одного из инвариантов Лапласа.

Задача 3.1. Доказать, что гиперболические операторы $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ вида (3.3) имеют одинаковые инварианты Лапласа тогда и только тогда, когда они связаны калибровочным преобразованием, т.е. когда найдется такая функция $\omega = \omega(x, y)$, что $\mathcal{L}_2 = \omega^{-1}\mathcal{L}_1\omega$.

Замечание 3.2. Эта задача объясняет тот факт, что функции h и k называются *инвариантами* Лапласа — они инварианты относительно калибровочных преобразований $\mathcal{L} \mapsto \omega^{-1}\mathcal{L}\omega$ гиперболического оператора $\mathcal{L}$.

Определение 3.1. *Будем говорить, что два оператора $\mathcal{L}$ и $\hat{\mathcal{L}}$ вида (3.3) связаны преобразованием Дарбу–Лапласа, если существуют дифференциальные операторы $\mathcal{D}$ и $\hat{\mathcal{D}}$ первого порядка, такие, что выполнено следующее операторное равенство*

$$\hat{\mathcal{L}}\mathcal{D} = \hat{\mathcal{D}}\mathcal{L}. \tag{3.5}$$

Замечание 3.3. Легко видеть, что преобразование Дарбу–Лапласа обобщает на двумерный случай понятие преобразования Дарбу для одномерных линейных дифференциальных операторов. Как и в одномерном случае, оператор преобразования $\mathcal{D}$ переводит решения одного гиперболического уравнения в решения другого. Действительно, пусть $\psi \in \operatorname{Ker}\mathcal{L}$ — произвольное решение уравнения $\mathcal{L}\psi = 0$; тогда из соотношения (3.5) немедленно вытекает, что $\hat{\psi} = \mathcal{D}\psi \in \operatorname{Ker}\hat{\mathcal{L}}$ — решение уравнения $\hat{\mathcal{L}}\psi = 0$.

Замечание 3.4. Отметим, что равенство (3.5) несколько отличается от операторного равенства, возникающего в одномерном случае при преобразовании Дарбу: в одномерном случае предполагается, что $\hat{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$, и это не случайно. Действительно, если переписать в терминах коэффициентов равенство (3.5) для одномерных операторов

$$\mathcal{L} = \partial_x^2 + a\partial_x + b, \quad \hat{\mathcal{L}} = \partial_x^2 + \hat{a}\partial_x + \hat{b}, \quad \mathcal{D} = \partial_x + \gamma, \quad \hat{\mathcal{D}} = \partial_x + \hat{\gamma},$$

мы получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \hat{a} - a - \hat{\gamma} + \gamma = 0 \\ \hat{b} - 2\gamma' + \hat{a}\gamma - a' - a\hat{\gamma} - b = 0 \\ \gamma'' + \hat{a}\gamma' + \hat{b}\gamma - b' - b\hat{\gamma} = 0 \end{cases}.$$

Легко видеть, что при фиксированных a, b, γ эта система трех уравнений, в принципе, позволяет однозначно с точностью до констант интегрирования найти три неизвестные функции $\hat{a}$, $\hat{b}$ и $\hat{\gamma}$, т.е. при подобном определении любой оператор $\mathcal{D}$ осуществлял бы преобразование Дарбу для оператора $\mathcal{L}$, что неприемлемо для построения теории преобразований Дарбу. А для оператора Шредингера этот подход не давал бы ничего нового, поскольку из первого уравнения следовало бы, что $\hat{\gamma} = \gamma$ и, соответственно, что $\hat{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$.

Для произвольных дифференциальных операторов

$$\mathcal{L} = \partial_x\partial_y + a\partial_x + b\partial_y + c, \quad \hat{\mathcal{L}} = \partial_x\partial_y + \hat{a}\partial_x + \hat{b}\partial_y + \hat{c}, \quad \mathcal{D} = \alpha\partial_x + \beta\partial_y + \gamma, \quad \hat{\mathcal{D}} = \hat{\alpha}\partial_x + \hat{\beta}\partial_y + \hat{\gamma}$$

разность $\hat{\mathcal{L}}\mathcal{D} - \hat{\mathcal{D}}\mathcal{L}$ является дифференциальным оператором третьего порядка общего вида:

$$\mathcal{A} = \hat{\mathcal{L}}\mathcal{D} - \hat{\mathcal{D}}\mathcal{L} = a_{21}\partial_x^2\partial_y + a_{12}\partial_x\partial_y^2 + a_{20}\partial_x^2 + a_{11}\partial_x\partial_y + a_{02}\partial_y^2 + a_{10}\partial_x + a_{01}\partial_y + a_{00}.$$

Прямой проверкой доказывается следующее

Предложение 3.4. *Коэффициенты оператора $\mathcal{A}$ имеют следующий вид:*

$$\begin{cases} a_{21} = \alpha - \hat{\alpha} \\ a_{12} = \beta - \hat{\beta} \\ a_{20} = \alpha_y + \alpha\hat{a} - \hat{\alpha}a \\ a_{02} = \beta_x + \beta\hat{b} - \hat{\beta}b \\ a_{11} = \alpha_x + \beta_y + \alpha\hat{b} - \hat{\alpha}b) + \beta\hat{a} - \hat{\beta}a + \gamma - \hat{\gamma} \\ a_{10} = \hat{\mathcal{L}}(\alpha) - \hat{\alpha}(c + a_x) - \hat{\beta}a_y + \gamma_y + \hat{a}\gamma - \hat{\gamma}a \\ a_{01} = \hat{\mathcal{L}}(\beta) - \hat{\beta}(c + b_y) - \hat{\alpha}b_x + \gamma_x + \hat{b}\gamma - \hat{\gamma}b \\ a_{00} = \hat{\mathcal{L}}(\gamma) - \hat{\alpha}c_x - \hat{\beta}c_y - \hat{\gamma}c \end{cases}. \tag{3.6}$$

Если оператор $\mathcal{D}$ является оператором преобразования $\mathcal{L} \mapsto \hat{\mathcal{L}}$, то все коэффициенты a_{ij} в системе (3.6) обращаются в нуль и, в частности, $a_{21} = a_{12} = 0$. Таким образом доказано следующее

Предложение 3.5. *Если оператор $\mathcal{D} = \alpha\partial_x + \beta\partial_y + \gamma$ осуществляет преобразование Дарбу–Лапласа $\mathcal{L} \mapsto \hat{\mathcal{L}}$ для гиперболического оператора $\mathcal{L}$ вида (3.6), то $\hat{\mathcal{D}} = \alpha\partial_x + \beta\partial_y + \hat{\gamma}$.*

По аналогии с одномерным случаем (где дано полное описание всех преобразований Дарбу для данного оператора с помощью вронскианных формул — см. [5]) естественно поставить подобный вопрос и для двумерного случая. Однако, задача полного описания всевозможных операторов преобразования $\mathcal{D} = \alpha\partial_x + \beta\partial_y + \gamma$ для заданного гиперболического оператора $\mathcal{L}$ (т.е. задача нахождения общего решения системы (3.6)) остается открытой. Тем не менее, А. Б. Шабатом получено (см. статью [27]) частичное решение этой задачи, т.е. описание таких операторов вида $\mathcal{D} = \partial_x + \gamma$; оно дается Теоремой 3.1 ниже.

Теорема 3.1. *Оператор $\mathcal{D} = \partial_x + \gamma$ является оператором преобразования $\mathcal{L} \mapsto \hat{\mathcal{L}}$ для некоторого гиперболического оператора $\hat{\mathcal{L}}$ только в одном из двух случаев:*

i) $\gamma = b$;

ii) $\gamma = -(\ln\varphi)_x$, где φ — произвольная функция из $\operatorname{Ker}\mathcal{L}$.

При этом в каждом из этих случаев надлежащий выбор параметров $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{\gamma}$ задает некоторое преобразование Дарбу–Лапласа.

Легко проверяется справедливость следующего предложения.

Предложение 3.6. *Если некоторый оператор $\mathcal{D} = \partial_x + \gamma$ осуществляет преобразование Дарбу–Лапласа $\mathcal{L} \mapsto \hat{\mathcal{L}}$, то инварианты Лапласа этих операторов связаны следующим образом:*

$$\hat{k} = h, \quad \hat{h} = 2h - k + (\ln h)_{xy} \tag{3.7}$$

в случае i) и

$$\hat{k} = h - u_y, \quad \hat{h} = 2h - k + u_y + (\ln u)_{xy},$$

где $u = b - \gamma$, случае ii).

Замечание 3.5. Теорема 3.1 дает исчерпывающий ответ на вопрос о том, в каком случае оператор вида $\partial_x + \gamma$ задает преобразование Дарбу–Лапласа для гиперболического оператора $\mathcal{L}$. В силу симметрии ясно, что оператор $\partial_y + \gamma$ задает преобразование Дарбу–Лапласа для $\mathcal{L}$ лишь в двух случая: если $\gamma = a$ или если $\gamma = -(\ln\varphi)_y$ для некоторого $\varphi \in \operatorname{Ker}\mathcal{L}$. Более того, рассмотрение операторов преобразования $\mathcal{D}$ вида $\alpha\partial_x + \gamma$ (или вида $\beta\partial_y + \gamma$) не дает ничего нового. В самом деле, пусть оператор $\mathcal{D} = \alpha\partial_x + \gamma$ задает некоторое преобразование Дарбу–Лапласа $\mathcal{L} \mapsto \hat{\mathcal{L}}$. Положим $\gamma_1 = \frac{\gamma}{\alpha}$, $\hat{\gamma}_1 = \frac{\hat{\gamma}}{\alpha}$ и обозначим $\mathcal{D}_1 = \partial_x + \gamma_1$, $\hat{\mathcal{D}}_1 = \partial_x + \hat{\gamma}_1$; тогда $\mathcal{D} = \alpha\mathcal{D}_1$, $\hat{\mathcal{D}} = \alpha\hat{\mathcal{D}}_1$ и

$$\hat{\mathcal{L}}\mathcal{D} = \hat{\mathcal{D}}\mathcal{L} \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{\mathcal{L}}\alpha\mathcal{D}_1 = \alpha\hat{\mathcal{D}}_1\mathcal{L} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^{-1}\hat{\mathcal{L}}\alpha\mathcal{D}_1 = \hat{\mathcal{D}}_1\mathcal{L}.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{D}$ задает преобразование Дарбу–Лапласа оператора $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{D}_1$ задает его преобразование Дарбу–Лапласа. При этом образы оператора $\mathcal{L}$ при этих двух преобразованиях связаны калибровочным преобразованием.

3.1.3 Явная интегрируемость по Дарбу

Гиперболические уравнения в частных производных с двумя независимыми переменными — объект, детально изучавшийся классиками. В 19 веке основное внимание уделялось построению общего решения уравнений в частных производных в явном виде; были разработаны различные методы, приводящие к явному решению тех или иных (причем не только линейных) уравнений. Рассмотрим самый простой случай — скалярное гиперболическое линейное уравнение вида

$$\mathcal{L}\psi = \psi_{xy} + a\psi_x + b\psi_y + c = 0 \tag{3.8}$$

на функцию $\psi = \psi(x, y)$, где коэффициенты a, b и c — функции двух независимых переменных x и y, и сделаем в нем дифференциальную подстановку $\hat{\psi} = \psi_x + b\psi$. Новая функция $\hat{\psi}$ при этом будет удовлетворять преобразованному гиперболическому уравнению

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\psi}_{xy} + \hat{a}\hat{\psi}_x + \hat{b}\hat{\psi}_y + \hat{c}\hat{\psi} = 0.$$

Тогда в силу уравнения (3.8) имеем:

$$\hat{\psi}_y = \psi_{xy} + b_y\psi + b\psi_y = -a\psi_x + b_y\psi - c\psi = -a\hat{\psi} + h\psi,$$

откуда при $h \neq 0$ получаем обратную подстановку

$$\psi = -h^{-1}(\hat{\psi}_y + a\hat{\psi}).$$

Таким образом, если оба инварианта Лапласа оператора $\mathcal{L}$ отличны от нуля, мы получаем сразу две обратимые дифференциальные подстановки, переводящие решения исходного уравнения в решения преобразованного и наоборот, что дает возможность, зная решения преобразованного уравнения, находить решения исходного и обратно. Этим наблюдением активно пользовались классики при изучении гиперболических уравнений. Переформулировка этого результата на языке преобразований Дарбу–Лапласа дает следующее

Предложение 3.7. *Элементарное преобразование Дарбу–Лапласа $\mathcal{L} \mapsto \hat{\mathcal{L}}$, осуществляемое оператором $\mathcal{D} = \partial_x + b$, обратимо если отличен от нуля инвариант Лапласа исходного оператора: $h \neq 0$. При этом обратное преобразование $\hat{\mathcal{L}} \mapsto \mathcal{L}$ осуществляется оператором $-h^{-1}(\partial_y + a)$. Аналогично, преобразование Дарбу–Лапласа, осуществляемое оператором $\partial_y + a$, обратимо, если отличен от нуля другой инвариант Лапласа: $k \neq 0$; обратное преобразование при этом осуществляется оператором $-k^{-1}(\partial_x + b)$.*

Доказательство.

Прямая проверка показывает, что операторное равенство $\hat{\hat{\mathcal{L}}}\hat{\mathcal{D}} = \hat{\hat{\mathcal{D}}}\hat{\mathcal{L}}$, где

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{a}\partial_x + \hat{b}\partial_y + \hat{c}, \quad \hat{\hat{\mathcal{L}}} = \partial_x\partial_y + \hat{\hat{a}}\partial_x + \hat{\hat{b}}\partial_y + \hat{\hat{c}}, \quad \hat{D} = -\frac{1}{h}(\partial_y + a), \quad \hat{\hat{D}} = -\frac{1}{h}(\partial_y + \hat{\hat{\gamma}}),$$

а коэффициенты $\hat{a}$, $\hat{b}$ и $\hat{c}$ выражаются через коэффициенты оператора $\mathcal{L}$, сводится к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \hat{\hat{b}} = b \\ \hat{\hat{\gamma}} = \hat{\hat{a}} - h_y \\ \hat{\hat{c}} = c + b(\hat{\hat{a}} - a) \\ (\hat{\hat{a}} - a)(c - ab - b_y) + \frac{h_y}{h}(b_y + ab - c) + (c - b_y - ab)_y = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

(два последних уравнения этой системы получены с использованием двух первых). Легко видеть, что последнее уравнение (3.9) дает равенство $\hat{\hat{a}} = a$, откуда в силу второго уравнения получаем, что $\hat{\hat{c}} = c$. Таким образом, $\hat{\hat{\mathcal{L}}} = \mathcal{L}$. Аналогично для второго элементарного преобразования Дарбу–Лапласа, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Согласно Предложению 3.3, гиперболический оператор (3.3) факторизуется тогда и только тогда, когда хотя бы один из его инвариантов Лапласа равен нулю. Это обстоятельство позволяет в явном виде описать его ядро:

Предложение 3.8. *Пусть один из инвариантов Лапласа гиперболического линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}$ вида (3.3) равен нулю. Тогда если $h = 0$, то общее решение уравнения $\mathcal{L}\psi = 0$ имеет вид*

$$\psi(x,y) = \left(\int \left(\theta_1(x) e^{\int b(x,y)dx - \int a(x,y)dy}\right) dx + \theta_2(y)\right) e^{-\int b(x,y)dx}, \tag{3.10}$$

а если $k = 0$, то общее решение имеет вид

$$\psi(x,y) = \left(\int \left(\theta_2(y) e^{\int a(x,y)dy - \int b(x,y)dx}\right) dy + \theta_1(x)\right) e^{-\int a(x,y)dy}, \tag{3.11}$$

где θ_1 и θ_2 — произвольные функции одной переменной.

Доказательство.

Пусть $h = 0$. Тогда оператор $\mathcal{L}$ представляется в виде $\mathcal{L} = (\partial_y + a)(\partial_x + b)$ и замена $\varphi = \psi_x + b\psi$ понижает порядок уравнения:

$$\varphi_y + a\varphi = 0. \tag{3.12}$$

Общее решение уравнения (3.12) имеет вид

$$\varphi(x,y) = \theta_1(x) \exp\left(-\int a(x,y)dy\right),$$

где θ_1 — произвольная функция одной переменной. Поэтому, решая теперь линейное уравнение $\psi_x + b\psi = \varphi$ методом вариации постоянных, получаем формулу (3.10) для общего решения исходного уравнения. Случай $k = 0$ рассматривается аналогично, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Следствие 3.1. *Если у гиперболического оператора $\mathcal{L}$ вида (3.3) оба инварианта Лапласа нулевые, то общее решение уравнения $\mathcal{L}\psi = 0$ имеет вид*

$$\psi(x,y) = (\theta_1(x) + \theta_2(y)) e^{-\int b(x,y)dx} \tag{3.13}$$

где θ_1 и θ_2 — произвольные функции одной переменной.

Доказательство.

Пусть $h = k = 0$; тогда из определения инвариантов Лапласа немедленно вытекает, что $a_x = b_y$. Это означает, что

$$b(x,y) = \int b_y(x,y)dy = \int a_x(x,y)dy = \partial_x\left(\int a(x,y)dy\right),$$

откуда получаем равенство

$$\int b(x,y)dx = \int a(x,y)dy.$$

Подставляя последнее равенство в формулу (3.10), получаем формулу (3.13), $\mathfrak{Q.e.d.}$

Рассмотрим гиперболическое уравнение (3.8). Если хотя бы один из инвариантов Лапласа оператора $\mathcal{L}$ равен нулю, оно допускает явное решение по формулам (3.10,3.11). В противном случае, мы можем с помощью *обратимых* преобразований Дарбу–Лапласа преобразовывать это уравнение. Введем обозначения

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}, \quad a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad c_0 = c$$

и рассмотрим преобразование Дарбу–Лапласа $\mathcal{L}_0 \mapsto \mathcal{L}_1$, задаваемое оператором $\mathcal{D}_0 = \partial_x + b_0$, где $\mathcal{L}_1 = \partial_x\partial_y + a_1\partial_x + b_1\partial_y + c_1$. Этот оператор переводит решения исходного уравнения (3.8) в решения нового линейного гиперболического уравнения $\mathcal{L}_1\psi_1 = 0$: $\psi_1 = \mathcal{D}\psi$. Если инвариант Лапласа h_1 оператора $\mathcal{L}_1$ равен нулю, уравнение $\mathcal{L}_1\psi_1 = 0$ интегрируется явно, а затем общее решение уравнения $\mathcal{L}\psi = 0$ находится с помощью обратной замены $\psi = -h^{-1}(\psi_{1,y} + a_0\psi_1)$. Если $h_1 \neq 0$, то можно произвести еще одно обратимое преобразование Дарбу–Лапласа $\mathcal{L}_1 \mapsto \mathcal{L}_2$, осуществляемое оператором $\mathcal{D}_1 = \partial_x + b_1$, и т.д. Отметим, при этом ни на каком шаге не может случиться, что $k_j = 0$, поскольку $k_j = h_{j-1}$ в силу (3.7).

Аналогично, если $k_0 \neq 0$, можно рассмотреть обратимое преобразование Дарбу–Лапласа $\mathcal{L}_0 \mapsto \mathcal{L}_1$, задаваемое оператором $\mathcal{D}'_0 = \partial_y + a_0$, и провести те же рассуждения. Полученная последовательность гиперболических операторов

$$\ldots, \mathcal{L}_{-j}, \mathcal{L}_{-j+1}, \ldots, \mathcal{L}_{-1}, \mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_j, \ldots,$$

в которой для каждого $j = 0, 1, \ldots$ выполнены соотношения

$$\mathcal{L}_{j+1}\mathcal{D}_j = \mathcal{D}_{j+1}\mathcal{L}_j, \quad \mathcal{L}_{-j-1}\mathcal{D}'_j = \mathcal{D}'_{-j-1}\mathcal{L}_{-j},$$

называется *рядом Лапласа* гиперболического уравнения $\mathcal{L}_0\psi_0 = 0$. При этом предполагается, что если $h_j = 0$ или $k_{-j} = 0$ для некоторого $j = 0, 1, \ldots$, то ряд обрывается на члене $\mathcal{L}_j$ или $\mathcal{L}_{-j}$ соответственно (т.е. является конечным вправо или влево соответственно).

Приведенная схема позволяет получить в явном виде решение гиперболического уравнения вида (3.8) если его ряд Лапласа конечен хотя бы с одной стороны. Действительно, имеет место следующая

Теорема 3.2. *Если ряд Лапласа уравнения (3.8) обрывается на члене $\mathcal{L}_j$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$, то его общее решение имеет вид*

$$\psi_0(x,y) = -\frac{1}{h_0}(\partial_y + a_0)\left(-\frac{1}{h_1}(\partial_y + a_1)\left(\ldots\left(-\frac{1}{h_{j-1}}(\partial_y + a_{j-1})\right)\ldots\right)\right)\psi_j(x,y), \tag{3.14}$$

где θ_1 и θ_2 — произвольные функции одной переменной, а φ_j задается формулой

$$\psi_j(x,y) = \left(\int \left(\theta_1(x)e^{\int b_j(x,y)dx - \int a_j(x,y)dy}\right)dx + \theta_2(y)\right)e^{-\int b_j(x,y)dx}. \tag{3.15}$$

Если ряд Лапласа уравнения (3.8) обрывается на члене $\mathcal{L}_{-j}$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$, то его общее решение имеет вид

$$\psi_0(x,y) = -\frac{1}{k_0}(\partial_x + b_0)\left(-\frac{1}{k_{-1}}(\partial_x + b_{-1})\left(\ldots\left(-\frac{1}{k_{-j+1}}(\partial_x + b_{-j+1})\right)\ldots\right)\right)\psi_{-j}(x,y), \tag{3.16}$$

где θ_1 и θ_2 — произвольные функции одной переменной, а φ_{-j} задается формулой

$$\psi_{-j}(x,y) = \left(\int \left(\theta_2(y)e^{\int a_{-j}(x,y)dy - \int b_{-j}(x,y)dx}\right)dy + \theta_1(x)\right)e^{-\int a_{-j}(x,y)dy}.$$

Доказательство.

Если ряд Лапласа уравнения $\mathcal{L}_0\psi_0 = 0$ обрывается на члене $\mathcal{L}_j$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$, то $h_j = 0$ и оператор $\mathcal{L}_j$ факторизуется. Общее решение уравнения $\mathcal{L}_j\psi_j = 0$ записывается в виде (3.15) согласно Предложению 3.8. Далее, общее решение исходного уравнение получается из ψ_j с помощью обратных преобразований Дарбу–Лапласа, что дает формулу (3.14). Аналогично, обрыв ряда Лапласа на члене $\mathcal{L}_{-j}$ дает формулу (3.16), **Q.e.d.**

Замечание 3.6. Легко видеть, что формулы (3.14,3.16) обобщают формулы (3.10,3.11) на случай, когда ряд Лапласа не обрывается на члене $\mathcal{L}_0$.

Мы выяснили, что если ряд Лапласа *линейного* гиперболического уравнения обрывается хотя бы с одной стороны, то такое уравнение легко интегрируется в явном виде. Однако, большинство интересных с точки зрения приложений уравнений не являются линейными. Тем не менее, предложенный подход позволяет получить интересные результаты и в этом случае.

Рассмотрим гиперболическое уравнения вида

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \tag{3.17}$$

и его *линеаризацию*, получаемую следующим образом: положим $u = u_0 + \varepsilon v + \varepsilon^2 w + \dots$, где u_0 — некоторое частное решение уравнения (3.17), а ε — малый параметр и подставим это разложение в уравнение (1.48). Применяя к обеим частям полученного равества оператор $\frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}$, получим линейное уравнение на функцию $v = v(x, y, u, u_x, u_y)$

$$\left(D_xD_y - \frac{\partial F}{\partial u_x}D_x - \frac{\partial F}{\partial u_y}D_y - \frac{\partial F}{\partial u}\right)v = 0, \tag{3.18}$$

где D_x и D_y — операторы взятия полных производных в силу уравнения (3.17). По аналогии с линейным случаем можно рассмотреть ряд Лапласа $\{H_j\}$ уравнения (3.18); нетрудно проверить что для уравнения Лиувилля (3.1) ряд Лапласа обрывается с двух сторон: $H_2 = H_{-1} = 0$.

Определение 3.2. Будем называть гиперболическое уравнение (3.17) *уравнением лиувиллевского типа*, если ряд Лапласа его линеаризации обрывается с двух сторон.

Таким образом, уравнения лиувиллевского типа — это такие гиперболические уравнения, которые обобщают свойство уравнения Лиувилля, состоящее в том, что ряд Лапласа его линеаризации обрывается с двух сторон. Выше мы убедились в том, что уравнение Лиувилля, во-первых, интегрируется в явном виде, а, во-вторых, обладает нетривиальными x- и y-интегралами. Оказывается, эти два свойства также наследуются уравнениями лиувиллевского типа. Но прежде чем обсуждать эти свойства, дадим точное определение x- и y-интегралов.

Определение 3.3. Функция $J(x, y, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots)$, зависящая от конечного числа производных, называется *y-интегралом* гиперболического уравнения (3.17), если ее полная производная по переменной y в силу этого уравнения равна нулю. При этом максимальный порядок производной, входящей в выражение для функции J, называется *порядком* y-интеграла J.

Замечание 3.7. В определении y-интеграла функция J не зависит от смешанных производных; это связано с тем, что в случае гиперболического уравнения они выражаются через одноименные производные по x и по y в силу уравнения. Более того, легко заметить, что y-интеграл не может зависеть от частных производных $u_y, u_{yy} \dots$ В самом деле, предположим, что это не так, и функция J от них зависит, а m — максимальный порядок производной по y, входящей в выражение для функции J. Тогда поскольку

$$0 = D_y(J) = \frac{\partial J}{\partial y} + \frac{\partial J}{\partial u}u_y + \frac{\partial J}{\partial u_x}u_{xy} + \frac{\partial J}{\partial u_y}u_{yy} + \frac{\partial J}{\partial u_{xx}}u_{xxy} + \frac{\partial J}{\partial u_{yy}}u_{yyy} + \dots + \frac{\partial J}{\partial u_y^{(m)}}u_y^{(m+1)} =$$

$$= \frac{\partial J}{\partial y} + \frac{\partial J}{\partial u}u_y + \frac{\partial J}{\partial u_x}F(x, y, u, u_x, u_y) + \frac{\partial J}{\partial u_y}u_{yy} + \frac{\partial J}{\partial u_{xx}}D_x(F(x, y, u, u_x, u_y)) + \dots + \frac{\partial J}{\partial u_y^{(m)}}u_y^{(m+1)},$$

легко заметить, что слагаемые $u_y^{(m+1)}$ ни с чем сократиться не могут (т.е. функция F дифференцируется только по переменной x, а при этом не могут возникнуть частные по y порядка, выше первого). Аналогично, x-интеграл гиперболического уравнения (3.17) может зависеть лишь от переменных $x, y, u, u_y, u_{yy}, u_{yyy}, \ldots$

Замечание 3.8. Тот факт, что x- и y-интегралы не могут зависеть от соответствующих одноименных производных, объясняет, почему наличие интегралов у гиперболического уравнения является обстоятельством исключительным. В самом деле, y-интеграл должен быть, фактически, общим решением целой системы уравнений в частных производных:

$$D_y(J) = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial u_y} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial u_{yy}} = 0, \ldots$$

В работе [9] описан алгоритм построения общих решений уравнений лиувиллевского типа в явном виде и сформулирована теорема классификации для таких уравнений. Более того, можно показать, что для гиперболических уравнений вида (3.17) наличие x- и y-интегралов эквивалентно конечности ряда Лапласа для соответствующего линеаризованного уравнения. Более того, в работе [9] предъявлены x- и y-интегралы для уравнений лиувиллевского типа. Таким образом, этот класс уравнений замечателен тем, что для него все, что интересовало классиков, может быть сделано в явном виде. Иногда это свойство называется *явной интегрируемостью* или *интегрируемостью по Дарбу*.

3.2 Двумеризованная цепочка Тоды

В первой главе мы достаточно подробно изучили одномерную цепочку Тоды, построив зависящее от спектрального параметра представление Лакса для нее и найдя нежное количество независимых первых интегралов в инволюции. Оказывается, эта система легко обобщается на двумерный случай, однако, подходы к интегрируемости здесь оказываются совершенно иными.

3.2.1 Цепочка Тоды в разных формах

Рассмотрим бесконечную в оба конца последовательность гиперболических операторов $\mathcal{L}_j = \partial_x\partial_y + a(j)\partial_x + b(j)\partial_y + c(j)$, в которой любые два соседних оператора связаны преобразованием Дарбу–Лапласа

$$\mathcal{L}_{j+1}\mathcal{D}_j = \mathcal{D}_{j+1}\mathcal{L}_j,$$

где $\mathcal{D}_j = \partial_x + b(j)$. Тогда согласно Предложению 3.6 их инварианты Лапласа связаны следующим образом:

$$k(j+1) = h(j), \quad h(j+1) = 2h(j) - k(j) + (\ln h(j))_{xy}.$$

Но поскольку $k(j) = h(j-1)$, приходим к уравнению

$$(\ln h(j))_{xy} = h(j-1) - 2h(j) + h(j+1), \tag{3.19}$$

связывающему инварианты Лапласа трех последовательных операторов. Это уравнение представляет собой одну из форм записи *двумеризованной цепочки Тоды*. Легко убедиться, что замена $h(j) = \exp(q(j+1) - q(j))$ приводит цепочку (3.19) к виду

$$q_{xy}(j) = \exp(q(j+1) - q(j)) - \exp(q(j) - q(j-1)), \tag{3.20}$$

а замена $h(j) = u_{xy}(j)$ — к виду

$$u_{xy}(j) = \exp(u(j-1) - 2u(j) + u(j+1)). \tag{3.21}$$

Кроме того, цепочку Тоды можно еще переписать в следующем виде

$$t_{xy}(j) = e^{t(j-1)} - 2e^{t(j)} + e^{t(j+1)}, \tag{3.22}$$

который получается из (3.19) заменой $h(j) = \exp(t(j))$.

Замечание 3.9. Следует отметить, что, переход от одной формы записи двумеризованной цепочки Тоды к другой требует некоторых уточнений. В самом деле, переход от цепочки (3.19) к цепочке (3.20) осуществляется с помощью необратимой постановки $h(j) = \exp(q(j+1) - q(j))$ — она переводит уравнение (3.19) в уравнение

$$\begin{aligned}
q_{xy}(j+1) - q_{xy}(j) &= \exp(q(j) - q(j-1)) - 2\exp(q(j+1) - q(j)) + \exp(q(j+2) - q(j+1)) = \\
&= (\exp(q(j+2) - q(j+1)) - \exp(q(j+1) - q(j))) - \\
&- (\exp(q(j+1) - q(j)) - \exp(q(j) - q(j-1))) = \\
&= (T - I)(\exp(q(j+1) - q(j)) - \exp(q(j) - q(j-1))),
\end{aligned}$$

где T — оператор сдвига по j в цепочке, а I — тождественный оператор. Таким образом, строго говоря, переход от цепочки (3.19) к цепочке (3.20) осуществляется лишь с точночтью до ядра оператора $T - I$, т.е. после рассматриваемой замены левая и правая части уравнения (3.20) могут, вообще говоря, отличаться на любой элемент ядра этого оператора:

$$q_{xy}(j) + \theta(x, y) = \exp(q(j+1) - q(j)) - \exp(q(j) - q(j-1)),$$

где θ — некоторая функция, одинаковая для всех уравнений. Тогда, переходя к новым переменным

$$\tilde{q}(j) = q(j) + \int \left(\int \theta(x, y) dx \right) dy,$$

мы получим уравнение вида (3.20), поскольку его правая часть не изменяется при одновременном прибавлении произвольной функции сразу ко всем $q(j)$. Обратный переход от цепочки (3.20) к цепочке (3.19) не вызывает вопросов, поскольку получается сложением соседних уравнений. Поэтому, в дальнейшем мы будем считать эти две цепочки эквивалентными и связанными указанной выше заменой, каждый раз специально не оговаривая необходимость дополнительного сдвига по переменным $q(j)$. Несколько хуже ситуация с переходом от цепочки (3.19) к цепочке (3.21): равенство, полученное после подстановки $h(j) = u_{xy}(j)$, окажется продифференцированным по x и по y; поэтому, после интегрирования правая и левая части каждого уравнения могут отличаться на выражение вида $\theta_j^{(1)}(x) + \theta_j^{(2)}(y)$, где $\theta_j^{(1)}$ и $\theta_j^{(2)}$ — произвольные функции одной переменной. Подобная необнозначность уже, вообще говоря, не изничтожается одновременным сдвигом всех динамических переменных. Тем не менее, обратный переход (а именно он нам и будет нужен в дальнейшем) вполне корректен. Цепочки (3.19) и (3.22) связаны обратимой заменой, и потому эквивалентны.

3.2.2 Представление Лакса

Преобразования Дарбу–Лапласа (как и преобразования Дарбу в одномерном случае) дают возможность записать двумеризованную цепочку Тоды в форме Лакса, т.е. представить уравнения цепочки как условие совместности некоторой линейной системы. Имеет место следующее

Предложение 3.9. *Пусть в бесконечной в оба конца последовательности гиперболических дифференциальных операторов $\mathcal{L}_j = \partial_x\partial_y + a(j)\partial_x + b(j)\partial_y + c(j)$ любые два соседних оператора связаны преобразованием Дарбу–Лапласа*

$$\mathcal{L}_{j+1}\mathcal{D}_j = \mathcal{D}_{j+1}\mathcal{L}_j,$$

где $\mathcal{D}_j = \partial_x + b(j)$. *Тогда двумеризованная цепочка Тоды (3.20), связывающая их инварианты Лапласа, допускает представление Лакса*

$$\begin{cases} \psi_{j,x} = \psi_{j+1} - b(j)\psi_j \\ \psi_{j,y} = -h(j-1)\psi_{j-1} - a(j-1)\psi_j \end{cases}. \tag{3.23}$$

Доказательство.

Первое из уравнений (3.23) вытекает из преобразования Дарбу–Лапласа. Дифференцируя соотношение $\psi_{j+1} = \psi_{j,x} + b(j)\psi_j$ по y и выражая $\psi_{j,xy}$, получаем равенство

$$\psi_{j,xy} = \psi_{j+1,y} - b_y(j)\psi_j - b(j)\psi_{j,y}.$$

Выражая теперь $\psi_{j,xy}$ из соответствующего гиперболического уравнения и приравнивая к уже полученному равенству, приходим к соотношению

$$\psi_{j+1,y} = (b_y(j) - c(j) + a(j)b(j))\psi_j - a(j)\psi_{j+1},$$

из которого немедленно вытекает второе уравнение (3.23), $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 3.10. Нетрудно заметить, что подобная конструкция не проходит для элементарного преобразования Дарбу–Лапласа второго типа (см. Теорему (3.1), поскольку в этом случае не сокращаются слагаемые с $\psi_{j,y}$.

Поскольку преобразование Дарбу–Лапласа приводит к представлению Лакса для двумеризованной цепочки (3.20) при любом согласованном выборе коэффициентов операторов $\mathcal{L}_j$, это дает нам определенный произвол при построении представления Лакса. Действительно, рассмотрим цепочку (3.20) и для всех $j \in \mathbb{Z}$ положим $a(j) = 0$, $b(j) = -q_x(j)$ и $h(j) = \exp(q(j+1) - q(j))$. Тогда функция $h(j)$ является одним из инвариантов Лапласа гиперболического оператора

$$\mathcal{L}_j = \partial_x\partial_y + b(j)\partial_y + c(j),$$

где $c(j) = h(j) + b_y(j)$, а оператор $\mathcal{D}_j = \partial_x + b(j)$ осуществляет преобразование Дарбу–Лапласа $\mathcal{L}_j \mapsto \mathcal{L}_{j+1}$. В самом деле, как нетрудно проверить, при таком выборе коэффициентов операторов все требуемые соотношения оказываются выполненными. В этом случае представление Лакса (3.23) принимает более простой вид

$$\begin{cases} \psi_{j,x} = \psi_{j+1} + q_x(j)\psi_j \\ \psi_{j,y} = -h(j-1)\psi_{j-1} \end{cases}. \tag{3.24}$$

Замечание 3.11. Специальный выбор коэффициентов операторов $\mathcal{L}_j$ при построении этого представления Лакса обусловлен лишь удобством и простотой получаемых формул. Произвольный выбор гиперболических операторов в соответствующем классе калибровочной эквивалентности для цепочки (3.20) также приведет к построению некоторой пары Лакса, однако формулы, аналогичные формулам (3.24), в этом случае будут несколько сложнее.

В силу симметрии $x \leftrightarrow y$ цепочка Тоды (3.20) допускает также и другое (т.е. калибровочно не эквивалентное) представление Лакса, т.е. справедливо следующее

Предложение 3.10. *Двумеризованная цепочка Тоды (3.20) представляет собой условие совместности линейной системы*

$$\begin{cases} \varphi_{j,x} = -h(j-1)\varphi_{j-1} \\ \varphi_{j,y} = \varphi_{j+1} + q_y(j)\varphi_j \end{cases}, \tag{3.25}$$

где $h(j) = \exp(q(j+1) - q(j))$.

Замечание 3.12. Любое из предъявленных представлений Лакса для бесконечной двумеризованной цепочки Тоды можно записать в виде

$$\begin{cases} \Psi_x = A\Psi \\ \Psi_y = B\Psi \end{cases},$$

где $\Psi = (\ldots, \psi_{j-1}, \psi_j, \psi_{j+1}, \ldots)^t$ — бесконечный вектор, а A и B — бесконечные матрицы, элементы которых являются функциями от x и y. Тогда уравнения цепочки Тоды эквивалентны следующему матричному уравнению:

$$B_x - A_y = [A, B].$$

Подобное представление нелинейных уравнений часто *называется представлением нулевой кривизны* и является двумерным аналогом представления Лакса. Например, подобное представление естественным образом возникает в дифференциальной геометрии при выводе уравнений Гаусса–Петерсона–Кодацци, откуда собственно и пошло это название.

3.2.3 Системы экспоненциального типа

Рассмотренная нами двумеризованная цепочка Тоды в различных формах представляет собой бесконечную динамическую систему; однако, обычно, как с точки зрения теории интегрируемых систем, так и с точки зрения естественно-научных приложений, интерес представляют конечные динамические системы, т.е. системы, содержащие лишь конечное число динамических переменных. Наиболее простым способом превратить описанную выше динамическую систему в конечную является рассмотрение ее периодического замыкания, т.е. наложение периодического граничного условия $q(r+1) \equiv q(1)$ (для цепочки (3.20); для других форм — аналогично). Полученную динамическую систему будем в дальнейшем называть *периодической двумеризованной цепочкой Тоды*. Отметим, что периодическое замыкание любой из пар Лакса (3.24) или (3.25) дает пару Лакса для периодической цепочки.

Однако, периодическая двумеризованная цепочка Тоды не является наиболее простой интегрируемой редукцией бесконечной цепочки; она интегрируется методом обратной задачи, но мы не будем здесь это обсуждать. Вместо этого мы рассмотрим *конечные цепочки Тоды*, являющиеся частным случаем так называемых *систем экспоненциального типа*.

Следуя работе [28], *системой экспоненциального типа* назовем систему вида

$$\mathbf{u}_{xy} = \exp(K\mathbf{u}), \tag{3.26}$$

где $\mathbf{u} = (u(0), u(1), \ldots, u(r-1))$ — вектор зависимых переменных, а K — некоторая постоянная матрица (здесь и далее подобная запись означает, что координатами вектора $\exp(K\mathbf{u})$ являются экспоненты координат вектора $K\mathbf{u}$). Легко видеть, что при $r = 1$ и $K = 1$ система (3.26) превращается в уравнение Лиувилля. Кроме того, если для произвольного $r \in \mathbb{N}$ положить

$$K = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -2 \end{pmatrix}, \tag{3.27}$$

мы получим периодическую двумеризованную цепочку Тоды в форме (3.21).

Системы экспоненциального типа дают хорошие примеры других интегрируемых редукций бесконечной двумеризованной цепочки Тоды. Например, нетрудно заметить, что матрица (3.27) сильно напоминает матрицы Картана классических простых алгебр Ли. Эта аналогия дает свои результаты — системы экспоненциального типа были проинтегрированы в явном виде А. Н. Лезновым (см. [16]) в случае, когда K является матрицей Картана некоторой простой алгебры Ли. Эти системы обычно называются *цепочками Тоды, соответствующим простым алгебрам Ли.*

Матрица Картана алгебры Ли серии A (см., например, [26]) имеет вид

$$K_A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{pmatrix}$$

(точнее, матрицей Картана серии A является матрица $-K_A$). Экспоненциальная система $\mathbf{u}_{xy} = K_A\mathbf{u}$ получается из бесконечной цепочки (3.21) наложением условия обрыва $u(-1) = u(r) = -\infty$. В терминах переменных $h(j) = u_{xy}(j)$ эта система принимает вид

$$\begin{cases} (\ln h(0))_{xy} = -2h(0) + h(1) \\ (\ln h(j))_{xy} = h(j-1) - 2h(j) + h(j+1), \quad j = 1, 2, \dots, r-2 \\ (\ln h(r-1))_{xy} = h(r-2) - 2h(r-1) \end{cases}, \tag{3.28}$$

причем система (3.28) является редукцией бесконечной цепочки (3.19), порожденной условием обрыва $h(-1) = h(r) = 0$. Легко заметить, что и в терминах переменной $q(j)$ происходит то же самое: замена $h(j) = \exp(q(j+1) - q(j))$ приводит систему (3.28) к виду

$$\begin{cases} q_{xy}(0) = \exp(q(1) - q(0)) \\ q_{xy}(j) = \exp(q(j+1) - q(j)) - \exp(q(j) - q(j-1)), \quad j = 1, 2, \dots, r-1 \\ q_{xy}(r) = -\exp(q(r) - q(r-1)) \end{cases}, \tag{3.29}$$

причем система (3.29) получается из бесконечной цепочки Тоды (3.20) применением редукции $q(-1) = \infty$, $q(r+1) = -\infty$.

Однако, ситуация с цепочками Тоды, соответствующим остальных классическим сериям алгебр Ли немного иная. В самом деле, матрица Картана серии B имеет вид

$$K_B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{pmatrix}$$

(точнее, матрица Картана серии B получается из матрицы $-K_B$ симметрией относительно центра матрицы), а соответствующая экспоненциальная система — вид

$$\begin{cases} u_{xy}(0) = \exp(-2u(0) + u(1)) \\ u_{xy}(1) = \exp(2u(0) - 2u(1) + u(2)) \\ u_{xy}(j) = \exp(u(j-1) - 2u(j) + u(j+1)), \quad j = 2, 3, \dots, r-2 \\ u_{xy}(r-1) = \exp(u(r-2) - 2u(r-1)) \end{cases}. \tag{3.30}$$

Легко видеть, что второе уравнение этой системы не может быть получено из общего уравнения (3.20) никаким условием обрыва. Тем не менее, замена

$$h(0) = 2u_{xy}(0), \quad h(j) = u_{xy}(j), \quad j = 1, 2, \dots, r-1$$

приводит систему (3.30) к виду

$$\begin{cases} (\ln h(0))_{xy} = -h(0) + h(1) \\ (\ln h(j))_{xy} = h(j-1) - 2h(j) + h(j+1), \quad j = 1, 2, \ldots, r-2 \\ (\ln h(r-1))_{xy} = h(r-2) - 2h(r-1) \end{cases}. \tag{3.31}$$

Нетрудно проверить, что система (3.31) получается из бесконечной цепочки (3.19) с помощью условий обрыва

$$h(-j) = h(j-1), \quad j = 1, 2, \ldots, r-1, \quad h(r) = 0;$$

это означает, что она является редукцией не только бесконечной цепочки, но и цепочки (3.28) серии A удвоенной длины $2r$. В терминах переменных $q(j)$ цепочка (3.31) серии B переписывается в следующем виде:

$$\begin{cases} q_{xy}(1) = \exp(q(2) - q(1)) - \exp q(1) \\ q_{xy}(j) = \exp(q(j+1) - q(j)) - \exp(q(j) - q(j-1)), \quad j = 2, 3, \ldots, r-1 \\ q_{xy}(r) = -\exp(q(r) - q(r-1)) \end{cases}. \tag{3.32}$$

Аналогично случаю h-цепочки, система (3.32) является редукцией соответствующей цепочки серии A длины $2r+1$, порожденной условием обрыва $q(0) = 0$, $q(-j) = -q(j)$ при $j = 1, 2, \ldots, r$.

Задача 3.2. Показать, что цепочка Тоды, соответствующая простой алгебре Ли серии C, тоже является редукцией как бесконечной двумеризованной цепочки, так и цепочки Тоды серии A удвоенной длины. Выписать явно соответствующие уравнения.

Замечание 3.13. Вопрос о том, является ли цепочка Тоды, соответствующая алгебрам Ли серии D, редукцией цепочки серии A, оставался открытым до недавнего времени. Положительный ответ на него был дан И. Т. Хабибуллиным в 2005 году.

3.2.4 Характеристические алгебры

Мы уже упомянули результат А. Н. Лезнова, состоящий в том, что двумеризованные цепочки Тоды, соответствующие простым алгебрам Ли, интегрируемы в явном виде (т.е. интегрируемы по Дарбу). Возникает естественный вопрос: есть ли среди систем экспоненциального типа еще системы (кроме проинтегрированных Лезновым), которые интегрируются по Дарбу? Кратно обсудим алгебраический подход к этой проблеме, предложенный А. Б. Шабатом. На примере систем лиувиллевского типа мы видели, что явная интегрируемость эквивалентна наличию у уравнения x- и y-интегралов. А уже существование у экспоненциальной системы интегралов оказывается равносильным конечномерности некоторой алгебры Ли.

Рассмотрим систему гиперболических уравнений

$$\begin{cases} u^1_{xy} = f_1(u^1, \ldots, u^r) \\ u^2_{xy} = f_2(u^1, \ldots, u^r) \\ \ldots \\ u^r_{xy} = f_r(u^1, \ldots, u^r) \end{cases}, \tag{3.33}$$

где все функции u^i зависят от переменных x и y. Ясно, что система вида (3.33) является системой экспоненциального типа, если все функции f_i линейны по всем своим аргументам. Легко заметить, что y-интеграл такой системы не может зависеть не только от производных $u^i_y, u^i_{yy}, \ldots$ (как это было для систем лиувиллевского типа), но и от самих функций u^i (т.к. в этом случае его полная производная по переменной y будет зависеть от u^i_y, которые ни с чем не могут сократиться). Таким образом, любой y-интеграл J должен удовлетворять условиям

$$\begin{cases} D_y(J) = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial u^i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r \end{cases}.$$

Определение 3.4. Алгебра Ли, порожденная векторными полями

$$D_y = \sum_{i=1}^{r} \left(f_i \frac{\partial}{\partial u_x^i} + D_x(f_i) \frac{\partial}{\partial u_{xx}^i} + D_{xx}(f_i) \frac{\partial}{\partial u_{xxx}^i} + \dots \right) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial u^i},$$

где $i = 1, 2, \dots, r$, на пространстве формальных переменных $x, y, u^i, u_x^i, u_{xx}^i, \dots$ называется *характеристической алгеброй* системы (3.33).

Вообще говоря, алгебры Ли векторных полей, как правило, оказываются бесконечномерными. Поэтому у общей системы вида (3.33) нет нетривиальных y-интегралов. Если же размерность характеристической алгебры χ конечна, то можно показать, что количество d_m независимых интегралов порядка не больше, чем m, дается формулой

$$d_m = \max\{0, (m+1)r - \dim \chi\}, \tag{3.34}$$

см. [29]. Интуитивно эта формула понятна: у нас есть $(m+1)r$ переменных

$$u^i, u_x^i, u_{xx}^i, \dots, u_x^{i,(m)}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

и $\dim \chi$ независимых условий на них; если количество условий меньше, чем количество переменных, то y-интегралы есть. Формула (3.34) также дает полезное следствие, если характеристическая алгебра конечномерна, но имеет достаточно большую размерность, то соответствующая система (3.33 может иметь y-интегралы лишь достаточно высокого порядка.

Замечание 3.14. Аналогичным образом можно определить характеристическую алгебру *в направлении* x, которая нужна при поиске x-интегралов. Но для систем вида (3.33) эти две характеристические алгебры изоморфны, поскольку переменные x и y входят в уравнения симметричным образом.

Замечание 3.15. Можно показать, что если характеристическая алгебра системы экспоненциального типа является *алгеброй конечного роста*, то эта система может быть проинтегрирована методом обратной задачи.

Пример 3.1. Вернемся к уравнению Лиувилля (3.1) и вычислим его характеристическую алгебру. В данном случае мы имеем лишь два векторных поля: D_y и $\partial/\partial u$. Поскольку

$$D_y = e^u \frac{\partial}{\partial u_x} + u_x e^u \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + e^u (u_{xx} + u_x^2) \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \dots = e^u \left(\frac{\partial}{\partial u_x} + u_x \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + (u_{xx} + u_x^2) \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \dots \right),$$

причем содержимое последней скобки не зависит явно от u, единственный нетривиальный коммутатор легко вычисляется:

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}, D_y \right] = D_y.$$

Последнее равенство говорит о том, что в данном случае χ — двумерная разрешимая алгебра Ли. Отсюда, пользуясь формулой (3.34), нетрудно получить, что

$$d_1 = 2 - 2 = 0,\ d_2 = 3 - 2 = 1,\ d_3 = 4 - 2 = 2, \dots, d_k = k - 1,$$

т.е. в каждой размерности есть ровно один нетривиальный интеграл. Тот факт, что уравнение Лиувилля не имеет y-интегралов первого порядка, мы уже обсуждали; единственный y-интеграл второго порядка мы тоже уже находили: $J_2 = u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2$. Интеграл третьего порядка тоже нетрудно угадать: $J_3 = D_x(J_2) = u_{xxx} - u_x u_{xx}$. Легко видеть, что аналогичным образом дифференцированием J_2 по переменной x получаются и все остальные y-интегралы более высокого порядка.

Теперь мы готовы к тому, чтобы сформулировать основную теорему о системах экспоненциального типа, которая доказана в статье [28].

Теорема 3.3. *Система экспоненциального типа имеет конечномерную характеристическую алгебру, если и только если эта система распадается в прямую сумму систем, соответствующих простым алгебрам Ли (сериям A-D и исключительным).*

3.3 Уравнение sin-Гордон

3.4 Трехмерная совместность уравнений на квад-графах

Литература

[1] М. Абловиц, Х. Сигур. *Солитоны и метод обратной задачи.* М., Мир, 1987.

[2] В. И. Арнольд. *Математические методы классической механики.* М., Наука, 1974.

[3] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 3, М., Наука, 1967.

[4] А. В. Болсинов. Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли и полнота семейств функций в инволюции. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **27** (1991), вып. 1, 68–92.

[5] А. П. Веселов, А. Б. Шабат. Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шрёдингера. *Функ. Анализ*, **27** (1993), вып. 2, 1–21.

[6] И. М. Гельфанд, Л. А. Дикий. Дробные степени операторов и гамильтоновы системы. *Функ. Анализ*, **10** (1976), вып. 4, 13–29.

[7] *Геометрические методы в математической физике.* Лекции летней школы (под ред. Б. А. Дубровина), М., МАКС-Пресс, 2012.

[8] P. Damianou. Multiple Hamiltonian structures for Toda-type systems. *J. Math. Phys.*, **35** (1994), no. 10, 5511–5541.

[9] А. В. Жибер, В. В. Соколов. Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа. *УМН*, **56** (1999), вып. 1, 63–106.

[10] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. *Теория солитонов: метод обратной задачи.* М., Наука, 1980.

[11] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М., Наука, 1972.

[12] Л. Д. Кудрявцев. *Математический анализ.* М., Высшая школа, 1973.

[13] Н. А. Кудряшев. *Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений.* Москва–Ижевск, ИКИ, 2004.

[14] М. М. Лаврентьев, Б. В. Шабат. *Методы теории функций комплексного переменного.* М., Наука, 1973.

[15] А. Н. Лезнов. О полной интегрируемости одной нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных в двумерном пространстве. *ТМФ*, **42** (1980), вып. 3, 343–349.

[16] Дж. Л. Лэм. *Введение в теорию солитонов.* М., Мир, 1983.

[17] В. Ю. Новокшенов. *Введение в теорию солитонов.* Ижевск, РХД, 2002.

[18] П. Олвер. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.* М., Мир, 1989.

[19] М. Рид, Б. Саймон. *Методы современной математической физики.* Т. 1-4, М., Мир, 1977-1982.

[20] Ф. Трикоми. *Интегральные уравнения.* М., ИЛ, 1960.

[21] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко. *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений.* М., Факториал, 1995.

[22] Л. Д. Фаддеев. Обратная задача квантовой теории рассеяния. *УМН*, **14** (1959), вып. 4, 57–119.

[23] Л. Д. Фаддеев. Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера. *Тр. МИАН*, **73** (1964), 314–336.

[24] А. Т. Фоменко. *Симплектическая геометрия.* М., Изд. МГУ, 1988.

[25] *Функциональный анализ.* Сер. СМБ., М., Наука, 1964.

[26] Дж. Хамфрис. *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений.* М., МЦНМО, 2003.

[27] А. Б. Шабат. К теории преобразований Лапласа–Дарбу. *ТМФ*, **103** (1995), вып. 1, 170–175.

[28] А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов. Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана. *Препринт. Уфа: БФАН СССР*, 1981.

[29] Л. П. Эйзенхарт. *Непрерывные группы преобразований.* М., ИЛ, 1947.

[30] В. А. Юрко. *Введение в теориюобратных спектральных задач.* М., Физматлит, 2007.

Предметный указатель

QR-алгоритм, 55
y-интеграл, 120, 127
    минимальный, 120
Бэклунда
    преобразование, 108
Фреше производная, 6
Гато производная, 8
Грина
    функция, 83
Йоста функции, 85
Клеро интеграл, 15
Лиувилля
    уравнение, 119
Миуры
    преобразование, 108
Ниейнхейса
    условие, 57
Схоутена
    условие, 20
Сохоцкого
    формула, 91
алгебра
    характеристическая, 134
амплитуда рассеяния, 85
аннулятор скобки Пуассона, 24
атлас
    симплектический, 22
бигамильтонова
    система, 59
цепочка
    Тоды, 46
        двумеризованная, 128
        обобщенная, 46
    Вольтерра, 47
        спаренная, 79
    одевающая, 67
циклическая координата, 14
действие, 7
дифференциальный оператор
    формально сопряженный, 66
дисперсионное соотношение, 93
двумеризованная цепочка Тоды, 128
экстремаль, 7, 8
эволюционное уравнение, 75, 110
формула
    Сохоцкого, 91
функции Йоста, 85
функциональная
    независимость, 29
функция
    Грина, 83
    Казимира, 24
функция Казимира
    локальная, 25
гамильтониан, 17, 23, 111
гамильтонов оператор, 111
гамильтонова система, 23
    каноническая, 17
гармонический осциллятор, 28
характеристическая
    алгебра, 134
иерархия
    КдФ, 78, 82
интеграл
    Клеро, 15
    Крускала, 115
    первый, 13
интегралы в инволюции, 31
интегрируемость
    по Дарбу, 128
    в квадратурах, 31
    явная, 128
изоспектральная деформация, 77
каноническое преобразование, 26
коэффициент
    отражения, 86
    прохождения, 86
константа движения, 13
координаты
    симплектические, 22
косой градиент, 23
лагранжаин
    невырожденный, 10
лагранжиан, 7

нулевой, 13
лист симплектический, 25
метод обратной задачи, 50
многообразие
пуассоново, 20
симплектическое, 19
многосолитонное решение, 103
мультигамильтонова
система, 62
независимость интегралов, 31
норма, 5
нормированное пространство, 5
одевающая
цепочка, 67
оператор
Эйлера, 12
Хироты, 106
Шредингера, 66
гамильтонов, 111
рекурсии, 57
оператор Шредингера
дискретный, 79
пара Лакса, 43
переменные
Флашки, 46
действие-угол, 38
первый интеграл, 13
полная энергия, 14
полная интегрируемость, 31
порядок y-интеграла, 127
потенциал
безотражательный, 88, 102
представление
нулевой кривизны, 131
представление Лакса, 43
зависящее от параметра, 45
преобразование
Бэклунда, 108
Дарбу, 65
Дарбу–Лапласа, 122
Миуры, 108
каноническое, 26
принцип наименьшего действия Гамильтона, 10
производная
Фреше, 6
Гато, 8
вариационная, 9
пуассонова структура, 20
пуассоново многообразие, 20
ранг скобки Пуассона, 24
рекурсии
оператор, 57
решение
односолитонное, 80
ряд
Лапласа, 126
симметрия, 15
дискретная, 16
непрерывная, 15
симплектическая структура, 19
симплектический лист, 25
симплектическое многообразие, 19
симплектоморфизм, 26
система
бигамильтонова, 59
экспоненциального типа, 131
интегрируемая по Лиувиллю, 31
консервативная, 14
мультигамильтонова, 62
вполне интегрируемая, 31
скобка
Гарднера–Захарова–Фаддеева, 112
Пуассона
теоретико-полевая, 111
скобка Пуассона, 19
каноническая, 18
скобки Пуассона
согласованные, 56
согласованные скобки
Пуассона, 56
спектр, 82
дискретный, 82
непрерывный, 83
остаточный, 83
точечный, 82
спектральные данные, 50
спектральный параметр, 45
структура
пуассонова, 20
симплектическая, 19
теорема
Дарбу, 22
торы Лиувилля, 38
уравнение
Гельфанда–Левитана–Марченко, 100
Хироты билинейное, 106
КдФ, 78
Кортевега–де Фриза
линеаризованное, 76

модифицированное, 108
Кортевега-де Фриза, 78
Лиувилля, 119
Вейерштрасса, 79
эволюционное, 75, 110
лиувиллевского типа, 127
уравнения
Эйлера–Лагранжа, 8
Гамильтона, 17
Гарднера–Грина–Крускала–Миуры, 97
условие
Нийенхейса, 57
Схоутена, 20
вариационная производная, 9
вариация функционала, 9
векторное поле
гамильтоново, 22
волчок
Эйлера, 41
Лагранжа, 42
волна
бегущая, 79
второй закон Кеплера, 39
задача
Кеплера, 38
двух тел, 38
закон Кеплера
второй, 39
закон сохранения, 13