

ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ  $q$ -ЦЕПОЧКИ ДАРБУ

И. А. Дынников, С. В. Смирнов

Цепочкой Дарбу называется последовательность самосопряженных дифференциальных операторов  $L_1, L_2, \dots$  на прямой, связанных преобразованиями Дарбу:

$$L_j = A_j A_j^+ - \alpha_j = A_{j-1}^+ A_{j-1}, \quad (1)$$

где  $A_j = -d/dx + f_j(x)$  – дифференциальные операторы первого порядка. Цепочка называется циклической периода (или длины  $r$ ), если  $L_{j+r} = L_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . В частном случае  $r = 1$  оператор  $L + \frac{\alpha}{2}$  является гармоническим осциллятором.

Циклические цепочки Дарбу приводят к интегрируемым системам дифференциальных уравнений на функции  $f_j$ , которые изучались в [1]. Принципиально отличаются случаи  $\alpha = 0$  и  $\alpha \neq 0$ , где  $\alpha = \sum_{j=1}^r \alpha_j$ . В случае  $\alpha = 0$  операторы циклической цепочки Дарбу являются конечнозонными. При  $\alpha \neq 0$  уравнения на  $f_j$  сводятся к уравнениям Пенлеве и их высшим аналогам, а соотношения (1) обязывают операторы  $L_j$  иметь дискретный спектр, образованный  $r$  арифметическими прогрессиями (см. [1]).

Рассмотрим следующий дискретный “ $q$ -аналог” цепочки Дарбу:

$$L_j = A_j A_j^+ - \alpha_j = q A_{j-1}^+ A_{j-1}, \quad (2)$$

где  $A_j = a_j + b_j T$  – разностные операторы на одномерной решетке  $\mathbb{Z}$ ,  $T$  – оператор сдвига:  $(A_j f)(n) = a_j(n)f(n) + b_j(n)f(n+1)$ ,  $a_j(n), b_j(n) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Без ограничения общности можно считать, что  $b_j(n) > 0$  для всех  $j, n$ . Будем говорить, что цепочка (2) является циклической с периодом  $r$  и сдвигом  $s$ , если для всех  $j \geq 1$  выполнено

$$L_{j+r} = T^{-s} L_j T^s. \quad (3)$$

Ранее в литературе рассматривался в основном случай  $s = 0$ . Однако в работе [2], а также в [3] указывалась возможность “обратной” факторизации, т.е. замены операторов  $A_j = a_j + b_j T$  на операторы вида  $A_j = a_j T^+ + b_j$ , что фактически эквивалентно рассмотрению “прямой” факторизации при  $s = r$  (оператор  $L_j$  заменяется на  $T^{-j} L_j T^j$ ). Общая постановка с произвольным  $s$ , по-видимому, не рассматривалась. В литературе изучались следующие случаи.

1.  $\alpha = 0$ ,  $q = 1$ ,  $r$  – произвольное [2]. Операторы  $L_j$  являются конечнозонными.
2.  $\alpha > 0$ ,  $q = 1$ ,  $r = 1$  (разностный аналог гармонического осциллятора) [2]. В этом случае симметричных операторов  $L_j$  в пространстве функций на всей решетке  $\mathbb{Z}$  не существует, однако имеются решения на “полупрямой”  $\mathbb{Z}_{>0}$ . Спектр оператора  $L + \frac{\alpha}{2}$  такой же, как спектр обычного гармонического осциллятора,  $\lambda_k = \alpha(k + \frac{1}{2})$ , собственные функции выражаются через многочлены Шарлье и потому образуют полное семейство в  $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z}_{>0})$ .
3.  $r = 1$ ,  $\alpha > 0$ ,  $0 < q < 1$  (или  $\alpha < 0$ ,  $1 < q$ ) [2], [4] ( $q$ -осциллятор). Оператор  $L$  имеет дискретный спектр в промежутке  $[0, \frac{q\alpha}{1-q})$  (или  $(0, \frac{q\alpha}{q-1})$  в случае  $q > 1$ ), образующий “ $q$ -арифметическую прогрессию”. Как отмечается в [2], оператор  $L$  в этом случае неограничен и, по-видимому, имеет непрерывный спектр в области  $(\frac{q\alpha}{1-q}, \infty)$ .
4. В работе [5] рассмотрена версия  $q$ -осциллятора в виде разностного оператора на всей прямой, которая в нашей постановке может быть интерпретирована как случай  $s = 1$ ,  $r = 2$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2$  ( $\alpha$  и  $q$  такие же, как в предыдущем случае). В [5] указано частное решение, обладающее дополнительной симметрией относительно начала координат. Особенность данного случая в том, что оператор  $L$  является ограниченным и не имеет непрерывного спектра.

Здесь мы укажем, что последнее свойство наблюдается в случае цепочки произвольной четной длины при  $s = r/2$ , и приведем явный вид общего решения задачи в случае  $s = 1$ ,  $r = 2$ .

**ТЕОРЕМА.** Для произвольных четного  $r$ , положительных  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ,  $0 < q < 1$  задача (2), (3) при  $s = r/2$  имеет  $r$ -параметрическое семейство решений. При этом для всех  $j$  оператор  $L_j$  ограничен и имеет только дискретный спектр  $\{\lambda_{j,0}, \lambda_{j,1}, \dots\}$  в проме-

жутке  $[0, \|L\|)$ , вычисляемый по схеме Дарбу:  $\lambda_{j,0} = 0$ ,  $\lambda_{j+1,k+1} = q(\lambda_{j,k} + \alpha_j)$ ,  $\lambda_{j+r,k} = \lambda_{j,k}$ . Для каждого  $j$  собственные функции операторов  $L_j$ , также вычисляемые по схеме Дарбу:  $A_{j-1}\psi_{j,0} = 0$ ,  $\psi_{j+1,k+1} = A_j^+ \psi_{j,k}$ , образуют полное семейство в  $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$ .

Аналогичное утверждение имеет место при  $\alpha_1, \dots, \alpha_r < 0$ ,  $1 < q$  (в этом случае нуль не входит в спектр операторов  $L_j$ ).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. При  $r = 2 = 2s$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ ,  $0 < q < 1$  общее решение задачи (2), (3) имеет вид:  $a_1(n) = \epsilon \sqrt{\xi_{2n}}$ ,  $b_1(n) = \sqrt{\eta_{2n+1}}$ ,  $a_2(n) = \epsilon \sqrt{\xi_{2n-1}}$ ,  $b_2(n) = \sqrt{\eta_{2n}}$ , где  $\epsilon = \pm 1$ ,

$$\xi_n = \frac{1}{2} \frac{c_n - 2\kappa q^{-n-\varphi-\frac{1}{2}} + c_{n+1}q^{-2n-2\varphi-1}}{(1-q^{-2(n+\varphi)})(1-q^{-2(n+\varphi+1)})}, \quad \eta_n = \frac{1}{2} \frac{c_{n+1} - 2\kappa q^{n+\varphi+\frac{1}{2}} + c_n q^{2n+2\varphi+1}}{(1-q^{2(n+\varphi)})(1-q^{2(n+\varphi+1)})},$$

$$c_n = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1-q} + (-1)^n \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1+q}, \quad (4)$$

$\varphi$  — произвольный параметр, а параметр  $\kappa$  удовлетворяет ограничениям

$c_{[\varphi]}q^{-\theta} + c_{[\varphi]-1}q^{\theta} < 2\kappa < \min(c_{[\varphi]}q^{\theta+1} + c_{[\varphi]-1}q^{-\theta-1}, c_{[\varphi]}q^{\theta-1} + c_{[\varphi]-1}q^{-\theta+1})$  при  $\varphi \notin \mathbb{Z}$  и  $2\kappa = c_{\varphi}q^{\frac{1}{2}} + c_{\varphi-1}q^{-\frac{1}{2}}$ , если  $\varphi \in \mathbb{Z}$  (в этом случае дроби (4) следует сократить на  $1-q^{2(n+\varphi)}$  при  $n \equiv \varphi \pmod{2}$  и на  $1-q^{2(n+\varphi+1)}$  при  $n \equiv \varphi+1 \pmod{2}$ ), где  $\theta = \varphi - [\varphi] - \frac{1}{2}$ ,  $[\varphi]$  обозначает целую часть числа  $\varphi$ .

НАБЛЮДЕНИЕ. В случае  $r = 2$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2$  операторы  $L_j + \frac{\alpha_j}{2}$ , построенные по указанным решениям, сходятся при  $q \rightarrow 1$  к оператору гармонического осциллятора в следующем смысле. Положим  $\varphi = 0$ ,  $\epsilon = -1$ ,  $q = \exp(-\frac{\alpha_1}{4}h^2)$ ,  $x = nh$ ,  $T = \exp(h\frac{d}{dx})$  и будем считать  $n$  вещественным в формулах (4), а оператор  $L_j$  — разностным оператором на всей прямой  $\mathbb{R}$ . Тогда для  $f \in C^2(\mathbb{R})$  будем иметь

$$\left(L_{1,2} + \frac{\alpha_1}{2}\right)f(x) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha_1^2}{4}x^2\right)f(x) + o(h).$$

Аналогично, в случае  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  оператор  $L_j$  сходится к

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{(\alpha_j + \alpha_{j+1})^2}{16}x^2 - \frac{\alpha_j}{2} - \frac{(\alpha_j - \alpha_{j+1})(\alpha_j + 3\alpha_{j+1})}{4(\alpha_j + \alpha_{j+1})^2x^2},$$

где  $\alpha_{j+2} = \alpha_j$ .

В случаях 2, 3, упомянутых выше, такая связь между дискретной и непрерывной задачами не имеет места. Таким образом, рассматриваемый нами случай  $s = r/2$  дает в каком-то смысле “правильную” дискретизацию обычной цепочки Дарбу.

Мы надеемся доказать, что такого рода сходимость  $q$ -цепочки к обычной цепочке Дарбу имеет место и в случае произвольного четного  $r$ . Численный эксперимент подтверждает сходимость  $q$ -цепочки периода 6 к обычной цепочке Дарбу периода 3 в случае  $\alpha_j = \alpha_{j+3}$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. П. Веселов, А. Б. Шабат // Функц. анализ и его прил. 1993. Т. 27. № 2. С. 1–21.  
 [2] S. P. Novikov, I. A. Taimanov. Appendix II in S. P. Novikov, A. P. Veselov // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1997. V. 179. P. 109–132. [3] С. П. Новиков, И. А. Дынников // УМН. 1997. Т. 52. № 5. С. 175–234. [4] V. Spiridonov, L. Vinet, A. Zhedanov // Lett. Math. Phys. 1993. V. 29. № 1. P. 63–73. [5] N. Atakishiyev, A. Frank, K. Wolf // J. Math. Phys. 1994. V. 35. № 7. P. 3253–3260.