Аналитическая геометрия 9

Проективная геометрия

1. Пусть точки A, B, C, A_1, B_1, C_1 проективной плоскости таковы, что точки пересечения прямых AB и A_1B_1, AC и A_1C_1, BC и B_1C_1 лежат на одной прямой. Доказать, что прямых AA_1, BB_1 и CC_1 пересекается в одной точке на проективной плоскости.

2. Доказать, что если A, B, C и D — четыре точки проективной прямой, никакие три из которых не лежат на одной прямой, то точки пересечения прямых AB и CD, AC и BD, AD и BC тоже не лежат на одной прямой.

3. Доказать, что произвольная парабола в аффинной части проективной плоскости касается бесконечно удаленной прямой.

4. Доказать, что прямая l касается невырожденной действительной квадрики Γ на проективной плоскости тогда и только тогда, когда выполнено соотношение $(\alpha, \beta, \gamma)A^{-1}(\alpha, \beta, \gamma)^t = 0$, где A — матрица этой кривой, а $(\alpha : \beta : \gamma)$ — плюккеровы координаты прямой l.

5. Доказать, что для любых пяти прямых общего положения на проективной плоскости существует единственная квадрика, их касающаяся.

6. Пусть Γ — невырожденная действительная квадрика на проективной плоскости, а A, B и C — произвольные ее точки. Пусть l_1, l_2 и l_3 — касательные к ней в этих точках (соответственно). Доказать, что точки пересечения прямых l_1 и BC, l_2 и AC, l_3 и AB лежат на одной прямой.

7. Пусть Γ — невырожденная действительная квадрика на проективной плоскости, а l — произвольная прямая. Выберем произвольную точку $E \in \Gamma$ и для любой пары точек $A, B \in \Gamma$ определим точку $A + B$ следующим образом: пусть C — точка пересечения прямых AB и l; тогда $A + B$ — вторая точка пересечения прямой CE с квадрикой (в случае совпадения двух точек на квадрике вместо секущей надо брать касательную). Доказать, что построенная операция вводит на Γ структуру абелевой группы.