

Аналитическая геометрия 6

Кривые второго порядка

1. Найти геометрическое место середин отрезков, отсекающих от данного угла величины α треугольник площади S . Доказать, что все эти отрезки касаются одной и той же гиперболы.
2. Доказать, что произведение расстояний от точки произвольной гиперболы до ее асимптот постоянно, т.е. не зависит от выбора точки.
3. Пусть две кривые второго порядка пересекаются в четырех точках и канонические оси одной кривой соответственно параллельны каноническим осям другой. Доказать, что эти четыре точки лежат на одной окружности.
4. Пусть уравнения двух эллипсов отличаются лишь свободными членами. Доказать, что эти эллипсы гомотетичны.
5. Пусть уравнения двух гипербол отличаются лишь свободными членами. Доказать, что этих гипербол общие асимптоты.
6. Канонические оси двух коник, пересекающихся в четырех точках, перпендикулярны. Доказать, что эти четыре точки лежат на одной окружности.
7. Найти геометрическое место точек пересечения касательных к эллипсу, проведенных в концах его сопряженных диаметров.
8. Найти геометрическое место середин хорд эллипса, соединяющих концы его сопряженных диаметров.
9. Построить циркулем и линейкой центр заданного эллипса (заданной гиперболы).
10. Построить циркулем и линейкой касательную к заданному эллипсу (заданной гиперболе) в заданной точке.
11. Построить циркулем и линейкой полярю заданной точки относительно заданного эллипса (заданной гиперболы).
12. Какое множество на плоскости задает уравнение диаметра, сопряженного асимптотическому направлению для кривой второго порядка?
13. Доказать, что диагонали параллелограмма, описанного около произвольного эллипса, являются его сопряженными диаметрами.
14. Доказать, что прямая $\alpha x + \beta y + 1 = 0$ касается невырожденной действительной кривой второго порядка, задаваемой уравнением или является ее асимптотой, тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$(\alpha, \beta, 1)A^{-1}(\alpha, \beta, 1)^t = 0,$$

где A — матрица этой кривой.

15. Доказать, что для четырех прямых общего положения существует единственная парабола, касающаяся их.