

Аналитическая геометрия 4

Системы координат и сферическая геометрия

1. Найти формулу для расстояния между точками (r_1, φ_1) и (r_2, φ_2) , где (r, φ) — полярные координаты точки на плоскости.
2. Найти формулу для расстояния между точками (r_1, φ_1, z_1) и (r_2, φ_2, z_2) , где (r, φ, z) — цилиндрические координаты точки на плоскости.
3. Пусть $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ — стандартно вложенная в трехмерное евклидово пространство единичная сфера. Считая расстоянием между точками на S^2 длину кратчайшей из дуг большого круга, их соединяющего, найти формулу для расстояния между точками в терминах их географических координат (φ, ψ) .
4. Найти связь между суммой углов сферического треугольника и его площадью.
5. Пусть a, b и c — стороны треугольника на единичной сфере, а α, β и γ — противолежащие им углы. Доказать *теорему синусов* для сферического треугольника:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

6. Используя скалярное и векторное произведения, выразить косинус двугранного угла в трехгранном угле через синусы и косинусы его плоских углов.
7. Пусть a, b и c — стороны треугольника на единичной сфере, а α, β и γ — противолежащие им углы. Доказать *теорему косинусов* для сферического треугольника:

$$\text{i) } \cos \alpha = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha; \quad \text{ii) } \cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos c.$$

Во что превращаются при $a, b, c \rightarrow 0$ эти формулы для бесконечно малого сферического треугольника?

8. Найти параметризацию стандартно вложенной $(n - 1)$ -мерной сферы в \mathbb{R}^n :

$$S^{n-1} := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$