

Аналитическая геометрия 3

Скалярное, векторное и смешанное произведения

1. Доказать, что если в тетраэдре две пары противоположных ребер взаимно перпендикулярны, то взаимно перпендикулярны и ребра третьей пары.
2. Даны точки $O = (x_0, y_0, z_0)$, $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_3, y_3, z_3)$ и $D = (x_0, y_0, z_0)$. Найти алгебраическую характеристику (т.е. необходимое и достаточное условие в алгебраических терминах) того, что точка D находится внутри трехгранного угла $OABC$.
3. Доказать, что для произвольных векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} и \mathbf{d} имеет место тождество:

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = \det \begin{pmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{c}) & (\mathbf{a}, \mathbf{d}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{c}) & (\mathbf{b}, \mathbf{d}) \end{pmatrix}.$$

4. Доказать, что все грани тетраэдра равновелики тогда и только тогда, когда они равны.