

**Линейная алгебра и геометрия, 1 курс, 1 поток.
Весна 2009 года.
Лектор проф. Е. Г. Складенко.**

1 Программа

- Линейные векторные пространства, примеры. Подпространства, линейные оболочки. Факторпространства. Линейные подмногообразия.
- Линейная зависимость и независимость. Признаки зависимости, связанные с разложением векторов. Свойства разложений по линейно независимым векторам.
- Ранг множества векторов и его свойства. Размерность пространства, базисы, координаты. Размерность факторпространства.
- Теоремы об изоморфизме векторных пространств. Изоморфизм факторпространства дополнительному подпространству.
- Суммы и пересечения подпространств. Размерность суммы.
- Прямые суммы двух и более подпространств. Внешняя прямая сумма.
- Аффинные пространства, их однородность. Координатный репер, координаты векторов и точек.
- Переход к новым координатам в аффинном и векторном пространствах, матрица перехода. Связь старых и новых координат векторов и точек.
- Подпространства аффинного пространства, способы задания. Параметрические уравнения. Параллелепипеды.
- Аффинные пространства как множества решений систем уравнений.
- Взаимное расположение двух подпространств в аффинном пространстве (параллельность, скрещиваемость, минимальное объемлющее подпространство).
- Теоремы об изоморфизме двух аффинных пространств. Эквивалентность понятий аффинного и точечного пространств.
- Скалярное произведение векторов. Евклидовы векторные и точечные пространства. Линейная независимость ортогональных векторов.
- Ортонормированные базисы и реперы. Процесс ортогонализации.
- Теоремы об изоморфизме для евклидовых векторных и точечных пространств. В качестве следствий: длина вектора и расстояние между точками, неравенства треугольника, угол между векторами, перпендикулярность ортогональных векторов, теорема Пифагора, неравенство Коши-Буняковского, примеры. Изоморфизмы как изометрии.
- Ортогональное дополнение к подпространству, его свойства. Угол вектора с подпространством, удалённость вектора от подпространства.
- Проекция вектора на подпространство. Коэффициенты Фурье. Метод наименьших квадратов для решения переопределённых систем уравнений.

- Нормальный вектор гиперплоскости. Расстояние от точки до гиперплоскости, между параллельными гиперплоскостями.
- Определитель Грама и его свойства. Объём k -мерного параллелепипеда. Объём и определитель матрицы перехода (при $k = n$).
- Линейные отображения векторных пространств, матрица и аналитические формулы отображения.
- Векторное пространство линейных отображений. Композиции линейных отображений и матрицы отображений.
- Размерность ядра и образа линейного отображения. Условия изоморфизма.
- Линейные операторы, их аналитическая запись. Зависимость матрицы линейного оператора от выбора базиса (в том числе в тензорной форме).
- Кольцо линейных операторов, изоморфизмы кольцу матриц. Многочлены от операторов. Невырожденные операторы, полная линейная группа.
- Инвариантные подпространства и вид матрицы оператора. Наличие инвариантных подпространств над полями действительных и комплексных чисел. Ступенчатый вид матрицы оператора.
- Собственные векторы и собственные числа оператора. Собственные подпространства, их суммы.
- Характеристический полином оператора, инвариантность. Уравнения для собственных подпространств.
- Размерность собственного подпространства и кратность собственного числа. Условия диагонализуемости матрицы оператора.
- Полиномы, аннулирующие оператор. Теорема Гамильтона-Кэли.
- Вырожденность оператора, служащего множителем характеристического полинома от оператора.
- Распадение пространства в прямую сумму инвариантных подпространств, отвечающее распадение характеристического полинома на взаимно простые множители.
- Корневые векторы оператора и корневые инвариантные подпространства.
- Нормальная форма матрицы оператора на корневом подпространстве. Жорданова форма матрицы оператора.
- Минимальный аннулирующий полином, его вид по отношению к характеристическому. Вид минимального полинома при наличии жордановой формы.
- Комплексификация вещественного пространства и оператора.
- Матричная интерпретация рекуррентных соотношений и жорданова форма.
- Линейные отображения и преобразования аффинных пространств. Аналитические формулы преобразований. Аффинные преобразования и понятие об аффинной классификации фигур.
- Пространство линейных функций. Сопряжённые базисы, матрицы перехода. Преобразование координат линейных и полулинейных функций при замене базиса.
- Взаимная сопряжённость пространства с пространством линейных функций. Взаимная сопряжённость базисов.

- Билинейные и полуторалинейные функции, запись через координаты аргументов. Векторные пространства функций. Базисные функции, отвечающие базису основного пространства.
- Зависимость матрицы билинейной (полуторалинейной) функции от базиса (в том числе в тензорной записи). Ранг функции.
- Ядра билинейной (полуторалинейной) функции, их размерность. Невырожденные функции.
- Симметричные, кососимметричные и эрмитовы функции. Совпадение ядер.
- Ортогональность векторов и подпространств относительно функций с одним из видов симметрии. Размерность и свойства ортогонального дополнения.
- Нормальный вид билинейной (полуторалинейной) функции с одним из условий симметрии.
- Единственность нормального вида функции с одним из видов симметрии. Закон инерции для симметричной (эрмитовой) функции над полем вещественных (комплексных) чисел.
- Квадратичные функции, связь с билинейными, нормальный вид. Метод выделения полных квадратов для нахождения нормального вида.
- Теорема Якоби и метод Грама для приведения к нормальному виду.
- Положительно определённые симметричные и эрмитовы функции. Критерий Сильвестра.
- Симметричные, кососимметричные и эрмитовы скалярные произведения. Псевдоевклидовы, эрмитовы и симплектические векторные пространства. Теоремы об изоморфизме. Ортонормированные и симплектические базисы.
- Естественный изоморфизм пространства со скалярным произведением своему сопряжённому. Общий вид линейной (полулинейной) функции.
- Изотропные векторы и подпространства псевдоевклидова и эрмитова пространств. Линейная независимость ортогональных неизотропных векторов.
- Определитель Грама в пространстве с общим скалярным произведением. Процесс ортогонализации. Свойства ортогонального дополнения.
- Гамильтоновы базисы, изотропные подпространства в симплектическом пространстве.
- Расширение изотропного подпространства до лагранжева в симплектическом пространстве. Дополнительные лагранжевы подпространства.
- Унитарное пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенства треугольника.
- Ортогональные псевдоортогональные, унитарные, псевдоунитарные и симплектические матрицы. Специальные линейные группы.
- Операторы, сохраняющие скалярные произведения (ортогональные псевдоортогональные, унитарные, псевдоунитарные и симплектические), их матрицы. Свойства инвариантных подпространств. Изометрии. Группы операторов.
- Канонический вид ортогонального и унитарного операторов, его единственность. Собственные и инвариантные подпространства.
- Ортогональные преобразования точечных пространств, наличие неподвижной точки или инвариантной прямой.

- Группы $O(1), O(2), U(1), Sp(2), O(1, 1)$. Псевдповращения плоскости, гиперболическая тригонометрия. Преобразования Лоренца. Трёхмерное псевдоевклидово пространство.
- Овеществление комплексного пространства. Псевдоевклидово и симплектическое скалярные произведения, определяемые эрмитовым скалярным произведением.
- Овеществление операторов. Группа $U(p, q)$ как $O(2p, 2q) \cap Sp(2p + 2q)$.
- Существование и единственность сопряжённого оператора в пространстве со скалярным произведением. Свойства сопряжённых операторов, сопряжённые к операторам, сохраняющим скалярное произведение.
- Самосопряжённые и эрмитовы операторы (в евклидовом и унитарном пространствах). Кососимметричные операторы. Канонический вид для матриц. Свойства собственных векторов и подпространств. Канонические базисы.
- Полярные разложения операторов в композиции ортогональных (унитарных) и самосопряжённых операторов.
- Нормальные операторы. Канонические базисы, собственные подпространства, их свойства.
- Билинейные и полуторалинейные функции на пространстве со скалярным произведением. Естественный изоморфизм пространства таких функций пространству операторов.
- Канонический вид симметричной (эрмитовой) функции на евклидовом (унитарном) пространстве. Приведение к каноническому виду уравнения гиперповерхности 2-ого порядка в евклидовом точечном пространстве.
- Свойство мини-макса для главных значений квадратичных функций.
- Инварианты пары квадратичных форм, одна из которых положительно определена. Поиск канонического базиса.
- Тензоры, примеры. Тензоры и полилинейные функции. Векторные пространства тензоров.
- Умножение тензоров. Алгебра тензоров. Базисы и координаты в пространстве тензоров.
- Свёртки тензоров, примеры. Операции опускания и подъёма индексов в пространстве со скалярным произведением, свойства и примеры.
- Симметрия и косая симметрия тензоров и их координат. Операции симметрирования и альтернирования тензоров, свойства операций.
- Кососимметричные тензоры. Операция внешнего умножения, свойства.
- Простые поливекторы (и кососимметричные функции), их координаты. Примеры. Плюккеровы координаты подпространства (направляющий поливектор).
- Простота поливекторов (и кососимметричных функций) валентности $n - 1$.
- Базис и размерность пространства поливекторов (кососимметричных функций).

2 Коллоквиум

Традиционно проводится один коллоквиум по первой половине программы обязательного курса (заканчивающейся общей теорией линейных операторов).

3 Типовые задачи к зачёту

Указываемые номера – по "Сборнику задач по аналитической геометрии и линейной алгебре", издание второе, 2005 г.

3.1 Задачи теоретического плана, предназначенные для проверки уровня понимания студентами теоретического материала (на экзамене)

993-998, 1003, 1008-1011, 1033-1046, 1051-1053, 1055-1070, 1072, 1074-1077, 1081-1087, 1092-1096, 1102-1108, 1116-1118, 1120-1122, 1124-1143, 1145, 1146, 1151, 1154-1157, 1159-1163, 1165, 1166, 1169-1171, 1176, 1180-1183, 1185-1188, 1191, 1192, 1197, 1219, 1220, 1222-1224, 1226-1231, 1233-1238, 1240-1252, 1256, 1263, 1268-1270, 1274-1280, 1288, 1298, 1299, 1304, 1305, 1307, 1311, 1316-1327, 1330-1332, 1336-1341, 1343-1345, 1353, 1357, 1369, 1373, 1396, 1410, 1417, 1419-1427, 1429, 1430, 1435, 1440-1448, 1452-1456, 1458, 1463, 1467-1469, 1471-1479, 1481, 1485, 1487, 1489-1506, 1512, 1513, 1528-1531, 1534, 1535, 1546-1549, 1557-1560, 1563-1565, 1567-1575, 1577, 1578, 1581, 1585, 1587, 1589, 1609, 1611, 1615-1635, 1639-1656, 1658-1660, 1662, 1664-1666, 1674.

3.2 Задачи к зачёту (требующие проведения вычислений)

999, 1000, 1006, 1012-1014, 1016-1019, 1021-1024, 1026-1032, 1047-1049, 1054, 1088-1090, 1097-1101, 1110, 1115, 1164, 1177-1179, 1189, 1195, 1196, 1199 (1-12, 15-18), 1200 (1-9), 1205-1207, 1209, 1213, 1215-1217, 1221, 1257-1260, 1265, 1271-1273, 1289-1297, 1312-1315, 1333-1335, 1342, 1346, 1347, 1350, 1351, 1354, 1355, 1358, 1359, 1361, 1365-1368, 1370-1372, 1374-1376, 1379, 1383-1387, 1389, 1391, 1392, 1397, 1408, 1409, 1411, 1412, 1414, 1431-1434, 1449-1451, 1457, 1464, 1480, 1507-1509, 1516 (1-4, 7), 1517, 1536, 1550-1554, 1582, 1583, 1586, 1588, 1610, 1661 (1-5), 1669.

4 Минимум знаний, достаточный для получения положительной оценки на экзамене

Знание и понимание всех основных понятий, определений, понимание основных связей между ними и соотношений, знание и понимание формулировок всех теорем и утверждений, содержащихся в обязательном курсе.