ФИЛИФОРМНЫЕ $\mathbb{N}$-ГРАДУИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

Д. В. Миллионщиков

В настоящей заметке мы рассматриваем конечномерные $\mathbb{N}$-градуированные алгебры Ли $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1} \mathfrak{g}_i$ над полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики. Такие алгебры, как легко видеть, являются нильпотентными. Изучая в [1] многообразия нильпотентных алгебр Ли, М. Вернь выделила класс так называемых филиформных алгебр Ли – нильпотентных алгебр Ли с максимальной для их размерности $\dim \mathfrak{g}$ длиной $s = \dim \mathfrak{g} - 1$ нижнего центрального ряда:

$$C^1\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \supset C^2\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \supset \dots \supset C^k\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^{k-1}\mathfrak{g}] \supset \dots \supset C^s\mathfrak{g} \neq 0 \supset \{0\}. \tag{1}$$

Идеалы $\{C^i\mathfrak{g}\}$ нижнего центрального ряда нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определяют ее конечную убывающую фильтрацию C. Для фильтрованной таким образом филиформной алгебры $\mathfrak{g}$ размерности однородных компонент ее присоединенной градуированной алгебры Ли $\operatorname{gr}_C \mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} (\operatorname{gr}_C \mathfrak{g})_i$ $((\operatorname{gr}_C \mathfrak{g})_i = C^i\mathfrak{g}/C^{i+1}\mathfrak{g})$ равны:

$$\dim(\operatorname{gr}_C \mathfrak{g})_1 = 2, \qquad \dim(\operatorname{gr}_C \mathfrak{g})_2 = \dots = \dim(\operatorname{gr}_C \mathfrak{g})_{n-1} = 1.$$

Простейшим примером филиформной алгебры является алгебра $\mathfrak{m}_1(n)$, заданная базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$ и коммутационными соотношениями: $[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, \dots, n-1$ (соотношения вида $[e_i, e_j] = 0$ мы будем опускать).

Теорема 1 (М. Вернь [1]). *Пусть $\mathfrak{g}$ – филиформная алгебра Ли и $\operatorname{gr}_C \mathfrak{g}$ – ее присоединенная (относительно фильтрации C) градуированная алгебра Ли, тогда если*

1) $\dim \mathfrak{g} = 2k+1$, *то* $\operatorname{gr}_C \mathfrak{g}$ *изоморфна* $\mathfrak{m}_1(2k+1)$;
2) $\dim \mathfrak{g} = 2k$, *то* $\operatorname{gr}_C \mathfrak{g}$ *изоморфна либо* $\mathfrak{m}_1(2k)$, *либо* $\mathfrak{m}_{1,0}(2k)$ – *алгебре, заданной базисом* $e_1, \dots, e_{2k}$ *и коммутационными соотношениями*: $[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, \dots, n-1$; $[e_j, e_{2k+1-j}] = (-1)^{j+1} e_{2k}$, $j = 2, \dots, k$.

В [1] показано, что у филиформной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, для которой $\operatorname{gr}_C \mathfrak{g} \cong \mathfrak{m}_1(n)$, существует базис $e_1, \dots, e_n$ такой, что

$$[e_1, e_i] = e_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1; \qquad [e_i, e_j] \in F^{i+j}\mathfrak{g} = \langle e_{i+j}, \dots, e_n \rangle \quad \forall\, i+j \leqslant n. \tag{2}$$

Набор идеалов $F^k\mathfrak{g} = \langle e_k, \dots, e_n \rangle$, $k = 1, \dots, n$, определяет фильтрацию F алгебры $\mathfrak{g}$, причем для присоединенной алгебры Ли $\operatorname{gr}_F \mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{n} (\operatorname{gr}_F \mathfrak{g})_i$ все подпространства $(\operatorname{gr}_F \mathfrak{g})_i$ являются одномерными: $\dim(\operatorname{gr}_F \mathfrak{g})_i = 1$, $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим однопараметрическое семейство попарно неизоморфных $\mathbb{N}$-градуированных алгебр Ли: алгебра $\mathfrak{g}_{7,\alpha}$, отвечающая параметру $\alpha \in \mathbb{K}$, задается базисом $e_1, \dots, e_7$ и коммутационными соотношениями

$$\begin{gathered} [e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = e_6, \quad [e_1, e_6] = e_7, \\ [e_2, e_3] = (2+\alpha) e_5, \quad [e_2, e_4] = (2+\alpha) e_6, \quad [e_2, e_5] = (1+\alpha) e_7, \quad [e_3, e_4] = e_7. \end{gathered} \tag{3}$$

Другой пример связан с теорией бесконечномерных алгебр Ли: определим алгебру L_k как алгебру Ли полиномиальных векторных полей на $\mathbb{R}^1$, имеющих $x = 0$ нулем кратности не ниже $k+1$. Ее можно задать базисом

$$e_i = x^{i+1} \frac{d}{dx}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad i \geqslant k; \qquad [e_i, e_j] = (j-i) e_{i+j}, \quad i, j \in \mathbb{Z}, \quad i, j \geqslant k.$$

Фактор-алгебра $\mathscr{V}_n = L_1/L_{n+1}$ является филиформной алгеброй Ли.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1} \mathfrak{g}_i$ – $\mathbb{N}$-градуированная алгебра Ли такая, что*

$$\dim \mathfrak{g}_i = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant i \leqslant n, \\ 0, & i > n; \end{cases} \qquad [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}, \quad i \geqslant 2. \tag{4}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00090).

Тогда $\mathfrak{g}$ *изоморфна одной* (*и только одной*) *из следующих алгебр*:

1) *алгебры Ли, составляющие* 6 *серий* $\mathfrak{m}_1(n)$, $\mathfrak{m}_2(n)$, $\mathcal{V}_n$, $\mathfrak{m}_{1,1}(2k+2)$, $\mathfrak{m}_{1,2}(2k+2)$, $\mathfrak{m}_{1,3}(2k+3)$, *заданные с помощью базиса* $e_1,\dots,e_n$ *и коммутационных соотношений*:

алгебра	*размерность*	*коммутационные соотношения*
$\mathfrak{m}_1(n)$, $n\geqslant 3$	n	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,\dots,n-1$
$\mathfrak{m}_2(n)$, $n\geqslant 5$	n	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,\dots,n-1$ $[e_2,e_i]=e_{i+2},\ i=3,\dots,n-2$
$\mathcal{V}_n$, $n\geqslant 12$	n	$[e_i,e_j]=\begin{cases}(j-i)e_{i+j}, & i+j\leqslant n\\ 0, & i+j>n\end{cases}$
$\mathfrak{m}_{1,1}(2k+1)$, $k\geqslant 3$	$2k+1$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,\dots,2k$ $[e_l,e_{2k-l+1}]=(-1)^{l+1}e_{2k+1},\ l=2,\dots,k$
$\mathfrak{m}_{1,2}(2k+2)$, $k\geqslant 3$	$2k+2$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,\dots,2k+1$ $[e_l,e_{2k-l+1}]=(-1)^{l+1}e_{2k+1},\ l=2,\dots,k$ $[e_j,e_{2k-j+2}]=(-1)^{j+1}(k-j+1)e_{2k+2},\ j=2,\dots,k$
$\mathfrak{m}_{1,3}(2k+3)$, $k\geqslant 3$	$2k+3$	$[e_1,e_i]=e_{i+1},\ i=2,\dots,2k+2$ $[e_l,e_{2k-l+1}]=(-1)^{l+1}e_{2k+1},\ l=2,\dots,k$ $[e_j,e_{2k-j+2}]=(-1)^{j+1}(k-j+1)e_{2k+2},\ j=2,\dots,k$ $[e_m,e_{2k-m+3}]=(-1)^m\left((m-2)k-\frac{(m-2)(m-1)}{2}\right)e_{2k+3}$, $m=3,\dots,k+1.$

2) *алгебры Ли, образующие* 5 *однопараметрических семейств* $\{\mathfrak{g}_{n,\alpha}\}$: *это алгебры* $\mathfrak{g}_{7,\alpha}$ (*с базисом* $e_1,e_2,\dots,e_7$ *и соотношениями* (3)) *и их последовательные одномерные центральные расширения* $\mathfrak{g}_{8,\alpha}$, $\mathfrak{g}_{9,\alpha}$, $\mathfrak{g}_{10,\alpha}$, $\mathfrak{g}_{11,\alpha}$, *соответствующие коциклам*:

$$\Omega_{8,\alpha}=e^1\wedge e^7+\alpha e^2\wedge e^6+e^3\wedge e^5; \tag{5}$$

$$\Omega_{9,\alpha}=e^1\wedge e^8+\frac{2\alpha^2+3\alpha-2}{2\alpha+5}e^2\wedge e^7+\frac{2\alpha+2}{2\alpha+5}e^3\wedge e^6+\frac{3}{2\alpha+5}e^4\wedge e^5,\quad \alpha\neq-\frac{5}{2}; \tag{6}$$

$$\Omega_{10,\alpha}=e^1\wedge e^9+\frac{2\alpha^2+\alpha-1}{2\alpha+5}e^2\wedge e^8+\frac{2\alpha-1}{2\alpha+5}e^3\wedge e^7+\frac{3}{2\alpha+5}e^4\wedge e^6,\quad \alpha\neq-\frac{5}{2}; \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{11,\alpha}=e^1\wedge e^{10}&+\frac{2\alpha^3+2\alpha^2+3}{2(\alpha^2+4\alpha+3)}e^2\wedge e^9\\&+\frac{4\alpha^3+8\alpha^2-8\alpha-21}{2(\alpha^2+4\alpha+3)(2\alpha+5)}e^3\wedge e^8+\frac{3(2\alpha^2+4\alpha+5)}{2(\alpha^2+4\alpha+3)(2\alpha+5)}e^4\wedge e^7\\&+\frac{3(4\alpha+1)}{2(\alpha^2+4\alpha+3)(2\alpha+5)}e^5\wedge e^6,\quad \alpha\neq-\frac{5}{2},-1,-3.\end{aligned} \tag{8}$$

Замечание. Алгебра $\mathfrak{g}_{n,\alpha_0}$ при $\alpha_0=8$ изоморфна $\mathcal{V}_n$, $n=7,\dots,11$.

Следствие. *Пусть* $\mathfrak{g}=\bigoplus_{i=1}\mathfrak{g}_i$ – *бесконечномерная* $\mathbb{N}$*-градуированная алгебра Ли такая, что* $\dim\mathfrak{g}_i=1$, $\forall\, i$; $[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_i]=\mathfrak{g}_{i+1}$, $i\geqslant 2$. *Тогда* $\mathfrak{g}$ *изоморфна одной* (*и только одной*) *из следующих алгебр*: L_1, $\mathfrak{m}_1=\lim_n\mathfrak{m}_1(n)$, $\mathfrak{m}_2=\lim_n\mathfrak{m}_2(n)$.

Последнее утверждение является частным случаем классификации А. Фиаловски бесконечномерных $\mathbb{N}$-градуированных алгебр Ли с двумя образующими [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] M. Vergne // Bull. Soc. Math. France. 1970. V. 98. P. 81–116. [**2**] А. Фиаловски // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1983. № 2. С. 62–64.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: million@mech.math.msu.su

Принято редколлегией
23.01.2002