ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2000, т. 231, с. 1–18

УДК 515.164.63

Конечно определенные группы и полугруппы в теории узлов[1]

©2000 г. И. А. Дынников[2]

Поступило в мае 2000 г.

В работе построены конечно определенные полугруппы, центральные элементы в каждой из которых находятся во взаимно однозначном соответствии с изотопическими классами неориентированных зацеплений в $\mathbb{R}^3$. Решение проблемы равенства слов в этих полугруппах равносильно решению топологической задачи распознавания зацеплений и плетений. Дана также конструкция конечно представленных групп, в которые вкладывается группа кос.

1. ВВЕДЕНИЕ

Зацеплением в $\mathbb{R}^3$ мы будем называть объединение некоторого числа попарно не пересекающихся простых замкнутых ломаных линий в $\mathbb{R}^3$. В настоящей работе мы будем рассматривать только *неориентированные* зацепления. Два зацепления считаются эквивалентными, если они объемлемо изотопны в $\mathbb{R}^3$. Обозначим через L_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, множество изотопических классов n-компонентных зацеплений. Множество L_0 состоит всего из одного элемента — пустого зацепления, L_1 — это множество изотопических классов всех узлов в $\mathbb{R}^3$.

Пусть

$$L = L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup \ldots$$

— множество изотопических классов всех зацеплений. На L имеется естественная структура абелевой полугруппы, умножение в которой задается взятием объединения зацеплений, находящихся по разные стороны от некоторой полуплоскости, а единичным элементом является пустое зацепление из L_0. Полугруппа L не является конечно порожденной. Как абелева полугруппа она свободно порождена изотопическими классами так называемых неразводимых зацеплений.

В настоящей работе мы построим серию полугрупп Y_n, $n = 3, 4, \ldots, \infty$, обладающих следующими свойствами:

1) центр $Z(Y_n)$ полугруппы Y_n изоморфен полугруппе L;

2) группа D_n обратимых элементов полугруппы Y_n содержит подгруппу, изоморфную группе кос на бесконечном числе нитей;

3) при $n < \infty$ полугруппа Y_n и группа D_n являются конечно определенными, т.е. могут быть заданы конечным числом образующих и определяющих соотношений.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00090).

[2] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: dynnikov@mech.math.msu.su

Построение полугруппы, обладающей лишь свойствами 1) и 2), не вызывает труда. Мы сделаем это в разд. 2, слегка модифицировав стандартную конструкцию категории неориентированных плетений (связок). Разложение элементов этой полугруппы в произведение образующих задается любой диаграммой общего положения соответствующего плетения, а определяющие соотношения соответствуют изотопиям диаграмм и движениям Райдемайстера. Эти соотношения, точнее их аналоги для категории ориентированных плетений, использовались в [1] для построения инвариантов зацеплений.

Отличие построенной таким образом полугруппы T от полугрупп Y_n, $n = 3, 4, \dots$, в том, что она не может быть задана конечным числом определяющих соотношений. Однако полугруппа T вкладывается в каждую из полугрупп Y_n, которые уже являются конечно определенными.

Таким образом, мы сводим топологическую задачу распознавания зацеплений и плетений к чисто алгебраической — проблеме равенства слов в некоторой конечно определенной полугруппе. Согласно работе Матвеева [2] алгоритм для распознавания зацеплений существует. Кроме того, как С.В. Матвеев сообщил автору, усовершенствовав этот алгоритм, можно получить алгоритм для распознавания плетений, а значит, решить проблему равенства слов в полугруппах Y_n. Тем не менее было бы интересно получить чисто алгебраическое доказательство разрешимости проблемы равенства слов в этих полугруппах, получив тем самым альтернативный алгоритм распознавания зацеплений.

2. ПЛЕТЕНИЯ

Напомним конструкцию категории (неориентируемых) плетений [1]. Плетение типа (k, l) — это произвольное одномерное компактное PL-подмногообразие t в $\mathbb{R}^3$, лежащее в области

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1\} \tag{1}$$

и имеющее своей границей множество точек $\{(0, i, 0)\}_{1 \le i \le k} \cup \{(1, j, 0)\}_{1 \le j \le l} = t \cap \partial\mathcal{S}$. Плетения называются эквивалентными, если они объемлемо изотопны в $\mathcal{S}$, причем все точки границы области $\mathcal{S}$ предполагаются неподвижными при изотопии. Объектами категории плетений $\mathcal{T}$ являются неотрицательные целые числа, а морфизмами из объекта l в объект k — изотопические классы плетений типа (k, l).

Композиция $t_1 \circ t_2$ произвольных плетений t_1 и t_2 типа (k, l) и (l, m) соответственно задается как объединение

$$\psi_1(t_1) \cup \psi_2(t_2),$$

где $\psi_{1,2}$ — отображения из $\mathcal{S}$ в себя, определенные по формуле

$$\psi_1(x, y, z) = (x/2, y, z), \qquad \psi_2(x, y, z) = ((x + 1)/2, y, z).$$

Это правило корректно задает композицию морфизмов в категории $\mathcal{T}$. С точки зрения этой категории полугруппа L — это полугруппа морфизмов из объекта 0 в себя.

Немного модифицировав определения, мы можем получить вместо категории плетений более простой объект — полугруппу. Для этого изменим определение плетения следующим образом. Будем называть плетением любое PL-подмногообразие t в $\mathcal{S}$, границей ∂t которого является множество

$$\{(0, i, 0), (1, i, 0)\}_{i > 0},$$

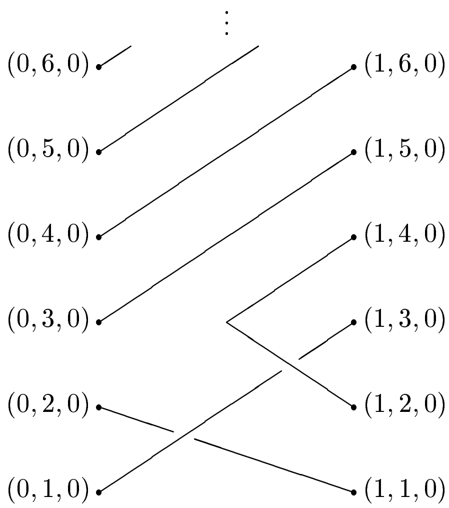

Рис. 1. Плетение типа (∞,∞)

причем $t \cap \partial\mathcal{S} = \partial t$, и такое, что все его компоненты, лежащие достаточно далеко от начала координат, представляют собой прямолинейные отрезки вида $[(0,i,0),(0,j,0)]$ (мы будем обозначать отрезок, соединяющий точки A и B, через $[A,B]$). При этом разность $j-i$ постоянна при больших i. Такие объекты можно было бы назвать плетениями типа (∞,∞). Пример плетения в смысле данного определения показан на рис. 1.

Заметим, что теперь композиция двух плетений, формально говоря, может не являться плетением, но является PL-подмногообразием, объемлемо изотопным в $\mathcal{S}$ некоторому плетению. Поэтому на множестве T изотопических классов таких плетений корректно определена операция композиции. По отношению к этой операции множество T является полугруппой.

Имеется очевидный функтор F из категории $\mathcal{T}$ в полугруппу T. Он определяется следующим образом. Пусть f — некоторый морфизм из объекта l в объект k. Морфизм f можно представить плетением (в стандартном смысле), целиком лежащим в области

$$y \leq k + x(l-k).$$

Добавим к этому плетению отрезки $[(0,k+i,0),(1,l+i,0)]$, $i>0$. Изотопический класс полученного плетения (в новом смысле) и будем считать образом $F(f)$ морфизма f.

Доказательство следующего утверждения не составляет труда.

Лемма 1. *Плетения t_1 и t_2 типа (k,l) эквивалентны тогда и только тогда, когда их образы $F(t_1)$ и $F(t_2)$ совпадают. Элемент полугруппы T имеет вид $F(t)$, где t — некоторое зацепление (т.е. плетение типа $(0,0)$), тогда и только тогда, когда он центральный.*

В полугруппе T легко указать также набор образующих и определяющих соотношений.

Лемма 2. *Полугруппа T порождается элементами α_i, β_i, σ_i, σ_i^{-1}, $i>0$, показанными на рис. 2. В ней имеют место равенства*

$$\alpha_i\beta_{i+1} = 1, \tag{2}$$

$$\alpha_{i+1}\beta_i = 1, \tag{3}$$

$$\alpha_i\alpha_{i+j+1} = \alpha_{i+j-1}\alpha_i, \tag{4}$$

$$\alpha_i\beta_{i+j+1} = \beta_{i+j-1}\alpha_i, \tag{5}$$

$$\beta_i\beta_{i+j-1} = \beta_{i+j+1}\beta_i, \tag{6}$$

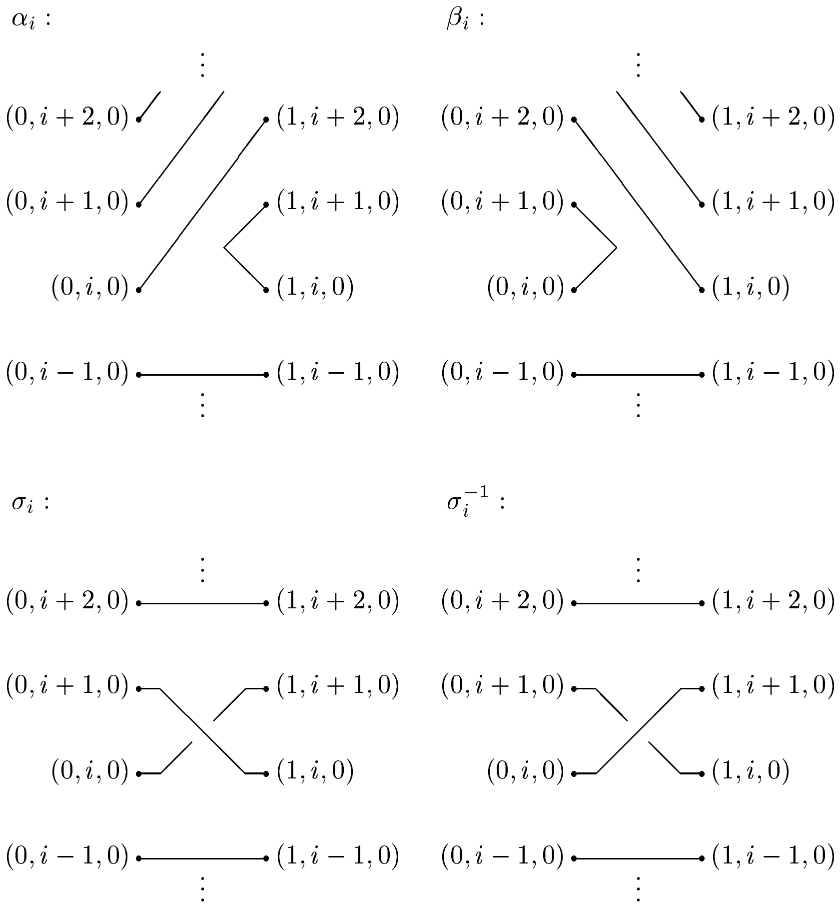

Рис. 2. Образующие полугруппы T

$$\beta_i\alpha_{i+j-1} = \alpha_{i+j+1}\beta_i, \tag{7}$$

$$\alpha_i\sigma_{i+j+1} = \sigma_{i+j-1}\alpha_i, \tag{8}$$

$$\alpha_{i+j+1}\sigma_i = \sigma_i\alpha_{i+j+1}, \tag{9}$$

$$\beta_i\sigma_{i+j-1} = \sigma_{i+j+1}\beta_i, \tag{10}$$

$$\beta_{i+j+1}\sigma_i = \sigma_i\beta_{i+j+1}, \tag{11}$$

$$\sigma_i\sigma_{i+j+1} = \sigma_{i+j+1}\sigma_i, \tag{12}$$

$$\alpha_i\sigma_{i+1}^{\pm1}\beta_{i+2} = \sigma_i^{\mp1}, \tag{13}$$

$$\alpha_{i+2}\sigma_{i+1}^{\pm1}\beta_i = \sigma_i^{\mp1}, \tag{14}$$

$$\alpha_i\sigma_{i+1}^{\pm1}\beta_i = 1, \tag{15}$$

$$\alpha_{i+1}\sigma_i^{\pm1}\beta_{i+1} = 1, \tag{16}$$

$$\sigma_i\sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1}\sigma_i = 1, \tag{17}$$

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \tag{18}$$

где $i, j > 0$. *Они могут быть взяты за набор определяющих соотношений полугруппы* T.

Это утверждение не содержит ничего нового по сравнению с аналогичным утверждением о порождающих соотношениях для категории плетений (см. [1]). Соотношения (2)–(14) от-

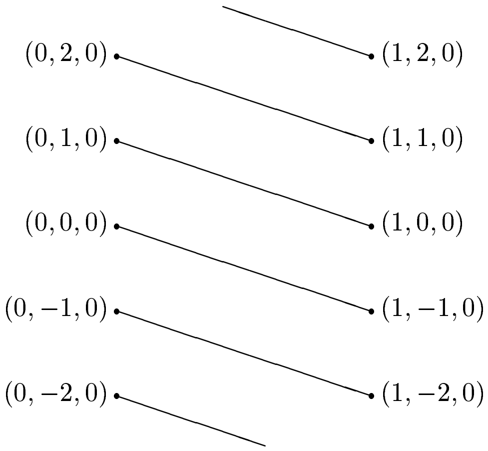

Рис. 3. Плетение τ

вечают изотопиям диаграмм плетений, соотношения (15), (16) — движению Райдемайстера типа I, соотношения (17) и (18) — движениям Райдемайстера типов II и III соответственно.

Замечание. Понятие плетения можно было бы обобщить немного по-другому, добавив к концевым точкам также точки $(0, i, 0)$, $(1, i, 0)$, для которых $i \leq 0$. Полученная в этом случае полугруппа плетений уже является конечно порожденной ввиду соотношений

$$\begin{aligned} \tau^i \alpha_1 \tau^{-i} &= \alpha_{i+1}, \\ \tau^i \beta_1 \tau^{-i} &= \beta_{i+1}, \\ \tau^i \sigma_1^{\pm 1} \tau^{-i} &= \sigma_{i+1}^{\pm 1}, \end{aligned}$$

где τ — плетение, показанное на рис. 3. Однако для нее не существует конечного набора определяющих соотношений.

3. ПЛЕТЕНИЯ, ВЛОЖЕННЫЕ В КНИГУ

Здесь мы определим полугруппу Y_∞, в которую полугруппа T может быть вложена. Сама полугруппа Y_∞ также не является конечно порожденной, но она нужна нам для дальнейших построений конечно определенных полугрупп, которые будут подполугруппами в Y_∞.

Обозначим через P_k, $k \in \mathbb{Z}$, полуплоскость

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq 0,\ z = ky\} \tag{19}$$

и рассмотрим часть объединения этих плоскостей, лежащую в области (1):

$$\mathbb{B} = \mathcal{S} \cap \Bigl(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} P_k\Bigr). \tag{20}$$

Множество $\mathbb{B}$ естественно назвать книгой, а прямую $y = z = 0$ — линией переплета. Обозначим через $E^0_{k,l}$ и $E^1_{k,l}$, где $k, l \in \mathbb{Z}$, $l > 0$, следующие точки, лежащие на границе книги $\mathbb{B}$:

$$E^0_{k,l} = (0, l, kl), \qquad E^1_{k,l} = (1, l, kl). \tag{21}$$

Плетением в книге $\mathbb{B}$ назовем любое PL-подмногообразие t в $\mathcal{S}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\partial t = t \cap \partial\mathcal{S} = \{E^0_{k,l}, E^1_{k,l}\}_{k,l\in\mathbb{Z},l>0}$;

2) t целиком содержится в $\mathbb{B}$;

3) t трансверсально линии переплета, т.е. имеет с ней лишь конечное число точек пересечения, которые не могут быть устранены малым шевелением плетения t без нарушения условия 2);

4) ограничение координаты x на каждую связную компоненту пересечения $t \cap P_i$ является монотонной функцией для всех $i \in \mathbb{Z}$.

Такие плетения мы называем эквивалентными, если они объемлемо изотопны в $\mathcal{S}$ (но не обязательно в $\mathbb{B}$!).

Композиция плетений в книге $\mathbb{B}$ определяется точно так же, как и в случае обычных плетений. По отношению к композиции изотопические классы плетений в $\mathbb{B}$ образуют полугруппу с единицей

$$I = \bigcup_{k,l\in\mathbb{Z},\ l>0} [E^0_{k,l}, E^1_{k,l}].$$

Эту полугруппу мы и обозначим через Y_∞. Плетения в книге $\mathbb{B}$ мы в дальнейшем называем просто плетениями.

Для каждого $n \geq 3$ подполугруппу в Y_∞, состоящую из изотопических классов плетений t таких, что $t \cap \mathring{P}_k = I \cap \mathring{P}_k$ при $k < 0$ и при $k > n-1$, обозначим через Y_n. Здесь через $\mathring{P}_k$ мы обозначаем полуплоскость P_k без границы: $\mathring{P}_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0,\ z = ky\}$.

Заметим, что каждое плетение t изотопно некоторому плетению t', для которого найдутся $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}$ такие, что $t' \cap \mathring{P}_k = I \cap \mathring{P}_k$ при $k < N_1$ или $k > N_2$. Кроме того, плетение t' можно выбрать таким, чтобы для достаточно большого N_3 и некоторых целых n_k, $k \in \mathbb{Z}$, отрезки $[E^0_{k,n}, E^1_{k,n+n_k}]$ целиком содержались в t' при $n > N_3$ и всех $k \in \mathbb{Z}$. Легко видеть, что определенное таким образом отображение $\varphi\colon Y_\infty \to \mathbb{Z}^\mathbb{Z}$,

$$\varphi(t) = (\ldots, n_{-2}, n_{-1}, n_0, n_1, n_2, \ldots), \tag{22}$$

является гомоморфизмом полугрупп.

За меру сложности $m(t)$ произвольного плетения t в книге $\mathbb{B}$ естественно взять число точек пересечения плетения t с линией переплета. Рассмотрим простейшие нетождественные плетения, т.е. плетения, имеющие сложность 1. Если $m(t) = 1$, то, как легко видеть, ровно для двух значений $i \in \mathbb{Z}$ пересечение $t \cap \mathring{P}_i$ неизотопно пересечению $I \cap \mathring{P}_i$. Для этих двух исключительных значений i мы имеем $\varphi(t)_i = \pm 1$. При этом если $\varphi(t)_i = 1$, то в полуплоскости P_i плетение t имеет следующие компоненты (с точностью до изотопии):

$$t \cap P_i = \Bigl(\bigcup_{l>0} [E^0_{i,l}, E^1_{i,l+1}]\Bigr) \cup [A, E^1_{i,1}],$$

где A — единственная точка пересечения плетения t с линией переплета. В случае $\varphi(t)_i = -1$, $m(t) = 1$ мы имеем (с точностью до изотопии в P_i)

$$t \cap P_i = \Bigl(\bigcup_{l>0} [E^0_{i,l+1}, E^1_{i,l}]\Bigr) \cup [E^0_{i,1}, A].$$

Обозначим через a_i, b_i, c_i, d_i элементы группы Y_∞, представленные плетениями сложности 1 и такие, что

$$\begin{aligned}\varphi(a_i)_j &= \delta_{i-1,j}+\delta_{i,j},\\ \varphi(b_i)_j &= \delta_{i-1,j}-\delta_{i,j},\\ \varphi(c_i)_j &= -\delta_{i-1,j}-\delta_{i,j},\\ \varphi(d_i)_j &= -\delta_{i-1,j}+\delta_{i,j}.\end{aligned}\tag{23}$$

Здесь $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Нарисовав соответствующие картинки, нетрудно убедиться, что в полугруппе Y_∞ выполнены следующие соотношения:

$$a_id_{i+1}=a_{i+1}b_i,\tag{24}$$

$$d_ic_{i+1}=b_{i+1}c_i,\tag{25}$$

$$a_id_i=a_{i+1}b_{i+1},\tag{26}$$

$$b_ic_i=d_{i+1}c_{i+1},\tag{27}$$

$$a_ib_ic_id_i=1,\tag{28}$$

$$b_id_i=d_ib_i=1,\tag{29}$$

$$x_iy_j=y_jx_i,\tag{30}$$

$$x_id_{i-1}d_id_{i+1}=d_{i-1}d_id_{i+1}x_i\tag{31}$$

для всех $i,j\in\mathbb{Z}$ таких, что $|i-j|>1$, и $x_i\in\{a_i,b_i,c_i,d_i\}$, $y_j\in\{a_j,b_j,c_j,d_j\}$.

Теорема 1. *Элементы $\{a_i,b_i,c_i,d_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ порождают полугруппу Y_∞. Соотношения* (24)–(31) *могут быть взяты за набор определяющих соотношений полугруппы Y_∞.*

Доказательство. Докажем сначала простую часть теоремы, а именно что полугруппа Y_∞ порождается указанными элементами. Действительно, произвольное плетение можно разрезать плоскостями вида $x=\mathrm{const}$ на плетения сложности 1. Поэтому достаточно показать, что любое плетение сложности 1 представляется с точностью до изотопии как композиция наших образующих. Пусть плетение t сложности $m(t)=1$ таково, что

$$\varphi(t)_i=\varphi(t)_j=1,$$

где $j>i$. Тогда оно изотопно плетению

$$a_{i+1}d_{i+2}d_{i+3}\dots d_j.$$

Если $m(t)=1$ и

$$\varphi(t)_i=-\varphi(t)_j=1,$$

$j>i$, то t эквивалентно плетению

$$b_jb_{j-1}\dots b_{i+1}.$$

Остальные два случая рассматриваются аналогично.

Оставшаяся часть этого раздела посвящена доказательству достаточности соотношений (24)–(31) для реализации любой изотопии между плетениями в книге $\mathbb{B}$. Схема доказательства выглядит следующим образом. Согласно соотношению (29) элементы b_i и d_i являются взаимно обратными. Поэтому эквивалентность двух слов w_1 и w_2 в алфавите $A=\{a_i,b_i,c_i,d_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ по модулю соотношений (24)–(31) равносильна эквивалентности слов b_iw_1 и b_iw_2, а также d_iw_1 и d_iw_2, w_1b_i и w_2b_i, w_1d_i и w_2d_i. Мы покажем, что для любого слова w можно найти такие слова u и v, содержащие лишь буквы вида b_i и d_i, $i \in \mathbb{Z}$, что слово uwv эквивалентно по модулю соотношений (24)–(31) некоторому слову, задающему элемент из специальной подполугруппы в Y_∞, которая изоморфна T. Мы докажем, что определяющие соотношения (2)–(18) полугруппы T вытекают из (24)–(31).

Для $i \in \mathbb{Z}$ слово $w = x_1 x_2 \dots x_n$, где $x_1, \dots, x_n \in A$, назовем *i-сбалансированным*, если

$$\varphi(w)_i = 0$$

и для всех $k = 1, \dots, n$ выполнено неравенство

$$\varphi(x_1 \dots x_k)_i \geq 0.$$

На геометрическом языке i-сбалансированность слова w, соответствующего плетению $t \subset \mathbb{B}$, означает, что каждая компонента пересечения $t \cap \overset{\circ}{P}_i$ либо соединяет точки вида $E^0_{i,m}$ и $E^1_{i,m}$, либо соединяет две вершины плетения t, лежащие на линии переплета. Для любого $\varepsilon > 0$ любое i-сбалансированное плетение объемлемо изотопно в $\mathbb{B}$ такому плетению t', что в полуплоскости $P_i \cap \{y \geq \varepsilon\}$ плетение t' не отличается от тождественного.

Удобна также следующая интерпретация i-сбалансированности. Для данных слова w в алфавите A и целого i заменим каждую букву x на открывающую скобку, если $\varphi(x)_i = 1$, на закрывающую скобку, если $\varphi(x)_i = -1$, и на пробел, если $\varphi(x)_i = 0$. Слово w является i-сбалансированным тогда и только тогда, когда полученная последовательность скобок сбалансирована.

Пусть $\widetilde{T}$ — подполугруппа полугруппы Y_∞, состоящая из всех изотопических классов плетений, являющихся i-сбалансированными для всех $i \neq 0$.

Лемма 3. *Полугруппа $\widetilde{T}$ изоморфна полугруппе T, введенной в разд.* 2.

Доказательство. Легко видеть, что если плетение t является i-сбалансированным для всех $i \neq 0$, то объемлемой изотопией в $\mathbb{B}$ его можно привести к виду такому, что

$$t \cap \{|z| \geq 1/2\} = I \cap \{|z| \geq 1/2\}.$$

Отбрасывая "тривиальную" часть плетения t, лежащую в области $|z| \geq 1/2$, мы получаем плетение с границей $\{E^0_{0,k}, E^1_{0,k}\}_{k>0}$, которое задает некоторый элемент из T. Таким образом, мы получаем отображение $\xi \colon \widetilde{T} \to T$. Очевидно, что это отображение инъективно. Построим обратное отображение, для чего укажем образы элементов α_i, β_i, $\sigma_i^{\pm 1}$, $i > 0$, порождающих полугруппу T, при отображении ξ^{-1}:

$$\alpha_i \mapsto d_1^{i-1} a_1 b_1^i, \tag{32}$$
$$\beta_i \mapsto d_1^i c_1 b_1^{i-1}, \tag{33}$$
$$\sigma_i \mapsto d_1^{i-1} b_0 d_1 d_0 b_1^i, \tag{34}$$
$$\sigma_i^{-1} \mapsto d_1^i b_0 b_1 d_0 b_1^{i-1}. \tag{35}$$

Тот факт, что плетения, стоящие в правых частях этих формул, переходят при отображении ξ в образующие α_i, β_i, $\sigma_i^{\pm 1}$, показанные на рис. 2, проверяется непосредственно. Далее мы отождествляем полугруппы $\widetilde{T}$ и T, считая T подполугруппой в Y_∞.

Лемма 4. *Если слово w в алфавите A является i-сбалансированным для всех $i \neq 0$, то по модулю соотношений* (24)–(31) *оно эквивалентно некоторому слову вида*

$$x_1 \dots x_m, \tag{36}$$

где $x_1, \dots, x_m \in \{d_1^{i-1} a_1 b_1^i, d_1^i c_1 b_1^{i-1}, d_1^{i-1} b_0 d_1 d_0 b_1^i, d_1^i b_0 b_1 d_0 b_1^{i-1}\}_{i>0}$.

Доказательство. Для начала мы покажем, что применением соотношений (24)–(31) к слову w можно избавиться в нем от всех вхождений букв a_i, b_i, c_i, d_i при $i \neq 0, 1$. Обозначим через A_i множество $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$. Пусть N — максимальное i такое, что слово w содержит буквы из A_i, и пусть $N > 1$. Соотношения (26), (27) и (29) влекут

$$\begin{aligned} a_N &= a_N b_N d_N = a_{N-1} d_{N-1} d_N, \\ c_N &= b_N d_N c_N = b_N b_{N-1} c_{N-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, применение этих соотношений позволяет избавиться в слове w от букв a_N, c_N. При этом слово w будет оставаться i-сбалансированным при $i \neq 0$. Действительно, на "скобочном" языке упомянутые замены выглядят следующим образом:

$$\begin{array}{llllll} i = N-2: & \varnothing & \to & \varnothing & \to & (\,)\,, \\ i = N-1: & (& \to & (\,(\,) & \to & (\,(\,)\,, \\ i = N: & (& \to & (\,)\,(& \to & (\,; \\ i = N-2: & \varnothing & \to & \varnothing & \to & (\,)\,, \\ i = N-1: &) & \to & (\,)\,) & \to & (\,)\,)\,, \\ i = N: &) & \to &)\,(\,) & \to &)\,. \end{array}$$

Теперь избавимся от вхождений букв b_N, d_N. В силу N-сбалансированности слова w последняя буква в нем не может быть d_N и количество вхождений b_N и d_N совпадает. Найдем последнее вхождение буквы d_N в w. Пусть x — следующая за d_N буква. Возможны следующие три случая:

1) $x = b_N$. В этом случае мы удаляем подслово $d_N b_N$;

2) $x \in A_{N-1}$. Произведем следующие замены:

$$d_N x \mapsto b_{N-1} b_{N-2} d_{N-2} d_{N-1} d_N x \mapsto b_{N-1} b_{N-2} x d_{N-2} d_{N-1} d_N;$$

3) $x \in A_i$, где $i \leq N-2$. Поменяем местами d_N и x.

Во всех трех случаях i-сбалансированность слова w при $i \neq 0$ сохраняется. В случае 1) количество вхождений буквы d_N (а также буквы b_N) уменьшается на 1. В случаях 2) и 3) количество вхождений буквы d_N в w сохраняется, но уменьшается число букв, следующих за последней буквой d_N. Поэтому за конечное число таких преобразований мы получим слово, которое не содержит букв b_N, d_N.

Итак, применяя указанную выше процедуру, мы можем добиться того, чтобы слово w содержало лишь буквы из A_i, где $i \leq 1$. Аналогичным образом с помощью преобразований

$$\begin{aligned} a_N &\mapsto a_N d_N b_N \mapsto a_{N+1} b_{N+1} b_N, \\ c_N &\mapsto c_N b_N d_N \mapsto c_{N+1} d_{N+1} d_N, \\ b_N d_N &\mapsto \varnothing, \\ x d_N &\mapsto x d_N d_{N+1} d_{N+2} b_{N+2} b_{N+1} \mapsto d_N d_{N+1} d_{N+2} x b_{N+2} b_{N+1}, \qquad x \in A_{N+1}, \\ x d_N &\mapsto d_N x, \qquad x \in A_i, \quad i \geq N+2, \end{aligned}$$

где $N < 0$, можно добиться того, чтобы слово w не содержало букв из A_i при $i < 0$. При этих преобразованиях в слове w будут добавлены лишь буквы b_0, d_0, b_1, d_1. С помощью замен

$$\begin{aligned} a_0 &\mapsto a_0 d_0 b_0 \mapsto a_1 b_1 b_0, \\ c_0 &\mapsto c_0 b_0 d_0 \mapsto c_1 d_1 d_0 \end{aligned}$$

мы получим слово, которое содержит лишь буквы b_0, d_0, a_1, b_1, c_1, d_1 и по-прежнему является i-сбалансированным для всех $i \neq 0$.

Таким образом, осталось доказать лемму в случае, когда слово w содержит только буквы b_0, d_0, a_1, b_1, c_1, d_1 и является (-1)-сбалансированным и 1-сбалансированным. По определению (-1)-сбалансированность означает, что если заменить в слове w все b_0 на открывающую скобку, а все d_0 на закрывающую, то получится выражение со сбалансированными скобками. Назовем *глубиной* слова w максимальное значение $\varphi(u)_{-1}$, взятое по всевозможным разложениям w в произведение $w = uv$ двух подслов. Иначе говоря, глубина — это максимальный уровень вложенности скобок в выражении, которое получается заменой всех b_0 на левую скобку, а всех d_0 на правую.

Очередная наша цель — применением соотношений (24)–(31) добиться того, чтобы наше слово имело глубину 1 или 0. Предположим, что глубина слова w превосходит 1. Тогда для всех $x, y \in A_1$ будем делать в w следующие замены, пока это возможно:

$$\begin{aligned} b_0xy &\mapsto b_0xd_0b_0y, \\ b_0^2xd_0b_0 &\mapsto b_0^2xd_0^2b_0^2, \\ b_0^2xd_0y &\mapsto b_0^2xd_0^2b_0y. \end{aligned}$$

При этих заменах сохраняется и (-1)-сбалансированность, и значение глубины слова w. Легко видеть, что, так как по предположению глубина слова w больше 1, после таких замен обязательно появятся подслова вида

$$b_0^2xd_0^2, \qquad \text{где} \quad x \in A_1. \tag{37}$$

С каждым таким подсловом произведем следующую цепочку преобразований, каждое из которых получено применением одного или нескольких соотношений (24)–(31):

$$\begin{aligned} b_0^2a_1d_0^2 &\mapsto b_0\big(b_0a_1(d_0d_1d_2)b_2b_1\big)d_0 \mapsto b_0\big(b_0(d_0d_1d_2)a_1b_2b_1\big)d_0 \mapsto \\ &\mapsto b_0\big(d_1d_2a_1b_2b_1\big)d_0 \mapsto b_0b_{-1}d_{-1}\big(d_1d_2a_1b_2b_1\big)d_0 \mapsto \\ &\mapsto b_0b_{-1}\big(d_1d_2a_1b_2b_1\big)d_{-1}d_0 \mapsto b_0b_{-1}\big(b_0a_1d_0\big)d_{-1}d_0 \mapsto \\ &\mapsto b_0b_{-1}b_{-2}d_{-2}\big(b_0a_1d_0\big)d_{-1}d_0 \mapsto b_0b_{-1}b_{-2}b_0a_1d_0d_{-2}d_{-1}d_0 \mapsto \\ &\mapsto b_0b_{-1}b_{-2}b_0a_0d_0d_1d_0d_{-2}d_{-1}d_0 \mapsto b_0b_{-1}b_{-2}b_0a_0b_{-1}(d_{-1}d_0d_1)d_0d_{-2}d_{-1}d_0 \mapsto \\ &\mapsto b_0b_{-1}b_{-2}b_0a_0b_{-1}d_0(d_{-1}d_0d_1)(d_{-2}d_{-1})d_0 \mapsto b_0b_{-1}b_{-2}b_0a_0b_{-1}d_0d_{-1}d_0(d_{-2}d_{-1})d_1d_0 \mapsto \\ &\mapsto b_0b_{-1}b_{-2}b_0a_0b_{-1}d_0d_{-1}d_0(d_{-2}d_{-1}d_0d_1)b_1b_0d_1d_0 \mapsto \\ &\mapsto b_0b_{-1}b_{-2}(d_{-2}d_{-1}d_0d_1)b_0a_0b_{-1}d_0d_{-1}d_0b_1b_0d_1d_0 \mapsto \\ &\mapsto d_1b_0a_0b_{-1}d_0d_{-1}d_0b_1b_0d_1d_0 \mapsto d_1b_0a_0b_{-1}d_0(d_{-1}d_0d_1)b_1b_1b_0d_1d_0 \mapsto \\ &\mapsto d_1b_0a_0b_{-1}(d_{-1}d_0d_1)d_0b_1b_1b_0d_1d_0 \mapsto d_1b_0(a_0d_0d_1)d_0b_1b_1b_0d_1d_0 \mapsto \\ &\mapsto d_1b_0a_1d_0b_1^2b_0d_1d_0; \end{aligned}$$

заменяя в этих формулах a_1 на d_1 и a_0 на b_0, получим цепочку преобразований

$$b_0^2d_1d_0^2 \mapsto d_1b_0d_1d_0b_1^2b_0d_1d_0;$$

меняя во всех словах порядок букв на обратный и заменяя a_i, b_i, c_i, d_i на c_i, d_i, a_i, b_i соответственно, получим преобразования

$$\begin{aligned} b_0^2c_1d_0^2 &\mapsto b_0b_1d_0d_1^2b_0c_1d_0b_1, \\ b_0^2b_1d_0^2 &\mapsto b_0b_1d_0d_1^2b_0b_1d_0b_1, \end{aligned}$$

которые также получаются последовательным применением соотношений (24)–(31). Все указанные преобразования сохраняют i-сбалансированность при $i \neq 0$. Применив указанные преобразования ко всем подсловам вида (37), получим слово меньшей глубины. Повторив процедуру достаточное число раз, мы получим слово глубины 1, т.е. разлагаемое в произведение подслов из следующего списка:

$$a_1, \quad b_1, \quad c_1, \quad d_1, \quad b_0a_1d_0, \quad b_0b_1d_0, \quad b_0c_1d_0, \quad b_0d_1d_0.$$

С помощью преобразований

$$\begin{aligned} b_0a_1d_0 &\mapsto b_0(a_1d_2)b_2d_0 \mapsto b_0(a_2b_1)b_2d_0 \mapsto \\ &\mapsto a_2b_0b_1b_2d_0 \mapsto (a_2b_1)d_1b_0b_1b_2d_0 \mapsto \\ &\mapsto (a_1d_2)d_1b_0b_1b_2d_0 \mapsto (a_1b_1)b_0(d_0d_1d_2)d_1b_0b_1b_2d_0 \mapsto \\ &\mapsto (a_0d_0)b_0d_1(d_0d_1d_2)b_0b_1b_2d_0 \mapsto (a_0d_1)d_0d_1b_0d_2b_1b_2d_0 \mapsto \\ &\mapsto (a_1b_0)d_0d_1b_0b_1b_0(d_0d_1d_2)b_1b_2d_0 \mapsto a_1d_1b_0b_1b_0b_1(d_0d_1d_2)b_2d_0 \mapsto \\ &\mapsto a_1d_1b_0b_1b_0b_1d_0d_1d_0 \mapsto a_1d_1b_0b_1d_0(b_0^2b_1d_0^2)b_0d_1d_0 \mapsto \\ &\mapsto a_1d_1b_0b_1d_0(b_0b_1d_0d_1^2b_0b_1d_0b_1)b_0d_1d_0 = \\ &= a_1d_1(b_0b_1d_0)(b_0b_1d_0)d_1^2(b_0b_1d_0)b_1(b_0d_1d_0) \end{aligned}$$

и аналогичной цепочки, дающей преобразование

$$b_0^2c_1d_0^2 \mapsto (b_0b_1d_0)d_1(b_0d_1b_0)b_1^2(b_0d_1d_0)(b_0d_1d_0)b_1c_1,$$

примененных ко всех подсловам вида $b_0a_1d_0$ и $b_0c_1d_0$, получаем слово, которое раскладывается в произведение подслов из меньшего списка:

$$a_1, \quad b_1, \quad c_1, \quad d_1, \quad b_0b_1d_0, \quad b_0d_1d_0.$$

Это слово мы по-прежнему обозначаем через w. Пусть

$$w = y_1 \dots y_m,$$

где $y_1, \dots, y_m \in \{a_1, b_1, c_1, d_1, b_0b_1d_0, b_0d_1d_0\}$ — соответствующее разложение.

При всех указанных выше преобразованиях слово w оставалось 1-сбалансированным. Это значит, что если заменить все подслова вида a_1, d_1, $b_0d_1d_0$ на открывающую скобку, а подслова b_1, c_1, $b_0c_1d_0$ на закрывающую, то получится строка сбалансированных скобок. Это значит, что найдутся такие $i_1, \dots, i_{m-1} \geq 0$, что все слова

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1b_1^{i_1}, \\ x_2 &= d_1^{i_1}y_2b_1^{i_2}, \\ &\vdots \\ x_{m-1} &= d_1^{i_{m-2}}y_{m-1}b_1^{i_{m-1}}, \\ x_m &= d_1^{i_{m-1}}y_m \end{aligned}$$

являются 1-сбалансированными. При этом слово $x_1 \dots x_m$ эквивалентно слову w по модулю соотношений (29). Удаляя в каждом из x_j подслова вида $d_1^kb_1^k$, получим слова из требуемого множества

$$\{d_1^{i-1}a_1b_1^i, d_1^ic_1b_1^{i-1}, d_1^{i-1}b_0d_1d_0b_1^i, d_1^ib_0b_1d_0b_1^{i-1}\}_{i>0},$$

а также некоторое количество слов $\varnothing$. Лемма 4 доказана. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы 1. Пусть два слова w_1, w_2 в алфавите A соответствуют изотопным плетениям. Мы хотим доказать, что они получаются друг из друга применением соотношений (24)–(31). Очевидно, мы имеем $\varphi(w_1) = \varphi(w_2)$. Очевидно также, что из букв $\{b_i, d_i\}$ можно составить такое слово u, что $\varphi(u)_i = -\varphi(w_1)_i$ для всех $i \neq 0$. Мы имеем

$$\varphi(w_1 u)_i = \varphi(w_2 u)_i = 0 \qquad \text{для всех} \quad i \neq 0.$$

Отсюда легко видеть, что для достаточно большого N слова

$$w_j' = d_1^{N^2} \dots d_{N-1}^{2N} d_N^N b_0^{N^2} \dots b_{2-N}^{2N} b_{1-N}^N w_j u d_{1-N}^N d_{2-N}^{2N} \dots d_0^{N^2} b_N^N b_{N-1}^{2N} \dots b_1^{N^2},$$

где $j = 1, 2$, являются i-сбалансированными для всех $i \neq 0$.

В силу соотношений (29) слова w_1 и w_2 эквивалентны по модулю соотношений (24)–(31) тогда и только тогда, когда то же самое можно сказать про слова w_1' и w_2'.

Таким образом, достаточно доказать наше утверждение в случае, когда слова w_1 и w_2 являются i-сбалансированными при всех $i \neq 0$. В этом случае согласно лемме 4 с помощью соотношений (24)–(31) оба эти слова можно разложить в произведение образующих (32)–(35) подполугруппы $T \in Y_\infty$. Поэтому осталось лишь доказать, что соотношения (2)–(18), определяющие полугруппу T, вытекают из соотношений (24)–(31) при отождествлениях (32)–(35). Мы посвятим этой проверке следующий раздел.

4. ПРОВЕРКА СООТНОШЕНИЙ

Итак, здесь мы проверим, что соотношения (2)–(18) для элементов (32)–(35) выполнены в силу (24)–(31).

Соотношение (2):

$$\begin{aligned}
\alpha_i \beta_{i+1} &= d_1^{i-1} a_1 b_1^i d_1^{i+1} c_1 b_1^i = d_1^{i-1}(a_1 d_1 c_1 b_1) b_1^{i-1} = \\
&= d_1^{i-1}(a_1 (b_0 c_0) b_1) b_1^{i-1} = d_1^{i-1}(a_1 d_2 b_2 (b_0 c_0) b_1) b_1^{i-1} = \\
&= d_1^{i-1}(a_1 d_2 (b_0 c_0) b_2 b_1) b_1^{i-1} = d_1^{i-1}(a_1 d_2 (d_1 c_1) b_2 b_1) b_1^{i-1} = \\
&= d_1^{i-1}(a_1 b_1 b_0 (d_0 d_1 d_2) d_1 c_1 b_2 b_1) b_1^{i-1} = d_1^{i-1}(a_1 b_1 b_0 d_1 c_1 (d_0 d_1 d_2) b_2 b_1) b_1^{i-1} = \\
&= d_1^{i-1}((a_1 b_1) b_0 (d_1 c_1) d_0) b_1^{i-1} = d_1^{i-1}((a_0 d_0) b_0 (b_0 c_0) d_0) b_1^{i-1} = \\
&= d_1^{i-1}(a_0 b_0 c_0 d_0) b_1^{i-1} = d_1^{i-1} b_1^{i-1} = \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Заметим, что попутно мы доказали соотношение

$$b_i a_i d_i c_i = 1,$$

симметричное соотношению (28).

Соотношение (3):

$$\begin{aligned}
\alpha_{i+1} \beta_i &= d_1^i a_1 b_1^{i+1} d_1^i c_1 b_1^{i-1} = d_1^i a_1 b_1 c_1 b_1^{i-1} = \\
&= d_1^i (a_1 b_1 c_1 d_1) b_1^i = d_1^i b_1^i = \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Докажем теперь следующие вспомогательные соотношения:

$$d_1^{i-1} a_1 b_1^i = b_0^{i-1} a_0 d_0^i, \tag{38}$$

$$d_1^i c_1 b_1^{i-1} = b_0^i c_0 d_0^{i-1}, \tag{39}$$

$i > 0$. Для этого воспользуемся индукцией. При $i = 1$ эти соотношения совпадают с (26), (27). Для $i > 1$ имеем

$$\begin{aligned} d_1^{i-1}a_1b_1^i &= d_1(d_1^{i-2}a_1b_1^{i-1})b_1 = d_1(d_1^{i-2}a_1b_1^{i-1})b_1 = \\ &= d_1(b_0^{i-2}a_0d_0^{i-1})b_1 = b_0b_{-1}(d_{-1}d_0d_1)(b_0^{i-2}a_0d_0^{i-1})b_1 = \\ &= b_0b_{-1}(b_0^{i-2}a_0d_0^{i-1})(d_{-1}d_0d_1)b_1 = b_0b_{-1}(b_0^{i-2}a_0d_0^{i-1})d_{-1}d_0 = \\ &= b_0b_{-1}(d_1^{i-2}a_1b_1^{i-1})d_{-1}d_0 = b_0(d_1^{i-2}a_1b_1^{i-1})b_{-1}d_{-1}d_0 = \\ &= b_0(b_0^{i-2}a_0d_0^{i-1})d_0 = b_0^{i-1}a_0d_0^i. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается соотношение (39).

Докажем соотношение (4):

$$\begin{aligned} \alpha_i\alpha_{i+j+1} &= d_1^{i-1}a_1b_1^id_1^{i+j}a_1b_1^{i+j+1} = d_1^{i-1}(a_1d_1)(d_1^{j-1}a_1b_1^j)b_1^{i+1} = \\ &= d_1^{i-1}(a_2b_2)(b_0^{j-1}a_0d_0^j)b_1^{i+1} = d_1^{i-1}(b_0^{j-1}a_0d_0^j)(a_2b_2)b_1^{i+1} = \\ &= d_1^{i-1}(d_1^{j-1}a_1b_1^j)(a_1d_1)b_1^{i+1} = d_1^{i+j-2}a_1b_1^ja_1b_1^i = \\ &= (d_1^{i+j-2}a_1b_1^{i+j-1})(d_1^{i-1}a_1b_1^i) = \alpha_{i+j-1}\alpha_i. \end{aligned}$$

Аналогично на этот раз с помощью (39) доказывается соотношение (5). Для (6) имеем

$$\begin{aligned} \beta_i\beta_{i+j-1} &= d_1^ic_1b_1^{i-1}d_1^{i+j-1}c_1b_1^{i+j-2} = d_1^{i+1}(b_1c_1)(d_1^jc_1b_1^{j-1})b_1^{i-1} = \\ &= d_1^{i+1}(d_2c_2)(b_0^jc_0d_0^{j-1})b_1^{i-1} = d_1^{i+1}(b_0^jc_0d_0^{j-1})(d_2c_2)b_1^{i-1} = \\ &= d_1^{i+1}(d_1^jc_1b_1^{j-1})(b_1c_1)b_1^{i-1} = (d_1^{i+j+1}c_1b_{i+j})(d_1^ic_1b_1^{i-1}) = \\ &= \beta_{i+j+1}\beta_i. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается соотношение (7).

Для доказательства равенств (8)–(12) мы будем пользоваться следующими соотношениями (при $i > 0$):

$$b_0d_1d_0b_1 = b_0^2b_{-1}d_0d_{-1}d_0 = d_1d_2d_1b_2b_1^2, \tag{40}$$

$$d_1^{i-1}(b_0d_1d_0b_1)b_1^{i-1} = b_0^{i-1}(b_0d_1d_0b_1)d_0^{i-1}. \tag{41}$$

Докажем (40):

$$\begin{aligned} b_0^2b_{-1}d_0d_{-1}d_0 &= b_0^2b_{-1}d_0(d_{-1}d_0d_1)b_1 = b_0^2b_{-1}(d_{-1}d_0d_1)d_0b_1 = \\ &= b_0d_1d_0b_1 = b_0d_1(d_0d_1d_2)b_2b_1^2 = \\ &= b_0(d_0d_1d_2)d_1b_2b_1^2 = d_1d_2d_1b_2b_1^2. \end{aligned}$$

Соотношение (41) докажем по индукции. При $i = 1$ оно тривиально. Далее, имеем

$$\begin{aligned} d_1^{i-1}(b_0d_1d_0b_1)b_1^{i-1} &= d_1(d_1^{i-2}(b_0d_1d_0b_1)b_1^{i-2})b_1 = d_1(b_0^{i-2}(b_0d_1d_0b_1)d_0^{i-2})b_1 = \\ &= d_1(b_0^{i-2}(b_0^2b_{-1}d_0d_{-1}d_0)d_0^{i-2})b_1 = \\ &= b_0b_{-1}b_{-2}(d_{-2}d_{-1}d_0d_1)(b_0^{i-2}(b_0^2b_{-1}d_0d_{-1}d_0)d_0^{i-2})b_1 = \\ &= b_0b_{-1}b_{-2}(b_0^{i-2}(b_0^2b_{-1}d_0d_{-1}d_0)d_0^{i-2})(d_{-2}d_{-1}d_0d_1)b_1 = \\ &= b_0b_{-1}b_{-2}(b_0^{i-2}(b_0^2b_{-1}d_0d_{-1}d_0)d_0^{i-2})d_{-2}d_{-1}d_0 = \\ &= b_0b_{-1}b_{-2}(d_1^{i-2}(b_0d_1d_0b_1)b_1^{i-2})d_{-2}d_{-1}d_0 = b_0b_{-1}(d_1^{i-2}(b_0d_1d_0b_1)b_1^{i-2})d_{-1}d_0 = \\ &= b_0(d_1^{i-2}b_{-1}(b_0d_1d_0b_1)d_{-1}b_1^{i-2})d_0 = b_0(d_1^{i-2}b_{-1}(d_1d_2d_1b_2b_1^2)d_{-1}b_1^{i-2})d_0 = \\ &= b_0(d_1^{i-2}(d_1d_2d_1b_2b_1^2)b_1^{i-2})d_0 = b_0(d_1^{i-2}(b_0d_1d_0b_1)b_1^{i-2})d_0 = \\ &= b_0(b_0^{i-2}(b_0d_1d_0b_1)d_0^{i-2})d_0 = b_0^{i-1}(b_0d_1d_0b_1)d_0^{i-1}. \end{aligned}$$

Соотношение (8):

$$\begin{aligned}\alpha_i\sigma_{i+j+1} &= (d_1^{i-1}a_1b_1^i)(d_1^{i+j}b_0d_1d_0b_1^{i+j+1}) = d_1^{i-1}(a_1d_1)(d_1^{j-1}(b_0d_1d_0b_1)b_1^{j-1})b_1^{i+1} = \\ &= d_1^{i-1}(a_2b_2)(b_0^{j-1}(b_0d_1d_0b_1)d_0^{j-1})b_1^{i+1} = d_1^{i-1}(a_2b_2)(b_0^{j-1}(b_0^2b_{-1}d_0d_{-1}d_0)d_0^{j-1})b_1^{i+1} = \\ &= d_1^{i-1}(b_0^{j-1}(b_0^2b_{-1}d_0d_{-1}d_0)d_0^{j-1})(a_2b_2)b_1^{i+1} = d_1^{i-1}(d_1^{j-1}(b_0d_1d_0b_1)b_1^{j-1})(a_1d_1)b_1^{i+1} = \\ &= \sigma_{i+j-1}\alpha_i.\end{aligned}$$

Соотношение (9):

$$\begin{aligned}\alpha_{i+j+1}\sigma_i &= (d_1^{i+j}a_1b_1^{i+j+1})(d_1^{i-1}b_0d_1d_0b_1^i) = d_1^{i-1}(d_1^{j+2}a_1b_1^{j+2})b_0d_1d_0b_1^i = \\ &= d_1^{i-1}(b_0^{j+1}a_0d_0^{j+2})b_0d_1d_0b_1^i = d_1^{i-1}b_0(b_0^ja_0d_0^{j+1})d_1d_0b_1^i = \\ &= d_1^{i-1}b_0d_1(d_1^{j-1}a_1b_1^j)d_0b_1^i = d_1^{i-1}b_0d_1(b_0^{j-1}a_0d_0^j)d_0b_1^i = \\ &= d_1^{i-1}b_0d_1d_0(b_0^ja_0d_0^{j+1})b_1^i = d_1^{i-1}b_0d_1d_0(d_1^ja_1b_1^{j+1})b_1^i = \\ &= \sigma_i\alpha_{i+j+1}.\end{aligned}$$

Соотношения (10) и (11) доказываются подобным образом. Докажем (12):

$$\begin{aligned}\sigma_i\sigma_{i+j+1} &= (d_1^{i-1}b_0d_1d_0b_1^i)(d_1^{i+j}b_0d_1d_0b_1^{i+j+1}) = d_1^{i-1}b_0d_1d_0(d_1^j(b_0d_1d_0b_1)b_1^j)b_1^i = \\ &= d_1^{i-1}b_0d_1d_0(b_0^j(b_0d_1d_0b_1)d_0^j)b_1^i = d_1^{i-1}b_0d_1(b_0^{j-1}(b_0d_1d_0b_1)d_0^{j-1})d_0b_1^i = \\ &= d_1^{i-1}b_0d_1(d_1^{j-1}(b_0d_1d_0b_1)b_1^{j-1})d_0b_1^i = d_1^{i-1}b_0(d_1^j(b_0d_1d_0b_1)b_1^j)d_1d_0b_1^i = \\ &= d_1^{i-1}b_0(b_0^j(b_0d_1d_0b_1)d_0^j)d_1d_0b_1^i = d_1^{i-1}(b_0^{j+1}(b_0d_1d_0b_1)d_0^{j+1})b_0d_1d_0b_1^i = \\ &= d_1^{i-1}(d_1^{j+1}(b_0d_1d_0b_1)b_1^{j+1})b_0d_1d_0b_1^i = \sigma_{i+j+1}\sigma_i.\end{aligned}$$

Соотношения (13):

$$\begin{aligned}\alpha_i\sigma_{i+1}\beta_{i+2} &= (d_1^{i-1}a_1b_1^i)(d_1^ib_0d_1d_0b_1^{i+1})(d_1^{i+2}c_1b_1^{i+1}) = d_1^{i-1}(a_1b_0d_1d_0d_1c_1b_1)b_1^{i-1} = \\ &= d_1^{i-1}(a_1b_0d_1(d_0d_1d_2)b_2c_1b_1^2)b_1^{i-1} = d_1^{i-1}(a_1b_0(d_0d_1d_2)d_1b_2c_1b_1^2)b_1^{i-1} = \\ &= d_1^{i-1}(a_1d_1d_2d_1b_2c_1b_1^2)b_1^{i-1} = d_1^{i-1}(a_2b_2d_2d_1b_2c_1b_1^2)b_1^{i-1} = \\ &= d_1^{i-1}(a_2d_1b_2c_1b_1^2)b_1^{i-1} = d_1^{i-1}(a_2(d_1d_2d_3)b_3b_2^2c_1b_1^2)b_1^{i-1} = \\ &= d_1^{i-1}((d_1d_2d_3)a_2b_3b_2^2c_1b_1^2)b_1^{i-1} = d_1^{i-1}(d_1b_0d_0(d_2d_3a_2b_3b_2^2)c_1b_1^2)b_1^{i-1} = \\ &= d_1^{i-1}(d_1b_0(d_2d_3a_2b_3b_2^2)d_0c_1b_1^2)b_1^{i-1} = d_1^{i-1}(d_1b_0b_1(d_1d_2d_3)a_2b_3b_2^2d_0c_1b_1^2)b_1^{i-1} = \\ &= d_1^{i-1}(d_1b_0b_1a_2(d_1d_2d_3)b_3b_2^2d_0c_1b_1^2)b_1^{i-1} = d_1^{i-1}(d_1b_0b_1a_2d_1b_2(d_0c_1)b_1^2)b_1^{i-1} = \\ &= d_1^{i-1}(d_1b_0b_1(a_2b_2)b_1b_0(d_0d_1d_2)d_1b_2(d_0c_1)b_1^2)b_1^{i-1} = \\ &= d_1^{i-1}(d_1b_0b_1(a_1d_1)b_1b_0d_1(d_0d_1d_2)b_2(b_1c_0)b_1^2)b_1^{i-1} = \\ &= d_1^{i-1}(d_1b_0b_1a_1b_0d_1(d_0c_0)b_1^2)b_1^{i-1} = d_1^{i-1}(d_1b_0b_1a_1b_0d_1(b_{-1}c_{-1})b_1^2)b_1^{i-1} = \\ &= d_1^{i-1}(d_1b_0b_1a_1b_0(b_{-1}c_{-1})d_1b_1^2)b_1^{i-1} = d_1^{i-1}(d_1b_0b_1a_1b_0(d_0c_0)b_1)b_1^{i-1} = \\ &= d_1^{i-1}(d_1b_0b_1a_1c_0b_1)b_1^{i-1} = d_1^{i-1}(d_1b_0b_1(a_1b_1)b_0b_{-1}(d_{-1}d_0d_1)c_0b_1)b_1^{i-1} = \\ &= d_1^{i-1}(d_1b_0b_1(a_0d_0)b_0b_{-1}c_0(d_{-1}d_0d_1)b_1)b_1^{i-1} = d_1^{i-1}(d_1b_0b_1(a_0b_{-1})c_0d_{-1}d_0)b_1^{i-1} = \\ &= d_1^{i-1}(d_1b_0b_1a_{-1}(d_0c_0)d_{-1}d_0)b_1^{i-1} = d_1^{i-1}(d_1b_0b_1(a_{-1}b_{-1}c_{-1}d_{-1})d_0)b_1^{i-1} = \\ &= d_1^{i-1}(d_1b_0b_1d_0)b_1^{i-1} = \sigma_i^{-1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_i\sigma_{i+1}^{-1}\beta_{i+2} &= (d_1^{i-1}a_1b_1^i)(d_1^{i+1}b_0b_1d_0b_1^i)(d_1^{i+2}c_1b_1^{i+1} = d_1^{i-1}((a_1d_1)b_0b_1d_0d_1(d_1c_1)b_1^2)b_1^{i-1} = \\
&= d_1^{i-1}((a_2b_2)b_0b_1d_0d_1(b_0c_0)b_1^2)b_1^{i-1} = d_1^{i-1}(b_0(a_2b_2)b_1d_0d_1d_2b_2(b_0c_0)b_1^2)b_1^{i-1} = \\
&= d_1^{i-1}(b_0(a_1d_1)b_1d_0d_1d_2(b_0c_0)b_2b_1^2)b_1^{i-1} = d_1^{i-1}(b_0a_1(d_0d_1d_2)(d_1c_1)b_2b_1^2)b_1^{i-1} = \\
&= d_1^{i-1}(b_0a_1(d_1c_1)(d_0d_1d_2)b_2b_1^2)b_1^{i-1} = d_1^{i-1}(b_0(a_1d_1c_1b_1)d_1d_0b_1)b_1^{i-1} = \\
&= d_1^{i-1}(b_0d_1d_0b_1)b_1^{i-1} = \sigma_i.
\end{aligned}$$

Соотношения (14) симметричны соотношениям (13), их доказательство получается из доказательства соотношений (13) обращением порядка букв во всех словах и заменами $a_i \leftrightarrow c_i$, $b_i \leftrightarrow d_i$.

Соотношения (15) симметричны друг другу. Докажем одно из них:

$$\begin{aligned}
\alpha_i\sigma_{i+1}\beta_i &= (d_1^{i-1}a_1b_1^i)(d_1^ib_0d_1d_0b_1^{i+1})(d_1^ic_1b_1^{i-1}) = d_1^{i-1}(a_1b_0d_1d_0(b_1c_1))b_1^{i-1} = \\
&= d_1^{i-1}(a_1b_0d_1d_0(d_2c_2)b_1^{i-1} = d_1^{i-1}(a_1b_0d_1(b_1c_1)d_0)b_1^{i-1} = d_1^{i-1}((a_1b_0)c_1d_0)b_1^{i-1} = \\
&= d_1^{i-1}(a_0(d_1c_1)d_0)b_1^{i-1} = d_1^{i-1}(a_0(b_0c_0)d_0)b_1^{i-1} = 1.
\end{aligned}$$

Соотношения (16) также симметричны друг другу. Докажем одно из них:

$$\begin{aligned}
\alpha_{i+1}\sigma_i\beta_{i+1} &= (d_1^ia_1b_1^{i+1})(d_1^{i-1}b_0d_1d_0b_1^i)(d_1^{i+1}c_1b_1^i) = d_1^i((a_1b_1)b_1b_0d_1d_0d_1c_1)b_1^i = \\
&= d_1^i((a_0d_0)b_1b_0d_1d_0d_1c_1)b_1^i = d_1^i(d_2(a_0d_0)(b_2b_1b_0)d_1d_0d_1c_1)b_1^i = \\
&= d_1^i(d_2(a_1b_1)(b_2b_1b_0)d_1d_0d_1c_1)b_1^i = d_1^i(d_2(b_2b_1b_0)(a_1b_1)d_1d_0d_1c_1)b_1^i = \\
&= d_1^i(b_1b_0a_1(d_0d_1d_2)b_2c_1)b_1^i = d_1^i(b_1b_0(d_0d_1d_2)a_1b_2c_1)b_1^i = d_1^i(d_2a_1(b_2c_1))b_1^i = \\
&= d_1^i(d_2(a_1d_1)c_2)b_1^i = d_1^i(d_2(a_2b_2)c_2)b_1^i = 1.
\end{aligned}$$

Соотношение (17) тривиально следует из (29). Осталось проверить соотношение (18):

$$\begin{aligned}
\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i &= (d_1^{i-1}b_0d_1d_0b_1^i)(d_1^ib_0d_1d_0b_1^{i+1})(d_1^{i-1}b_0d_1d_0b_1^i) = d_1^{i-1}b_0d_1^2d_0b_1^2b_0d_1d_0b_1^i = \\
&= d_1^{i-1}b_0d_1b_0b_{-1}(d_{-1}d_0d_1)d_0b_1^2b_0d_1d_0b_1^i = d_1^{i-1}b_0d_1b_0b_{-1}d_0(d_{-1}d_0d_1)b_1^2b_0d_1d_0b_1^i = \\
&= d_1^{i-1}b_0d_1(d_2b_2)(b_0b_{-1}d_0d_{-1}d_0)b_1b_0d_1d_0b_1^i = d_1^{i-1}b_0d_1d_2(b_0b_{-1}d_0d_{-1}d_0)b_2b_1b_0d_1d_0b_1^i = \\
&= d_1^{i-1}b_0d_1d_2b_0b_{-1}d_0(d_{-1}d_0d_1)b_1b_2b_1b_0d_1d_0b_1^i = \\
&= d_1^{i-1}b_0d_1d_2b_0b_{-1}(d_{-1}d_0d_1)d_0b_1b_2b_1b_0d_1d_0b_1^i = \\
&= d_1^{i-1}b_0^2b_{-1}(d_{-1}d_0d_1d_2)(d_1d_0b_1)b_2b_1b_0d_1d_0b_1^i = \\
&= d_1^{i-1}b_0^2b_{-1}(d_1d_0b_1)(d_{-1}d_0d_1d_2)b_2b_1b_0d_1d_0b_1^i = \\
&= d_1^{i-1}b_0^2b_{-1}d_1d_0b_1d_{-1}d_1d_0b_1^i = d_1^{i-1}b_0^2b_{-1}d_1d_0b_1d_1d_{-1}d_0b_1^i = \\
&= d_1^{i-1}b_0^2b_{-1}d_1d_0(d_{-1}d_0d_1)b_1^{i+1} = d_1^{i-1}b_0^2b_{-1}d_1(d_{-1}d_0d_1)d_0b_1^{i+1} = \\
&= d_1^{i-1}b_0^2d_1d_0d_1d_0b_1^{i+1} = d_1^{i-1}b_0^2d_1(d_0d_1d_2)b_2d_0b_1^{i+1} = \\
&= d_1^{i-1}b_0^2(d_0d_1d_2)d_1b_2d_0b_1^{i+1} = d_1^{i-1}b_0d_1d_2d_1b_2(b_{-1}d_{-1})d_0b_1^{i+1} = \\
&= d_1^{i-1}b_0b_{-1}d_1d_2d_1b_2d_{-1}d_0b_1^{i+1} = d_1^{i-1}b_0b_{-1}b_0(d_0d_1d_2)d_1b_2d_{-1}d_0b_1^{i+1} = \\
&= d_1^{i-1}b_0b_{-1}b_0d_1(d_0d_1d_2)b_2d_{-1}d_0b_1^{i+1} = d_1^{i-1}b_0b_{-1}b_0d_1d_0d_1d_{-1}d_0b_1^{i+1} = \\
&= d_1^{i-1}b_0b_{-1}b_0d_1d_0d_{-1}d_1d_0b_1^{i+1} = d_1^{i-1}b_0b_{-1}(b_0d_1d_0)(d_{-1}d_0d_1d_2)b_2b_1b_0d_1d_0b_1^{i+1} = \\
&= d_1^{i-1}b_0b_{-1}(d_{-1}d_0d_1d_2)(b_0d_1d_0)b_2b_1b_0d_1d_0b_1^{i+1} = d_1^id_2b_0d_1d_0b_2b_1b_0d_1d_0b_1^{i+1} = \\
&= d_1^id_2b_0^2b_{-1}(d_{-1}d_0d_1)d_0b_2b_1b_0d_1d_0b_1^{i+1} = d_1^id_2b_0^2b_{-1}d_0(d_{-1}d_0d_1)(b_2b_1b_0)d_1d_0b_1^{i+1} = \\
&= d_1^id_2(b_0^2b_{-1}d_0d_{-1}d_0)(b_2b_1b_0)d_1^2d_0b_1^{i+1} = d_1^i(b_0^2b_{-1}d_0d_{-1}d_0)b_1b_0d_1^2d_0b_1^{i+1} = \\
&= d_1^ib_0^2b_{-1}d_0(d_{-1}d_0d_1)b_1^2b_0d_1^2d_0b_1^{i+1} = d_1^ib_0^2b_{-1}(d_{-1}d_0d_1)d_0b_1^2b_0d_1^2d_0b_1^{i+1} = \\
&= (d_1^ib_0d_1d_0b_1^{i+1})(d_1^{i-1}b_0d_1d_0b_1^i)(d_1^ib_0d_1d_0b_1^{i+1}) = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}.
\end{aligned}$$

5. ПОЛУГРУППЫ Y_n И ГРУППЫ D_n ПРИ $n < \infty$

В разд. 3 мы определили подполугруппы $Y_n \subset Y_\infty$, где $n = 3, 4, \ldots$ Очевидно, для любого $n \geq 3$ полугруппа Y_n совпадает с подполугруппой в Y_∞, порожденной множеством $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}$, где $A_i = \{a_i, b_i, c_i, d_i\}$.

Теорема 2. *При $n \geq 7$ полугруппа Y_n изоморфна полугруппе, порожденной множеством образующих $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}$ и теми из соотношений* (24)–(31), *которые включают лишь образующие из этого множества.*

Доказательство. Очевидно, подполугруппа Y_n изоморфна подполугруппе Y'_n в Y_∞, порожденной множеством $A_{-2} \cup A_{-1} \cup \ldots \cup A_{n-5} \cup A_{n-4}$. Доказательство нашего утверждения для полугруппы Y'_n при $n \geq 7$ практически буквально повторяет доказательство теоремы 1. Действительно, элементы (32)–(35) лежат в Y'_n. Все преобразования, использованные в доказательстве леммы 4, сохраняют множество слов в алфавите $A_{-2} \cup A_{-1} \cup \ldots \cup A_{n-5} \cup A_{n-4}$ при $n \geq 7$. В случае конечного n при определении слов $w'_{1,2}$ в конце разд. 3 можно просто вычеркнуть все буквы b_i, d_i, где $i > n - 4$ или $i < -2$. Наконец, при проверке соотношений в разд. 4 возникали только образующие из $A_{-2} \cup \ldots \cup A_3$. $\square$

При $5 \leq n < \infty$ полугруппы Y_n можно также задать по-другому. Добавив к имеющимся образующим плетения сложности 1, действующие нетривиально в P_{n-1} и P_0, получим следующие копредставления.

Теорема 3. *При $n \geq 5$ полугруппа Y_n изоморфна полугруппе, порожденной множеством образующих $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}_{i \in \mathbb{Z}_n}$ и соотношениями*

$$d_1 d_2 \ldots d_n = 1 \tag{42}$$

и (24)–(30):

$$\begin{aligned} a_i d_{i+1} &= a_{i+1} b_i, \\ d_i c_{i+1} &= b_{i+1} c_i, \\ a_i d_i &= a_{i+1} b_{i+1}, \\ b_i c_i &= d_{i+1} c_{i+1}, \\ a_i b_i c_i d_i &= 1, \\ b_i d_i &= d_i b_i = 1, \\ x_i y_j &= y_j x_i \end{aligned}$$

для всех $i, j \in \mathbb{Z}_n$ таких, что $i - j \notin \{-1, 0, 1\}$, и $x_i \in \{a_i, b_i, c_i, d_i\}$, $y_j \in \{a_j, b_j, c_j, d_j\}$. Индексы во всех соотношениях считаются вычетами по модулю n.

Снова доказательство почти ничем не отличается от доказательства теоремы 1. Здесь образующие a_i, b_i, c_i, d_i при $1 \leq 1 \leq n - 1$ те же, что и раньше. Новые образующие a_n, b_n, c_n, d_n, действующие в полуплоскостях P_{n-1} и P_0, в силу указанных соотношений выражаются через остальные:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 d_2 \ldots d_{n-1}, \\ b_n &= d_1 \ldots d_{n-1}, \\ c_n &= d_1 \ldots d_{n-2} c_{n-1}, \\ d_n &= b_{n-1} \ldots b_1. \end{aligned}$$

Соотношения (31), которые в этот раз мы опустили, легко следуют из (30) и (42).

При $n = 3, 4$ доказательство не проходит, поскольку оно использует перестановочность элементов из A_i с элементами из A_{i+2} и из A_{i+3}, которая не всегда имеет место при $n = 3, 4$. Однако полугруппы Y_3 и Y_4 также являются конечно определенными. Для Y_3 этот факт был установлен в работах [3, 4]. Для Y_4 доказательство аналогично. Мы приведем здесь лишь формулировку соответствующего утверждения.

Теорема 4. *Полугруппа Y_3 изоморфна полугруппе, порожденной образующими $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}_{i\in\mathbb{Z}_3}$ и соотношениями*

$$a_i = a_{i+1}d_{i-1}, \qquad b_i = a_{i-1}c_{i+1}, \qquad c_i = b_{i-1}c_{i+1}, \qquad d_i = a_{i+1}c_{i-1},$$
$$d_1d_2d_3 = 1,$$
$$b_id_i = d_ib_i = 1,$$
$$x_iy_i = y_ix_i,$$

где $x_i \in \{a_{i-1}b_{i-1}, d_{i-1}c_{i-1}, b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}\}$, $y_i \in \{a_i, b_i, c_i, b_{i-1}d_id_{i-1}\}$, $i \in \mathbb{Z}_3$.

Полугруппа Y_4 изоморфна полугруппе, порожденной образующими $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}_{i\in\mathbb{Z}_4}$ и соотношениями

$$\begin{aligned}
d_1d_2d_3d_4 &= 1,\\
a_id_{i+1} &= a_{i+1}b_i,\\
d_ic_{i+1} &= b_{i+1}c_i,\\
a_id_i &= a_{i+1}b_{i+1},\\
b_ic_i &= d_{i+1}c_{i+1},\\
a_ib_ic_id_i &= 1,\\
b_id_i &= d_ib_i = 1,\\
x_iy_{i+2} &= y_{i+2}x_i,
\end{aligned}$$

где $x_i \in \{a_i, b_i, c_i, d_i\}$, $y_i \in \{a_i, b_i, c_i, d_i, b_{i-1}a_id_{i-1}, b_{i-1}b_id_{i-1}, b_{i-1}c_id_{i-1}\}$, $i \in \mathbb{Z}_4$.

Теорема 5. *При $n \geq 3$ центр $Z(Y_n)$ полугруппы Y_n изоморфен полугруппе L изотопических классов неориентированных зацеплений в $\mathbb{R}^3$.*

Доказательство. Будем говорить, что слово w сбалансировано, если оно i-сбалансировано для всех $i \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что полугруппа L вложена в Y_∞ как подполугруппа элементов, *представимых* сбалансированными словами. Очевидно также, что эта подполугруппа содержится во всех подполугруппах $T, Y_3, Y_4, \ldots$ и что ее элементы коммутируют со всеми элементами из Y_∞. Докажем обратное, что если слово w задает центральный элемент x полугруппы Y_n, то x лежит в подполугруппе $L \subset Y_n \subset Y_\infty$.

Действительно, нетрудно показать, что если $x \in Z(Y_n)$, то $\varphi(x) = 0$. Отсюда для некоторых N и $i_1, i_2, \ldots, i_N \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ слово $a_{i_1}\ldots a_{i_N}wc_{i_N}\ldots c_{i_1}$ сбалансировано. Но тогда для соответствующего плетения t существует сфера, вложенная в $\mathbb{R}^3$, разделяющая его на некоторое зацепление и плетение, представляющее единичный элемент полугруппы Y_n. Значит, такая сфера существует и для эквивалентного плетения, заданного словом $a_{i_1}\ldots a_{i_N}c_{i_N}\ldots c_{i_1}w$, а значит, и для плетения, заданного словом w, поскольку слово $a_{i_1}\ldots a_{i_N}c_{i_N}\ldots c_{i_1}$ сбалансировано. □

Рассмотрим теперь группу D_n обратимых элементов полугруппы Y_n, $n \geq 3$.

Теорема 6. *При $n \geq 3$ группа D_n конечно определена и может быть задана образующими $\{d_i\}_{i \in \mathbb{Z}_n}$ и следующим набором соотношений:*

при $n \geq 5$

$$d_i d_j = d_j d_i, \qquad \text{\textit{если}} \ \ i - j \neq \pm 1,$$
$$d_1 d_2 \ldots d_n = 1,$$

где все индексы рассматриваются по модулю n;

при $n = 4$

$$d_1 d_2 d_3 d_4 = 1,$$
$$d_i d_{i+2} = d_{i+2} d_i,$$
$$d_{i+2}(d_{i-1}^{-1} d_i d_{i-1}) = (d_{i-1}^{-1} d_i d_{i-1}) d_{i+2},$$

$i \in \mathbb{Z}_4$;

при $n = 3$

$$d_1 d_2 d_3 = 1,$$
$$d_i u_i = u_i d_i,$$
$$u_i u_{i+1} = u_{i+1} u_i,$$

где $u_i = d_{i+1}^{-1} d_{i-1} d_{i+1} d_{i-1}^{-1}$, $i \in \mathbb{Z}_3$.

Коммутант группы D_n изоморфен группе кос B_∞ на бесконечном числе нитей.

Доказательство. Известно, что группой обратимых элементов в полугруппе T является группа кос B_∞, порождаемая образующими σ_i (см. рис. 2) и соотношениями (12) и (18). Доказательство первого утверждения нашей теоремы может быть получено из доказательства аналогичных утверждений для полугрупп Y_n, $n = 3, 4, \ldots, \infty$, заменой T на B_∞ и вычеркиванием всех соотношений и выкладок, использующих образующие a_i, c_i полугрупп Y_n и образующие α_i, β_i полугруппы T. В частности, таким образом мы получим, что группа обратимых элементов полугруппы Y_∞ порождается образующими d_i, $i \in \mathbb{Z}$, и соотношениями

$$d_i d_j = d_j d_i, \qquad \text{если} \ \ |i - j| > 1,$$
$$d_i(d_{i-1} d_i d_{i+1}) = (d_{i-1} d_i d_{i+1}) d_i.$$

Очевидно также, что ядро ограничения гомоморфизма φ на группу D_n содержит коммутант группы D_n и в то же время является подгруппой, изоморфной группе кос B_∞. Таким образом, осталось показать, что коммутант есть вся эта подгруппа, а не ее часть. Это легко следует из того факта, что образующие (34), перекручивающие пару нитей, лежат в коммутанте группы D_∞. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тураев В.Г.* Операторные инварианты связок и R-матрицы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1989. Т. 53, № 5. С. 1073–1107.
2. *Матвеев С.В.* Классификация достаточно больших трехмерных многообразий // УМН. 1997. Т. 52, № 5. С. 147–174.
3. *Дынников И.А.* Трехстраничный подход в теории узлов. Кодирование и локальные движения // Функц. анализ и его прил. 1999. Т. 33, № 4. С. 25–37.
4. *Дынников И.А.* Трехстраничный подход в теории узлов. Универсальная полугруппа // Функц. анализ и его прил. 2000. Т. 34, № 1. С. 29–40.