Об одном отображении Янга–Бакстера и упорядочении Деорнуа

И. А. Дынников*

Отображение $f : X \times X \to X \times X$ называется *отображением Янга–Бакстера* на множестве X, если выполнено соотношение

$$(f \times \mathrm{id}_X) \circ (\mathrm{id}_X \times f) \circ (f \times \mathrm{id}_X) = (\mathrm{id}_X \times f) \circ (f \times \mathrm{id}_X) \circ (\mathrm{id}_X \times f). \tag{1}$$

Изучать такие отображения было предложено в [1], термин "отображение Янга–Бакстера" мы заимствовали из [2]. Различные подходы к построению отображений Янга–Бакстера и ряд примеров содержатся в [2, 3, 4]. Здесь мы рассмотрим отображение Янга–Бакстера принципиально иного рода, чем рассмотренные в указанных работах, и покажем, что оно дает простой и очень быстрый алгоритм для определения порядка Деорнуа в группе кос.

Предложение 1. *Отображение $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, заданное формулой $f(a,b,c,d) = (a',b',c',d')$, где*

$$\begin{aligned} a' &= \max(a, a+b, b+c), & b' &= d - \max(0, a-b-c+\max(0,b)+\max(0,d)), \\ c' &= a+c+d-\max(a,c,a+d), & d' &= \max(b, a-c+\max(0,b)+\max(0,d)), \end{aligned} \tag{2}$$

является невырожденным (т.е. биективным) отображением Янга–Бакстера на $\mathbb{R}^2$. Обратное отображение задается формулой $f^{-1} = \tau \circ f \circ \tau$, где $\tau(a,b,c,d) = (-a,b,-c,d)$.

Доказательство. Явной подстановкой легко проверить, что отображение

$$f^r(a,b,c,d) = \Big(a+ab+bc, \frac{bcd}{bc+a(1+b)(1+d)}, \frac{acd}{a+c+ad}, \frac{bc+a(1+b)(1+d)}{c}\Big), \tag{3}$$

полученное из f заменой операций $+, -, \max$ на $\cdot, /, +$ соответственно, является отображением Янга–Бакстера на $\mathbb{R}^2_+$. В этом вычислении используются только свойства коммутативности и дистрибутивности операций $\cdot, /, +$, которыми обладают и $+, -, \max$.

Отображения f и f^r задают действия ρ и ρ^r группы кос B_n на $\mathbb{R}^{2n}$ и $\mathbb{R}^{2n}_+$ соответственно стандартным образом. А именно, образующая σ_i отображается под действием ρ в $\mathrm{id}^{\times(i-1)} \times f \times \mathrm{id}^{\times(n-i-1)}$ (соответственно, в $\mathrm{id}^{\times(i-1)} \times f^r \times \mathrm{id}^{\times(n-i-1)}$ под действием ρ^r). Поясним геометрический смысл действий ρ и ρ^r.

Как известно, группа кос B_n может быть реализована как группа классов диффеоморфизмов двумерного диска с n отмеченными точками, фиксированных на границе. Как следствие, группа B_n может быть вложена в группу $MCG^{0,n+3}$ классов диффеоморфизмов сферы S^2 с $n+3$ отмеченными точками $P_0, P_1, \ldots, P_{n+2}$. Группа $MCG^{0,n+3}$ действует стандартным образом на пространстве $L^{0,n+3}$ ламинаций и пространстве $T^{0,n+3}$ гиперболических структур (пространстве Тайхмюллера) поверхности $S^2 - \{P_0, \ldots, P_{n+2}\}$. Действие ρ (ρ^r) есть не что иное, как записанное в специальной системе координат ограничение стандартного действия группы $MCG^{0,n+3}$ на пространстве $L^{0,n+3}$ (соответственно, $T^{0,n+3}$) на подгруппу B_n. Упомянутые системы координат строятся следующим образом.

Реализуем сферу S^2 как $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Положим $P_k = (k,0)$ для $k = 0, \ldots, n+1$, $P_{n+2} = \infty$, $e_0 = \{(x,0) \,|\, x < 0\}$, $e_{3k+1} = \{(k+1/2, y)\}$ для $k = 0, \ldots, n$, $e_{3k-1} = \{(k,y) \,|\, y > 0\}$, $e_{3k} = \{(k,y) \,|\, y < 0\}$ для $k = 1, \ldots, n$, $e_{3n+2} = \{(x,0) \,|\, x > n+1\}$. Вершины P_k и ребра e_k задают сингулярную триангуляцию сферы S^2.

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 99-01-00090).

Мы предполагаем, что образующие σ_i группы B_n реализованы диффеоморфизмами, тождественными вне круглого диска, содержащего точки P_i, P_{i+1} и не содержащего точек P_j, где $j \neq i, i+1$. Тогда действие группы B_n на $T^{0,n+3}$ совпадет с ρ^r, если в качестве координат $(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ на $T^{0,n+3}$ взять $a_k = \lambda_{3k-1}/\lambda_{3k}$, $b_k = \lambda_{3k-2}/\lambda_{3k+1}$, где λ_i — λ-длина ребра e_i, определенная в [5].

Чтобы проще объяснить геометрический смысл действия ρ, ограничимся лишь целочисленными точками $\mathbb{Z}^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n}$. *Целочисленной ламинацией* на $S^2 - \{P_0, \ldots, P_{n+2}\}$ будем называть произвольный изотопический класс объединения непересекающихся простых замкнутых кривых на $S^2 - \{P_0, \ldots, P_{n+2}\}$, ни одна из которых не гомотопна нулю и не ограничивает диск, содержащий ровно одну из точек P_k. Для целочисленной ламинации l будем обозначать через $\mu_k(l)$ наименьшее возможное число точек пересечения представителя из l с ребром e_k. На множестве $L_{\mathbb{Z}}^{0,n+3}$ целочисленных ламинаций введем следующий набор функций: $a_i(l) = (\mu_{3i-1}(l) - \mu_{3i}(l))/2$, $b_i(l) = (\mu_{3i-2}(l) - \mu_{3i+1}(l))/2$.

Лемма 1. Набор функций $(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ задает взаимно-однозначное отображение $L_{\mathbb{Z}}^{0,n+3} \to \mathbb{Z}^{2n}$. При этом отождествлении действие группы B_n на $L_{\mathbb{Z}}^{0,n+3}$ совпадает с действием ρ.

Доказательство лишь в деталях отличается от доказательства аналогичных утверждений в [6].

Напомним, что коса $b \in B_n$ называется σ-положительной (см. [7]), если для некоторого k, $0 < k < n$, она может быть представлена словом в стандартных образующих σ_i, не содержащим $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$, и содержащем σ_k только в положительной степени. Коса, обратная к σ-положительной, называется σ-отрицательной. В [7] доказано, что каждая нетривиальная коса либо σ-положительна, либо σ-отрицательна. Тем самым, на группе B_n можно определить право-инвариантный порядок, положив $b_1 > b_2$, если $b_1 b_2^{-1}$ — σ-положительная коса. В [7] предолжен алгоритм, определяющий, является ли данная коса σ-положительной, σ-отрицательной или тривиальной. Хотя на практике этот алгоритм работает быстро, полиномиальная оценка его скорости пока не доказана.

Рассмотрим частичный порядок $<_{\text{oddlex}}$ в $\mathbb{Z}^{2n}$, заданный следующим образом: $x <_{\text{oddlex}} y$, если для некоторого $j \leqslant n$ выполнено: $x_{2j-1} < y_{2j-1}$ и $x_{2i-1} = y_{2i-1}$ для всех $0 < i < j$. Обозначим через L_0 набор $(0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{Z}^{2n}$.

Предложение 2. *Коса $b \in B_n$ σ-положительна (σ-отрицательна) тогда и только тогда, когда $L_0 <_{\text{oddlex}} b \cdot L_0$ (соответственно, $b \cdot L_0 <_{\text{oddlex}} L_0$).*

Это утверждение дает простой алгоритм для определения по данной косе b, какое из неравенств $b > 1$ или $b < 1$ имеет место. Достаточно вычислить $b \cdot L_0$, что требует $\text{const} \cdot |b|$ арифметических операций, где $|b|$ — длина записи данной косы.[1] При этом const не зависит от числа нитей n. Однако, числа, над которыми выполняютя арифметические операции, могут быть большими. Для оценки их роста введем следующее определение.

Пусть коса b записана в виде

$$b = \Delta_{i_1 j_1}^{p_1} \ldots \Delta_{i_m j_m}^{p_m}, \tag{4}$$

где Δ_{ij}^p — элеметны типа Гарсайда:

$$\Delta_{ij}^p = (\sigma_i \sigma_{i+1} \ldots \sigma_{j-1})(\sigma_i \sigma_{i+1} \ldots \sigma_{j-2}) \ldots \sigma_i. \tag{5}$$

Δ-длиной слова (4) мы будем называть величину

$$|b|_\Delta = \sum_{s=1}^{m} (1 + \log(j_s - i_s) + \log|p_s|). \tag{6}$$

Заметим, что для любого слова b, задающего косу, имеет место оценка $|b|_\Delta \leqslant |b|$. В пространстве $\mathbb{Z}^{2n}$ мы используем следующую норму: $\|x\| = \max_{i=1}^n |x_i|$.

[1] Первоначально автором была лишь замечено, что действие ρ дает быстрый алгоритм распознавания тривиальной косы. Вопрос о связи этого действия с σ-упорядочением был поставлен П. Деорнуа, а ответ высказан в качестве гипотезы С. Оревковым, который указал автору на работу [8], где использованы похожие геометрические идеи.

Предложение 2. *Для произвольной косы* $b \in B_n$ *имеет место оценка* $\log \|b \cdot L_0\| \leqslant 2|b|_\Delta$. *Следовательно, элемент* $b \cdot L_0$ *может быть вычислен за* $\mathrm{const} \cdot |b|_\Delta \cdot |b|$ *операций.*

Отметим, что оценка времени, необходимого для сравнения косы b с 1 в σ-упорядочении зависит лишь от длины слова b и не зависит от числа нитей. До недавнего времени среди алгоритмов для решения проблемы равенства слов в группе B_n наилучшую оценку времени работы имел алгоритм из работы [9], где n входило в оценку линейно. Недавно в работе [10] независимо появился алгоритм, подобный нашему, где, однако, не был замечено, что действие на ламинациях связано с некоторым отображением Янга–Бакстера.

Список литертуры

[1] V. Drinfeld. On some unsolved problems in quantum group theory. Quantum groups (Leningrad, 1990), 1–8, *Lecture Notes in Math.*, **1510**, Springer, Berlin, 1992.

[2] В. М. Бухштабер. Отображения Янга–Бакстера. *УМН* **53** (1998), 6, 241–242.

[3] A. Weinstein, P. Xu. Classical Solutions of the Quantum Yang–Baxter Equation. *Comm. Math. Phys.* **148** (1992), 304–343.

[4] M. Wada. Group invariants of links. *Topology* **31**, no. 2, 399–406.

[5] J. Penner. The decorated Teichmьller space of punctured surfaces. *Comm. Math. Phys.* **113** (1987), no. 2, 299–339.

[6] V. Fock. Dual Teichmüller spaces. *Preprint*, http://xxx.lanl.gov/e-print/dg-ga/9702018

[7] P. Dehornoy. Braid groups and left distributive operations. *Transactions of the Amer. Math. Soc.* **345** (1994), 1, 115–150.

[8] R. Fenn, M. T. Greene, D. Rolfsen, C. Rourke, B. Wiest. Ordering the braid groups. *Pacific J. Math.* **191** (1999), no. 1, 49–74.

[9] J. Birman, K. H. Ko, and S. J. Lee. A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups, *Adv. Math.* **139** (1998), 322-353.

[10] А. В. Малютин. Быстрые алгоритмы распознавания и сравнения кос. *Зап. науч. семин. ПОМИ* **279** (2001), 200–215.