Задачи по дифференциальной геометрии. 2 курс

12 мая 2009 г.

1. Доказать непрерывность функции расстояния в $\mathbb{R}^n$ как функции от двух аргументов (двух точек в $\mathbb{R}^n$).

2. Доказать непрерывность функции расстояния от переменной точки в $\mathbb{R}^n$ до заданного множества.

3. Доказать, что если отображение $f : A \to X$ непрерывно, то будут также непрерывны отображения $f : A \to Y$ и $f : B \to X$, где $X \subset Y$ и $B \subset A$.

4. Отображение $f : U \to \mathbb{R}^k$, где $U \subset \mathbb{R}^m$ открыто, непрерывно тогда и только тогда, когда отображение $x \mapsto (x, f(x))$ множества U на график отображения f есть гомеоморфизм.

5. Построить непрерывное и взаимно однозначное, но не гомеоморфное отображение . (Например, отобразить так не связное пространство на связное или не компактное на компактное.)

6. Доказать, что окружность негомеоморфна интервалу (т.е. ее нельзя параметризовать одной картой).

7. * Доказать, что сферу S^{n-1} нельзя параметризовать одной картой (т.е. она негомеоморфна открытому подмножеству $\mathbb{R}^n$).

8. Доказать, что восьмерка негомеоморфна интервалу и окружности.

9. Построить гомеоморфизм прямой на интервал (-1,1) (воспользоваться одной из элементарных функций).

10. Построить гомеоморфизм плоскости на открытый круг.

11. Связные подмножества прямой – это всевозможные интервалы (включая бесконечные интервалы, полуинтервалы, точки).

12. Непрерывные отображения сохраняют свойство связности пространства.

13. Вывести теорему о промежуточном значении из предыдущей задачи.

14. Открытое связное подмножество $\mathbb{R}^n$ линейно связно.

15. * Объединение графика функции $\sin 1/x$ вместе с отрезком [-1,1] оси Oy связно, но не линейно связно.

16. Компактные подмножества $\mathbb{R}^n$ совпадают с подмножествами замкнутыми и ограниченными.

17. Непрерывные отображения сохраняют компактность. Вывести отсюда теоремы Вейерштрасса об ограниченности и достижении экстремума для функций непрерывных на отрезке.

18. Построить непрерывное отображение канторова множества на отрезок и на квадрат. Может ли оно быть взаимно однозначным?

19. ** Построить гомеоморфизм канторова множества на себя, переводящий данную точку первого рода (точка, граничная к одному из выкинутых отрезков) в точку второго рода (т.е. не первого).

20. ** Построить пример разрывного отображения компактного множества, которое сохраняет связность связных подмножеств и компактность.

21. Построить пример связного нехаусдорфова топологического пространства.

22. Показать, что вещественная ось не гомеоморфна двумерной плоскости.

23. * Показать, что декартово произведение двух компактных топологических пространств компактно.

24. * Доказать, что группа $O(n, \mathbb{R})$ компактна.

25. * Доказать, что группа $SO(2, \mathbb{R})$ гомеоморфна окружности.

26. * Доказать, что группа $SO(n, \mathbb{R})$ (линейно) связна.

27. * Доказать, что группа квадратных матриц с положительным определителем (линейно) связна.

28. * Доказать то же для группы $SL(n, \mathbb{R})$.

29. * Доказать, что группа $SO(3, \mathbb{R})$ гомеоморфна проективному пространству P^3.

- = - = - = -

Годограф векторной функции $\mathbf{r}(\mathrm{t})$ это кривая, описанная концами векторов $\mathbf{r}(\mathrm{t})$.

30. Годограф линейной функции $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$ есть прямая.

31. Годограф функции $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}\cos t + \mathbf{b}\sin t$ есть эллипс или отрезок. (Выберите правильно координаты.)

32. Годограф функции $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}\,\mathrm{ch}\, t + \mathbf{b}\,\mathrm{sh}\, t$ есть гипербола или часть прямой.

33. Годограф функции $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}t + \mathbf{c}t^2$ есть парабола или прямая.

34. Вывести правило дифференцирования смешанного произведения трех векторных функций и показать, что оно согласовано с правилом дифференцирования определителя третьего порядка.

35. С помощью формулы Тейлора показать. что если производная векторной функции на некотором интервале равна нулю, то эта функция постоянна.

36. Длина вектора, гладко зависящего от параметра, постоянна тогда и только тогда, когда его производная ему перпендикулярна.

37. Вектор сохраняет направление (т.е. имеет вид $\mathbf{r}(t) = u(t)\boldsymbol{\tau}(t)$, где $\boldsymbol{\tau}(t)$ единичный вектор) тогда и только тогда, когда его производная ему коллинеарна ($\dot{\mathbf{r}}(t) = v(t)\mathbf{r}(t)$).

38. Пусть векторная функция от t и ее первые k-1 производные линейно независимы в $\mathbb{R}^n$ при каждом значении t, а k-ая производная линейно выражается через них. Тогда годограф этой функции лежит в k-мерной плоскости. (Можно использовать дифференциальное уравнение, но можно доказать и без него.)

Через $\mathbf{e}(\varphi)$ обозначается векторная функция единичной длины $\mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi$, удобная в задачах с вращением вокруг оси Oz. Ее производная обозначается $\mathbf{g}(\varphi) = -\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi$. Она ортогональна $\mathbf{e}(\varphi)$ (почему?), повернута относительно нее на прямой угол против часовой стрелки и тоже имеет единичную длину.

39. Доказать, не переходя к координатам, что

$$\mathbf{e}(\varphi + \alpha) = \mathbf{e}(\phi)\cos\alpha + \mathbf{g}(\varphi)\sin\alpha.$$

40. Написать параметрическое уравнение кривой, заданной графиком функции y=f(x), приняв за параметр x.

41. Написать параметрическое уравнение кривой, заданной в полярной системе уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ (использовать функцию $\mathbf{e}(\varphi)$).

42. Написать уравнение касательной к кривой, в полярных координатах. Найти тангенс угла между касательной и радиус-вектором.

Нужно различать *гладко параметризованную кривую* (когда в данной параметризации функция $\mathbf{r}(t)$ имеет непрерывную производную) и *гладкую кривую* (когда кривая допускает *невырожденную* гладкую параметризацию, т.е. производная $\dot{\mathbf{r}}(t)$)всюду отлична от нуля). Гладкая кривая будет гладким одномерным подмногообразием плоскости, если нет точек самопересечения.

Для гладко параметризованной кривой *особой точкой* называется точка, в которой производная равна нулю.

43. Пусть функция $\mathbf{r}(t)$ непрерывно дифференцируема конечное число раз и в особой точке $\mathbf{r}(0)$ первая ненулевая производная есть $\mathbf{r}^{(k)}(0)$. Доказать, что она служит направляющим вектором касательной в этой точке

44. Найти касательную в особой точке кривой $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{t^3}{3}\mathbf{j} + \frac{t^4}{12}\mathbf{k}$

Две кривые *касаются* в данной точке, если они имеют общую касательную в этой точке.

Если дано уравнение $F(x,\, y,\, a) = 0$, то можно считать, что оно определяет однопараметрическое семейство кривых, где a принимается за параметр. (Т.е. при каждом значении a из некоторого интервала определена кривая.) Пусть дана кривая $\mathbf{r}(a)$, параметризованная этим параметром, и такая, что для каждого значения a она касается кривой $F(x,\, y,\, a) = 0$ в точке $\mathbf{r}(a)$. Такая кривая называется *огибающей* семейства $F(x,\, y,\, a)$. Если векторы $(\frac{\partial F}{\partial x},\, \frac{\partial F}{\partial y})$ в точках $\mathbf{r}(a)$ ненулевые, то оказывается, что уравнение огибающей в параметрической форме $\mathbf{r}(a) = (x(a),\, y(a))$ получается решением системы $F(x,\, y,\, a) = 0,\ \frac{\partial F(x,y,a)}{\partial a} = 0$

45. ** **Астроида**. Написать уравнение огибающей семейства отрезков длины a, концы которых находятся на осях Ox и Oy.

-=-=-=-=-

46. Когда композиция линейных отображений максимального ранга имеет максимальный ранг?

47. Доказать, что если линейные отображения $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ и $g : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k$ взаимно обратны: $fg = 1_l$ и $gf = 1_k$ (где 1_p – тождественное отображение пространства $\mathbb{R}^p$), то их матрицы квадратны и невырождены.

Гладкое отображение называется *регулярным*, если ранг матрицы Якоби максимален в каждой точке.

48. Доказать, что гладкое регулярное отображение φ открытого подмножества $U \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ является локальным диффеоморфизмом.

Если это отображение является диффеоморфизмом, то говорят, что φ вводит *криволинейную систему координат* в область $V = \varphi(U)$. Это значит, что за координаты точки $y = \varphi(x) \in V$ принимают стандартные координаты точки $x \in U$.

49. ** Для каких областей формулы перехода от декартовых координат к полярным на плоскости задают диффеоморфизм?

50. Вычислить якобианы переходов от декартовой к полярной, сферической и цилиндрической системам координат.

51. Написать уравнение прямой линии в полярных координатах и построить график получившейся кривой.

52. Показать, что диффеоморфизм области $U \subset \mathbb{R}^n$ на область в $\mathbb{R}^n$ есть в окрестности каждой точки $A \in U$ тождественное преобразование „с точностью до выбора локальной системы координат“, т.е. записывается уравнениями $y_i = x_i,\ 1 \le i \le n$.

53. * Выпрямить отображение (т.е. ввести криволинейную систему координат в образе так, чтобы отображение записывалось линейными функциями):

$$\begin{aligned} x &= 2u - e^u + \sin^2 v \\ y &= e^u + \cos^2 v \\ z &= v \end{aligned}$$

в окрестности точки (0,0). Проверить условие регулярности.

54. * Представить образ отображения в предыдущей задаче в окрестности точки (0,0) полным прообразом точки при регулярном отображении в $\mathbb{R}^1$ области из R^3 (т.е. множеством уровня некоторой функции).

55. * Выпрямить отображение (ввести криволинейную систему координат в прообразе так, чтобы отображение записывалось линейными функциями):

$$\begin{aligned} x &= w \sin u - v \\ y &= v \sin u \end{aligned}$$

в окрестности точки (0,1,0).

56. * Параметризовать в окрестности точки (0,1,0) полный прообраз M образа этой точки при отображении из предыдущей задачи интервалом числовой оси (т.е. построить регулярное отображение интервала в $\mathbb{R}^3$, образом которого служит M.)

57. * Пусть Φ – диффеоморфизм области $U \subset \mathbb{R}^n$ на область $V \subset \mathbb{R}^n$, причем пересечение $U \bigcap P_1$, где P_1 – k-плоскость в $\mathbb{R}^n$, переходит в пересечение $V \bigcap P_2$, где P_2 – также k-плоскость в $\mathbb{R}^n$. Показать, что ограничение Φ на P_1 есть диффеоморфизм $U \bigcap P_1$ на $V \bigcap P_2$. [P_1 и P_2 можно считать координатными плоскостями. Рассмотрите матрицу Якоби отображения Φ.]

58. ** Доказать, что уравнения

$$y_1 = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2, \quad y_2 = x_1 x_2, \quad y_3 = x_1 x_3, \quad y_4 = x_2 x_3$$

задают регулярное отображение двумерной единичной сферы в пространство $\mathbb{R}^4$, при котором в каждую точку его образа отображаются две диаметрально противоположные точки и только они. (Иными словами, это отображение задает регулярное отображение проективной плоскости в $\mathbb{R}^4$. Покажите, что это – вложение. Покажите, что это отображение не будет регулярным отображением всего $\mathbb{R}^4$ в некоторых точках сферы.)

59. Доказать, что условия ортогональности $(n \times n)$-матрицы составляют невырожденную систему уравнений во всех точках (значит, ортогональная группа есть гладкое подмногообразие пространства $\mathbb{R}^{n^2}$).

60. Пусть M $(n{\times}n)$-матрица. Доказать, что уравнение $\det M = 1$ невырождено во всех точках при $c \ne 0$. (Значит, группа $SL(n, \mathbb{R})$ матриц с определителем

1 является гладкой гиперповерхностью в $\mathbb{R}^{n^2}$. Гиперповерхность это подмногообразие размерности $n-1$ или *коразмерности* 1.)

61. * В каких точках вырождено уравнение $\det(M) = 0$?

62. Построить явные формулы для гладкого гомеоморфизма открытого n-диска на евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.

63. С помощью теоремы о неявной функции доказать, что окружность в $\mathbb{R}^2$, сфера в $\mathbb{R}^3$ – гладкие подмногообразия.

64. Построить гладкий атлас карт для двумерной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

65. Построить гладкий атлас карт для проективной плоскости (заданной в проективных координатах).

66. * Доказать, что поверхность вращения вокруг оси Oz окружности, лежащей в плоскости xOz и не пересекающейся с осью Oz (двумерный тор), является гладким многообразием. Задать ее невырожденным уравнением, считая, что центр окружности есть точка (2,0,0), а радиус 1.

67. * Пусть M - гладкое многообразие, $p \in U \subset M$ – окрестность точки p. Доказать, что существует такая гладкая функция f , что $0 < f(x) < 1$, если $x \in U$; $f(p) = 1$; $f(x) = 0$, если $x \notin U$. (Использовать локально конечное покрытие и разбиение единицы, подчиненное ему.)

68. Доказать с помощью разбиения единицы, что гладкая функция, заданная на гладком подмногообразии евклидова пространства, может быть продолжена до гладкой функции, заданной на окрестности этого многообразия.

69. Доказать с помощью разбиения единицы, что любая непрерывная функция, заданная на некотором компакте в $\mathbb{R}^n$ может быть сколь угодно близко равномерно аппроксимирована гладкой функцией (заданной на окрестности компакта).

70. Доказать, что любое гладкое многообразие имеет такой атлас карт, в котором каждая карта гомеоморфна евклидову пространству.

71. ** Вычислить выражение для оператора Лапласа в полярной системе координат.

- = - =- = -

Найти параметрическое задание, уравнение в полярных координатах, уравнение касательной, кривизну, центр кривизны для следующих кривых:

72. **Циклоида** (описывается точкой A окружности радиуса a, катящейся по оси Ox. За параметр t взять угол между радиусом точки A и вертикалью, считая, что при $t = 0$ точка совпадает с началом). Найти особые точки, касательную в особой точке и длину одного периода.

73. **Парабола** $y = x^2$.

74. **Спираль Архимеда** (радиус пропорционален азимуту).

75. **Логарифмическая спираль** (радиус пропорционален e^{φ}). Показать, что при повороте происходит гомотетия кривой, и что кривая пересекает лучи из начала под постоянным углом.

76. **Винтовая линия** (описывается точкой, координата z которой пропорциональна азимуту ее проекции на плоскость Oxy). Найти в ортонормированном базисе ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$) ее параметрическое задание, касательную, нормаль и бинормаль, три плоскости Френе и репер Френе, показать, что касательная образует постоянный угол с плоскостью Oxy, а нормаль проходит через ось Oz , написать уравнение винтовой линии с отрицательным кручением, написать натуральное уравнение.

77. Найти кривизну кривой, заданной уравнением F(x,y)=0.

78. Найти рекуррентные формулы для выражения высших производных радиус-вектора кривой в трехграннике Френе.

79. Написать в натуральном параметре разложение Тейлора для расстояния точки кривой от произвольной плоскости (заданной нормальным вектором n и проходящей через данную точку кривой) и проанализировать расположение кривой в окрестности данной точки относительно плоскостей трехгранника Френе (в каком случае кривая находится с одной стороны плоскости или переходит с одной стороны на другую).

- = - =- = -

80. Найти координатные линии на поверхности эллипсоида:
$x = a\,\cos(f)\,\cos(w)$, $y = b\,\sin(f)\,\cos(w)$, $z = c\,\sin(w)$.

81. Написать параметрическое уравнение для круглого цилиндра и круглого конуса. (Использовать $\mathbf{e}(\varphi)$.)

82. Написать уравнение касательной плоскости для цилиндрической и для конической поверхностей.

83. Написать (нормальное) уравнение касательной плоскости сферы, заданной в сферических координатах: $\mathbf{r}(\varphi, \psi) = \mathrm{r}(\mathbf{e}(\varphi)\,\cos(\psi) + \mathbf{k}\sin(\psi))$

84. Плоскость в трехмерном пространстве задана параметрически: $r = r_0 + au + bv$. Написать первую квадратичную форму в координатах (u,v).

85. Найти первую квадратичную форму плоскости в полярных координатах.

86. Найти первую квадратичную форму сферы в сферических координатах.

87. Найти первую квадратичную форму кругового цилиндра в цилиндрических координатах.

88. Найти первую квадратичную форму кругового конуса в сферических координатах.

89. Найти первую квадратичную форму поверхности, заданной графиком $z = f(x, y)$ в декартовых координатах. Использовать обозначения Монжа: $p = f_x$, $q = f_y$

90. Найти выражение косинуса угла пересечения координатных кривых поверхности, заданной графиком функции $z = f(x, y)$ (в координатах x, y).

91. Написать выражение для синуса и для тангенса угла между двумя касательными векторами поверхности.

92. Показать, что первая квадратичная форма может быть записана в виде $A^2\,du^2 + 2AB\,\cos(\omega) du\,dv + B^2\,dv2$. Какой смысл имеют A, B, ω?

93. Написать выражение площади поверхности, заданной графиком z=f(x,y) и подсчитать с его помощью площадь единичной сферы.

94. Проверить, что в особой точке второй дифференциал функции изменяется при замене переменных как квадратичная форма.

95. Написать вторую квадратичную форму для единичной сферы.

96. Написать вторую квадратичную форму графика функции $z = f(x, y)$.

97. Показать, что одна из главных кривизн поверхности вращения совпадает с кривизной меридиана, а вторая равна с точностью до знака обратной величине к отрезку нормали до оси.

98. Найти полную и среднюю кривизну сферы радиуса R.

99. Найти выражение полной и средней кривизны для поверхности графика $f(x, y)$.

100. Найти геометрическое место концов векторов кривизны кривых на поверхности, имеющих в данной точке общую касательную.

-=-=-=-=-

101 *. Пусть кривая $\mathbf{r(s)}$ лежит в координатной полуплоскости Oxz, $x > 0$, где l – натуральный параметр кривой. Написать параметрическое задание поверхности, полученной вращением этой кривой вокруг оси Oz в параметрах (l, φ), (φ – азимут), и показать, что первую квадратичную форму можно представить в виде $ds^2 = f(u)(du^2 + d\varphi^2)$, где u – некоторый новый параметр. (Иначе говоря, метрика может быть приведена к частному случаю конформного типа.)

102 *. Для данной плоской кривой $\mathbf{r(s)}$ (s – ее длина) написать уравнение кривой $\boldsymbol{\rho}(s)$, состоящей из ее центров кривизны, взяв s за параметр соответствующей точки ($\boldsymbol{\rho}(s)$ – эволюта кривой $\mathbf{r(s)}$). Показать, что касательные к ($\boldsymbol{r}ho(s)$ служат нормалями к $\mathbf{r(s)}$) в соответствующих точках.

103 *. **Трактриса**. Написать параметрическое уравнение кривой, отрезок касательной которой (до оси абсцисс) постоянен и равен a, взяв за параметр угол наклона касательной α и считая, что в начале координат касательная вертикальна. (Выразить сначала дифференциал dx через $d\alpha$ и получить x интегрированием.) Найти кривизну трактрисы и показать, что касательная к ней пересекает ось абсцисс в точке, служащей основанием перпендикуляра, опущенного из центра кривизны на эту ось. Найти координаты центра кривизны и показать, что эволютой трактрисы служит кривая $y = a\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ – цепная линия.

104 *. **Псевдосфера**. Показать, что метрика на поверхности вращения трактрисы вокруг оси Oz может быть приведена к виду конформному виду $a^2\,\frac{du^2+dv^2}{v^2}$, где $u = \frac{\varphi}{a}$, $v = \frac{1}{\eta}$ (η – перпендикуляр на ось вращения).

105 *. **Псевдосфера** в гиперболическом пространстве. В трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами x, y, t рассмотрим «псевдоевклидову метрику» $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2$ (в физике берется противоположный знак). В этом случае пространство называется «псевдоевклидовым» и обозначается $\mathbb{R}^{2,1}$. Двуполостный гиперболоид $x^2+y^2-t^2 = R^2$ играет в этой метрике роль, аналогичную роли сферы в обычной евклидовой метрике и потому он называется «псевдосферой». В псевдоевклидовом пространстве удобно (по аналогии с обычными сферическими координатами) рассмотреть псевдосферические координаты, заменив тригонометрические функции гиперболическими:

$$x = \rho\,\mathrm{sh}\,\chi\cos\varphi,\ \ y = \rho\,\mathrm{sh}\,\chi\sin\varphi,\ \ t = \rho\mathrm{ch}\,\chi.$$

Написать псевдоевклидову метрику в этих координатах и показать, что на псевдосфере индуцируется положительно определенная метрика. Показать, что она локально изометрична метрике поверхности, полученной вращением трактрисы (задача 103).

106. **Поверхность касательных**. Пусть дана кривая $\mathbf{r(l)}$ с натуральным параметром l и функциями кривизны $k(l)$ и кручения $\kappa(l)$. Рассмотрим поверхность $\boldsymbol{\rho}(l, v)$ образованную полукасательными к данной кривой, где v есть параметр длины вдоль касательной ($v \geq 0$ и $v = 0$ в точках кривой). Написать параметрическое уравнение поверхности и ее метрику, индуцированную стандартной метрикой в $\mathbb{R}^3$. Показать, что эта метрика локально изометрична метрике плоскости.

106а. ** **Развертывающиеся поверхности.** Пусть дана линейчатая поверхность (образованная однопараметрическим семейством прямых), у которой касательные плоскости не меняются вдоль характеристик (прямых этого семейства). Построить кривую на поверхности, ортогональную в каждой точке характеристике. Пусть $\rho(s)$ задание такой кривой в натуральной параметризации. Пусть v – расстояние по характеристике до этой кривой. Написать метрику поверхности в координатах (s, v) и убедиться, что локально она совпадает с метрикой плоскости в некоторой криволинейной системе координат.

-=-=-=-=-

107. Поверхность в $\mathbb{R}^3$ задана неявно уравнением $F(x, y, s) = 0$. Написать параметрическое задание ее касательной плоскости в точке (x_0, y_0, z_0).

108. Поверхность в $\mathbb{R}^3$ задана параметрически: $\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Написать уравнение (неявное) ее касательной плоскости в точке $\mathbf{r}(\mathbf{u_0}, \mathbf{v_0}) = (\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}, \mathbf{z_0})$.

109. Поверхность задана графиком функции $z = f(x, y)$. Написать неявное и параметрическое уравнения ее касательной плоскости в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

110. ** Доказать тождество Лагранжа $([\mathbf{u}, \mathbf{v}], [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = \det \begin{pmatrix} (\mathbf{u}, \mathbf{a}) & (\mathbf{u}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{v}, \mathbf{a}) & (\mathbf{v}, \mathbf{b}) \end{pmatrix}$

111. Стандартная (евклидова) метрика в $\mathbb{R}^3$ определяется «по Пифагору»: $dx^2 + dy^2 + dz^2$. Написать индуцированную риманову метрику на поверхности в $\mathbb{R}^3$, которая задана: a) неявно $(F(x, y, s) = 0)$, b) параметрически $(\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ и c) как график функции $z = f(x, y)$ (использовать обозначения p и q Монжа).

112. Написать выражение для g (квадратного корня из определителя формы метрики) в каждом из трех случаев задачи 111. Показать в случае b), что $g = |[\mathbf{r_u}, \mathbf{r_v}]|$ прямым вычислением и с помощью тождества Лагранжа.

113. ** Написать вторую квадратичную форму для неявно заданной поверхности (в координатах x, y).

114. Доказать равенство двух выражений для второй квадратичной формы: $(d\mathbf{n}, d\mathbf{r}) = -(\mathbf{n}, d^2\mathbf{r})$ $(d^2\mathbf{r} = \mathbf{r}_{uu}du^2 + 2\mathbf{r}_{uv}du\,dv + \mathbf{r}_{vv}dv^2)$.

115. Написать вторую квадратичную форму для поверхности вращения вокруг оси Oz $\mathbf{r}(t, \varphi) = \rho(t)\mathbf{e}(\varphi)) + \zeta(t)\mathbf{k}$ кривой $z = \zeta(t)$.

116. Найти гауссову кривизну и среднюю кривизну единичной сферы.

117. Найти гауссову кривизну поверхности вращения.

118. * Найти гауссову кривизну псевдосферы.

119. Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности, заданной как график функции $z = f(x, y)$.

120. Рассмотреть поверхность тора, полученного вращением окружности $(x-2)^2+y^2 = 1$ вокруг оси Oz, и найти области, состоящие из точек выпуклости и седлообразных точек. Найти кривые, которые разделяют эти точки, и показать, что гауссова кривизна в точках этих кривых равна нулю.

121. Доказать, что величина обратная геодезической кривизне (т.е. радиус геодезической кривизны) параллели поверхности вращения равна отрезку касательной к меридиану от точки касания до оси вращения.

122. Доказать: $k^2 = k_g^2 + k_n^2$, где k_g – геодезическая, а k_n – нормальная кривизны.

- = - = - = -

123. Подсчитать в явном виде символы Кристоффеля для метрики плоскости в полярных координатах.

124. Вычислить символы Кристоффеля для сферы в сферических координатах.

125. Вычислить символы Кристоффеля для круглой цилиндрической и круглой конической поверхностей.

126. Вычислить символы Кристоффеля для плоскости Лобачевского в метрике $d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$ и в метрике $\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$

127. На какой угол повернется вектор при параллельном переносе его по замкнутой кривой на цилиндрической поверхности. Зависит ли результат от выбора кривой?

128. На какой угол повернется вектор при параллельном переносе его по замкнутой кривой на конической поверхности. Зависит ли результат от выбора кривой?

129. Доказать, что если две поверхности касаются вдоль кривой, то параллельный перенос вдоль этой кривой на обеих поверхностях даст тот же результат.

130. На какой угол повернется вектор при параллельном переносе его по замкнутой параллели (широты α) на сфере радиуса 1? (Использовать две предыдущие задачи.)

131. Написать уравнения параллельного переноса по кривой $\theta = \mathrm{const}$ для метрики на сфере $d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$.

132. Написать уравнения параллельного переноса по кривой $\theta = \mathrm{const}$ для метрики $d\theta^2 + \mathrm{sh}^2\,\theta\, d\varphi^2$.

133. Вычислить, на какой угол повернется вектор при параллельном переносе вдоль кривой $\theta = \mathrm{const}$ для метрики $d\theta^2 + \mathrm{sh}^2\,\theta\, d\varphi^2$.

134. Прямая, лежащая на поверхности в $\mathbb{R}^3$, является геодезической на этой поверхности.

135. Если две поверхности пересекаются трансверсально (под ненулевым углом в каждой точке), и линия пересечения геодезическая на каждой из них, то эта линия прямая.

136. Найти все геодезические на сфере.