Алгебра тензоров

А.В. ЧЕРНАВСКИЙ

1 ноября 2008

I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕНЗОРОВ

1. Тензорная алгебра над векторным пространством.

Пусть дано векторное пространство V размерности n. Мы будем обозначать его также V^n и $V^{(1)}$. Вообще говоря, в V можно различными способами ввести *умножение* (т.е. новую операцию, дистрибутивную относительно имеющихся векторных операций сложения и умножения на число). Но мы сделаем это *внешним образом*, т.е. введем операцию над векторами в V, результаты которой будут лежать, вообще говоря, вне V.

Наша задача: сопоставить пространству $V = V^{(1)}$ бесконечную последовательность векторных пространств $V^{(n)}$ так, чтобы в совокупности они образовывали *алгебру*, т.е. ввести в их прямую сумму ($V^{(0)} = \mathbb{R}$)

$$V^{(\infty)} = V^{(0)} \oplus V^{(1)} \oplus V^{(2)} \oplus \cdots \oplus V^{(k)} \oplus \cdots$$

ассоциативную операцию, дистрибутивную относительно сложения. Эту операцию будем обозначать $\otimes$ и называть *тензорным умножением.* (Под бесконечной прямой суммой векторных пространств понимается векторное пространство, состоящее из формальных конечных сумм элементов этих пространств, векторные операции вводятся естественным образом.)

Оказывается, что это можно сделать, если в качестве $V^{(k)}$ взять векторное пространство размерности n^k. Операция, которую мы сейчас введем, будет некоммутативной.

Мы скажем, что элементы пространства $V^{(k)}$ являются *тензорами ранга k.*

Замечание. На самом деле для для любого n данное векторное пространство над полем вещественных чисел размерности n можно нетривиально превратить в алгебру. (Тривиальное умножение – $ab = 0$, имеющееся в любом векторном пространстве, очевидно не интересно. Несколько менее тривиальное, но тоже неинтересное умножение – покоординатное.) Такое умножение в V^n можно получить из алгебры многочленов от переменной t, добавив соотношение $t^n = 0$. (Например, для $n = 4$: $(1+t^2)(2-t+t^2) = 2-t+3t^2-t^3$.) Особенно важными примерами являются: поля вещественных и комплексных чисел и тело кватернионов (их размерности $1, 2, 4$), а также пространство размерности n^2, которое отождествляется с алгеброй всех квадратных матриц порядка $n \times n$ с обычными сложением и умножением матриц (а также подалгебры этой алгебры).

1) Чтобы ввести умножение $\otimes$ в прямую сумму $V^{(\infty)}$, фиксируем в пространстве V базис, элементы которого будем обозначать e_i и также $\partial/\partial x^i$.

Второй способ обозначения связан с тем, что в дальнейшем, когда мы перейдем к дифференциальному исчислению тензоров, пространством V будет служить касательная плоскость в какой-нибудь точке x_0 гладкого многобразия и векторы в ней будут касательными векторами к многообразию в точке x_0. Мы знаем, что касательный вектор v можно интерпретировать как функционал дифференцирования в точке x_0: $v(f) = \frac{\partial f}{\partial v}|_{x_0}$. В частности, дифференцирование по базисному вектору $v = e_i$ дает частную производную по соответствующей координате: $\frac{\partial f}{\partial e_i}|_{x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_{x_0} f$. Мы рассматриваем эту запись как применение функционала $\frac{\partial}{\partial x^i}$ в точке x_0 к функции f, отождествляя, таким образом, $\frac{\partial}{\partial x^i}$ с e_i.

2) Сопоставим этому базису базисы во всех пространствах $V^{(k)}$. Элементы базиса в пространстве $V^{(k)}$ обозначим $e_{i_1 \ldots i_k}$. Здесь каждый индекс i_s независимо от других пробегает целые значения от 1 до n, так что всего имеется n^k таких выражений и размерность пространства $V^{(k)}$ равна, как и было сказано, n^k. Произвольный элемент $t \in V^{(k)}$ получает выражение $t^{i_1 \cdots i_k} e_{i_1 \ldots i_k}$ с обычным условием суммирования одночленов при совпадении верхнего и нижнего индексов. Числа $t^{i_1 \cdots i_k}$ являются координатами тензора в введенном базисе.

3) Определим умножение $a \otimes b$, $a \in V^{(p)}$, $b \in V^{(q)}$ сначала на базисных элементах правилом: $e_{i_1 \ldots i_p} \otimes e_{j_1 \ldots j_q} = e_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q}$.

При этом определении базисные элементы разлагаются в произведение базисных элементов меньшего ранга и мы можем разложить базисные элементы в произведение базисных элементов ранга 1, т.е. e_i. Очевидно, такое разложение единственно.

Таким образом,

$$e_{i_1 \ldots i_k} = e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k} = \partial/\partial x^{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial/\partial x^{i_k}.$$

Итак, произведение базисных элементов $\partial/\partial x^{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial/\partial x^{i_p} \in V^{(p)}$ и $\partial/\partial y^{j_1} \otimes \ldots \otimes \partial/\partial y^{j_q} \in V^{(q)}$ есть базисный элемент $\partial/\partial x^{i_1} \otimes \ldots \partial/\partial x^{i_p} \otimes \partial/\partial y^{j_1} \otimes \partial/\partial y^{j_q} \in V^{(p+q)}$.

4) Затем распространяем операцию $\otimes$ на все элементы "по линейности т.е., используя дистрибутивный закон. Таким образом, при фиксированном базисе $\{\partial/\partial x^i\}$ в пространстве V произведение $t \otimes s$ двух элементов $t^{i_1 \cdots i_p} \partial/\partial x^{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial/\partial x^{i_p} \in V^{(p)}$ и $s^{j_1 \cdots j_q} \partial/\partial y^{j_1} \otimes \ldots \otimes \partial/\partial y^{j_q} \in V^{(q)}$ имеет выражение в координатах

$$t^{i_1 \cdots i_p} s^{j_1 \ldots j_q} \partial/\partial x^{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial/\partial x^{i_p} \otimes \partial/\partial y^{j_1} \otimes \ldots \otimes \partial/\partial y^{j_q} \in V^{(p+q)}, \tag{1}$$

т.е. координатами $t \otimes s$ являются попарные произведения координат t и s.

5) Затем, снова по линейности, это умножение распространяется на неоднородные элементы из $V^{(\infty)}$, т.е. на конечные формальные суммы элементов из разных $V^{(k)}$.

Замечание и упражнение. Вообще, *тензорным произведением* $V_1 \otimes V_2$ двух векторных пространств V_1 и V_2 размерностей k_1 и k_2 называется пространство V размерности $k = k_1 k_2$ такое, что каждой паре базисов $\{e_i^1\}$ и $\{e_j^2\}$ сопоставляется базис $\{e_i^1 \otimes e_j^2\}$ вместе с билинейным отображением $\alpha : V_1 \oplus V_2 \to V_1 \otimes V_2$, которое паре (e_i^1, e_j^2) сопоставляет базисный элемент $e_i^1 \otimes e_j^2$. (Проверьте, что таким образом действительно получается билинейное отображение.) Введенное нами умножение для $V^{(p)}$ и $V^{(q)}$ и является таким билинейным отображением $\alpha : V^{(p)} \oplus V^{(q)} \to V^{(p+q)} = V^{(p)} \otimes V^{(q)}$.

Тензорное произведение двух векторных пространств оказывается *универсальным* в том смысле, что для каждого *билинейного* отображения $\beta : V_1 \oplus V_2 \to U$ найдется единственное *линейное* отображение $\lambda : V_1 \otimes V_2 \to U$, для которого $\lambda\alpha = \beta$.

Точнее говоря, оказываются естественно изоморфными два линейных пространства: пространство билинейных отображений $V_1 \oplus V_2 \to U$ и пространство линейных отображений $V_1 \otimes V_2 \to U$. В частности, пространство билинейных форм над V (т.е. билинейных отображений $V \oplus V \to \mathbb{R}$) оказывается *двойственным пространством* к $V \otimes V$. Мы дальше обобщим это утверждение на любую тензорную степень V.

Это утверждение, доказательство которого оставляется для векторных пространств в качестве упражнения, является по существу общим ("теоретико-категорным") *определением* тензорного произведения, которое прямо переносится, например, на абелевы группы и вообще в любую теорию ("категорию"), в которой определены прямые суммы и билинейные отображения. (Но перенос *определения* не означает, что тензорное произведение в такой категории обязано *существовать*.)

[Дадим решение этого упражнения в основном случае отображений в $\mathbb{R}$.

Пусть дано билинейное отображение $\beta : V \oplus V \to \mathbb{R}$. Пусть $\beta(e_i, 0) = c_i$ и $\beta(0, e_j) = c_j$. Тогда положим $\tilde{\beta}(e_i \otimes e_j) = c_i c_j$. Этим $\tilde{\beta}$ определено на базисных элементах $V \otimes V$; распространим его по линейности до линейного отображения $\tilde{\beta} : V \otimes V \to \mathbb{R}$.

Мы получили отображение $\beta \mapsto \tilde{\beta}$ пространства билинейных отображений $V \oplus V \to \mathbb{R}$ в пространство линейных отображений $V \otimes V \mapsto \mathbb{R}$. Полученное отображение, очевидно, линейно. Впрочем, проверьте это утверждение! Очевидно, оно также мономорфно. С другой стороны размерности обоих пространств равны n^2, значит, построенное отображение есть изоморфизм.]

2. Тензорные координатные преобразования.

Переход к новому базису в V сопровождается переходом к новым базисам во всех пространствах $V^{(k)}$. Базисы в пространствах $V^{(k)}$, построенные указанным способом по базисам в V, мы будем называть *тензорными*. Не любой базис будет тензорным.

Для нового базиса удобно использовать штрихованные индексы. Элементы матрицы перехода можно обозначить $c^{i'_1 \ldots i'_k}_{i_1 \ldots i_k}$, так что новые координаты $t^{i'_1 \cdots i'_k}$ элемента $t \in V^{(k)}$ выражаются через старые по формуле $c^{i'_1 \ldots i'_k}_{i_1 \ldots i_k} t^{i_1 \ldots i_k}$. Чтобы выразить $c^{i'_1 \ldots i'_k}_{i_1 \ldots i_k}$ через элементы $c^{i'}_i$ матрицы перехода в V, найдем выражение новых базисных элементов в старых координатах. За новые базисные элементы мы должны взять произведения базисных элементов $\partial/\partial x^{i'}$, чтобы наше произведение тензоров строилось по одному закону при любом исходном базисе в V.

Но $\partial/\partial x^{i'_1} \otimes \ldots \otimes \partial/\partial x^{i'_k} = c^{i_1}_{i'_1} \partial/\partial x^{i_1} \otimes \ldots \otimes c^{i_k}_{i'_k} \partial/\partial x^{i_k} = c^{i_1}_{i'_1} \cdot \ldots \cdot c^{i_k}_{i'_k} \partial/\partial x^{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial/\partial x^{i_k}$ и мы видим, что $c^{i_1 \ldots i_k}_{i'_1 \ldots i'_k} = c^{i_1}_{i'_1} \cdot \ldots \cdot c^{i_k}_{i'_k}$. При этом автоматически получается, что произведение базисных тензоров есть базисный тензор при любом базисе в V.

Иными словами, элементами матрицы перехода к новому базису в пространстве $V^{(k)}$ служат всевозможные произведения из k элементов матрицы $(c^i_{i'})$ перехода в V. Нужно только понять, как расположить эти элементы. Для этого нужно упорядочить базисные элементы $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}$. Мы договоримся, что порядок их алфавитный (его называют также "лексикографическим": элементы с первым сомножителем e_2 идут после элементов с первым сомножителем e_1, за ними идут элементы с первым сомножителем e_3 и т.д.; при фиксированном первом сомножителе сначала идут элементы со вторым сомножителем e_1 и т.д. и аналогично в новом базисе. Соответствующая матрица называется k-ой тензорной степенью матрицы $(c^i_{i'})$.

Вообще тензорным произведением двух матриц $A \otimes B$ порядков $p \times p$ и $q \times q$ называется матрица порядка $pq \times pq$, элементами которой служат всевозможные попарные произведения ab, где $a \in A$ и $b \in B$. Указанному порядку базисных элементов, отвечает расположение ее элементов следующим образом: каждый элемент b матрицы B заменяется на матрицу A с умножением каждого ее элемента на b. (Аналогично определяется и тензорное произведение прямоугольных матриц.)

Тензорное умножение матриц, очевидно, ассоциативно, но не коммутативно (напишите $A \otimes B$ и $B \otimes A$ для двух матриц порядка 2×2, чтобы понять, как отличаются эти матрицы-произведения).

Итак, $c_{i_1 \dots i_k}^{i'_1 \dots i'_k} = c_{i_1}^{i'_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k}^{i'_k}$ и

$$t^{i'_1 \dots i'_k} = c_{i_1}^{i'_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k}^{i'_k} t^{i_1 \dots i_k}. \tag{2}$$

Ясно, что если $C^{(p)}$ и $C^{(q)}$ — матрицы замены координат в $V^{(p)}$ и $V^{(q)}$, индуцированные заменой в V с матрицей C, то матрица замены в $V^{(p+q)}$ есть тензорное произведение $C^{(p)} \otimes C^{(q)}$, т.к. замена координат C индуцирует в каждом $V^{(k)}$ замену с матрицей, являющейся k-ой тензорной степенью $C^{\otimes k}$ матрицы C.

Замечания.

1. Мы получили правило замены координат в пространстве $V^{(k)}$, исходя из данного определения произведения тензоров и условия, что это определение не должно зависеть от выбора координатной системы в V. Возможен и противоположный путь: определить замены в пространствах $V^{(k)}$ по формуле (2) и затем определить произведение тензоров по формуле (1). После чего нужно доказать независимость произведения от выбора базиса в V. Так обычно и поступают в учебниках.

2. Сопоставление замене координат в V замены координат в $V^{(k)}$ дает гомоморфизм группы $GL(n, \mathbb{R})$ всех невырожденных матриц порядка $n \times n$ в группу $GL(n^k, \mathbb{R})$. Этот гомоморфизм называется *тензорным представлением* $GL(n, \mathbb{R})$ порядка k. Ясно, что далеко не любая линейная замена координат в $V^{(k)}$ может быть индуцирована таким образом заменой в пространстве V, т.е. не любая матрица в $GL(n^k, \mathbb{R})$ лежит в образе этого гомоморфизма. В самом деле, размерность группы $GL(n, \mathbb{R})$ равна n^2, а размерность $GL(n^k, \mathbb{R})$ — $n^k \times n^k$.

Исходную матрицу (c_j^i) преобразования координат в V будем также обозначать $(\partial x^{i'} / \partial x^i)$, т.к. в дальнейшем ее роль будет играть матрица Якоби координатного преобразования в касательной плоскости в точке какого-либо гладкого многообразия. Соответственно, индуцированное преобразование координат в $V^{(k)}$ будет иметь вид

$$t^{i'_1 \dots i'_k} = (\partial x^{i'_1} / \partial x^{i_1}) \ldots (\partial x^{i'_k} / \partial x^{i_k}) t^{i_1 \dots i_k}.$$

3. Двойственная алгебра.

Итак, мы построили алгебру $V^{(\infty)}$, умножение в которой, хотя и построено с помощью выбора базиса в V, от этого базиса не зависит, и для каждого базиса в V строится одинаково: произведение базисных элементов есть базисный элемент. Эта алгебра называется (верхней) *тензорной алгеброй* над пространством V, составляющие ее пространства $V^{(k)}$ – (верхними) *тензорными пространствами верхней валентности* k, а элементы пространства $V^{(k)}$ – (однородными) *тензорами верхней валентности* k (или *ранга* k). Неоднородные элементы V, т.е. формальные конечные суммы однородных тензоров разных валентностей называются просто (верхними) тензорами, но встречаться с ними приходится не часто.

Пространству V отвечает двойственное пространство той же размерности V^*, которое изоморфно V и $V^{**} = V$. Элемент $\alpha \in V^*$ есть линейная однородная функция на V, т.е. $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha(v_1) + \alpha(v_2)$ и $\alpha(cv) = c\alpha(v)$; вместо $\alpha(v)$ пишут также $\langle \alpha, v \rangle$. Двойственность между V и V^* определяет билинейное отображение $V \oplus V^* \to \mathbb{R}$.

Хотя, как известно, нет естественного изоморфизма (т.е. выделенного единственным образом и не зависящего от базисов) между пространствами V и V^*, каждому выбору базиса в V отвечает двойственный базис в V^*. Базис, двойственный базису $\{e_i = \partial/\partial x^i\}$ обозначается $\{dx^i\}$ или $\{e^i\}$, так что $\langle dx^i, \partial/\partial x^j \rangle = dx^i(\partial/\partial x^j) = \delta^i_j$.

Пространству V^* отвечает своя тензорная алгебра, которую мы обозначим $V_{(\infty)}$ и будем называть *нижней тензорной алгеброй* относительно V. Пространства $V^{*(k)}$ будем обозначать $V_{(k)}$ и элементы $V^{*(k)}$ будем называть *тензорами нижней валентности* k (относительно V). В частности, $V^* = V_{(1)}$. Базис в пространстве $V_{(k)}$, отвечающий базису $\{\partial/\partial x^i\}$ в V (и, значит, базису $\{dx^i\}$ в $V_{(1)}$), получает обозначение $\{dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k} = e^{i_1 \ldots i_k}\}$, а произвольный элемент из $V_{(k)}$ выражение $\alpha_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k} = \alpha_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1 \ldots i_k}\}$.

Наконец, *полной тензорной алгеброй* над V назовем тензорное произведение (см. замечание выше) $V^{(\infty)} \otimes V_{(\infty)}$. Она представляется прямой суммой всевозможных тензорных попарных произведений $V^{(p)}_{(q)} = V^{(p)} \otimes V_{(q)}$. В этих пространствах выбранному базису в V отвечают базисы, которые мы будем записывать в одной из трех форм:

$$\{e^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}\} = \partial/\partial x^{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial/\partial x^{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q}\}.$$

Произвольный элемент пространства $V^{(p)}_{(q)} = V^{(p)} \otimes V_{(q)}$ записывается как $t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \partial/\partial x^{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial/\partial x^{i_k} \otimes dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k}$. Размерность этого пространства равна $n^p n^q$, его элементы называются *смешанными тензорами* над V *смешанной валентности* (p, q), а общее число индексов $p + q$ называется их *рангом*.

После замены базиса в V (матрицу которой мы договорились обозначать $(c^{i'_r}_{i_s}) = (\partial x^{i'_r}/\partial x^{i_s})$) в каждом пространстве $V^{(p)}_{(q)}$ происходит замена с матрицей, являющейся тензорным произведением тензорных степеней матрицы J и матрицы $(J^{-1})^T$ (транспонирование учитывает суммирование по нижнему индексу). Таким образом, элемент этого пространства, имеющий в данном базисе координаты $t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$, в новом базисе получает выражение $t^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} \partial/\partial x^{i'_1} \otimes \ldots \otimes \partial/\partial x^{i'_k} \otimes dx^{i'_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i'_k}$, где

$$t^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1}{}'} \ldots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_q}{}'} \, t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}.$$

4. Интерпретация: полилинейные формы.

Тензоры из однородных пространств $V_{(l)}$ имеют естественную интерпретацию непосредственно в терминах пространства V (т.е. без обращения к V^*). Именно, элементы из $V_{(l)}$ отождествляются с полилинейными l-формами на пространстве V. Иначе говоря, с отображениями $V \oplus \cdots \oplus V \to \mathbb{R}$ (l сомножителей), которые линейны по каждому аргументу при фиксированных значениях остальных аргументов. Например, $V_{(1)} = V^*$ это пространство линейных форм на V. Пространство $V_{(2)}$ – это пространство билинейных форм, также хорошо известное из курса алгебры.

Докажем, что пространство $V_{(l)}$ естественно изоморфно пространству всех l-форм на V, которое обозначим $\tilde{V}_{(l)}$. Полилинейную l-форму из $\tilde{V}_{(l)}$ представим отображением

$\pi : V \oplus \ldots \oplus V \to \mathbb{R}$. Мы построим линейное отображение тензоров из $V_{(l)}$ на формы из $\tilde{V}_{(l)}$ и покажем, что таким путем будет установлен изоморфизм между этими пространствами. Именно, мы покажем, что размерности этих пространств совпадают (обе равны n^l) и что любая l-форма может быть получена нашим способом, т.е., что построенное отображение есть эпиморфизм. Тогда и ядро равно нулю, а отображение есть изоморфизм.

Во-первых, l-форма полностью определена своими значениями на упорядоченных наборах из l базисных элементов, и эти значения можно задавать произвольно. Таким образом, базисом в пространстве $\tilde{V}_{(l)}$ служат формы, которые равны 1 на одном из таких наборов и нулю на остальных. Но таких наборов имеется в точности n^l. Значит, $\dim \tilde{V}_{(l)} = \dim V_{(l)}$.

Во-вторых, по тензору из $V_{(l)}$ нам нужно построить l-форму. Это достаточно сделать для базисных тензоров (распространяя построение, как обычно, по линейности на остальные тензоры). Положим, по определению,

$$dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_l}(v_1, \ldots, v_l) = dx^{i_1}(v_1) \cdot \ldots \cdot dx^{i_l}(v_l)$$

и покажем, что каждая l-форма лежит в образе этого отображения. Достаточно показать, что базисные формы являются образами. Но форма, которая равна 1 на наборе $(\partial/\partial x^{i_1}, \ldots, \partial/\partial x^{i_l})$ и нулю на остальных, очевидно, служит образом базисного тензора $dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_l}$.

Мы отождествляем в дальнейшем пространства $V_{(l)}$ и $\tilde{V}_{(l)}$ посредством построенного изоморфизма. Заметим, что при этом изоморфизме соответствуют друг другу базисные элементы, отвечающие данному базису в V.

Итак, векторному пространству V^n мы сопоставили две последовательности векторных пространств: $V^{(k)}$ – верхних валентностей, и $V_{(k)}$ – нижних валентностей. Верхние пространства являются тензорными степенями пространства V, а нижние – с одной стороны тензорные степени V^*, а с другой они были представлены как пространства полилинейных форм на V. В силу симметрии $V = V^{**}$ верхние пространства также отождествляются с пространствами полилинейных форм на V^*.

5. Двойственность.

Сделаем еще один шаг и заметим, что двойственность между V и V^* продолжается до двойственности между пространствами $V^{(k)}$ и $V_{(k)}$, т.е тензоры из $V_{(k)}$ можно рассматривать как линейные формы на $V^{(k)}$ и наоборот.

Действительно, пусть α — k-линейная форма на V, т.е. $\alpha : V \oplus \cdots \oplus V \to \mathbb{R}$, рассматриваемая (в силу предыдущего) как элемент пространства $V_{(k)}$. Сопоставим ей линейное отображение $\bar{\alpha} : V^{(k)} \to \mathbb{R}$, которое определим на базисных элементах так: $\bar{\alpha}(\partial/\partial x^{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial/\partial x^{i_k}) = \alpha(\partial/\partial x^{i_1}, \ldots, \partial/\partial x^{i_k})$ и распространим дальше по линейности. Снова размерности двух пространств $\dim V_{(k)}$ и $\dim (V^{(k)})^*$ равны, причем базисные элементы $V_{(k)}$ переходят (как легко проверить) в элементы базиса, двойственного к отмеченному базису в $V^{(k)}$. Мы получили изоморфизм $V_{(k)}$ и $(V^{(k)})^*$.

При этом мы не только отождествили $V_{(k)}$ с $(V^{(k)})^*$, но и установили двойственность между базисами $\partial/\partial x^{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial/\partial x^{i_k}$ в $V^{(k)}$ и $dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}$ в $V_{(k)}$.

Замечание. Мы показали, что каждая полилинейная функция на V есть линейная функция на $V^{(k)}$, что находится в согласии с общекатегорным определением тензорного произведения (см. замечание выше), в нашем случае тензорной степени.

Примеры.

Тензоры ранга один это векторы (верхней валентности 1) и ковекторы (нижней валентности 1). Среди тензоров ранга 2 мы находим прежде всего хорошо знакомые из начального курса алгебры билинейные формы. Мы видели, что они имеют нижнюю валентность 2. Тензоры верхней валентности 2 (и ранга 2) это, конечно, тоже билинейные формы, но на двойственном пространстве V^*. Закон $B' = CBC^T$ изменения матрицы B билинейной формы (C — матрица, обратная к матрице $\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)$ замены координат, т.е. матрица замены базиса в V) согласуется с тензорной заменой: $b_{i'j'} = c_i^{i'} c_j^{j'} b_{ij}$. Транспонирование, обозначенное знаком ^{T}, отвечает суммированию по второму индексу, который нумерует столбцы.

Тензоры валентности $(1, 1)$ это линейные операторы в пространстве V (и также в пространстве V^*). Если мы возьмем базисный тензор $e_i \otimes e^j$ в $V \otimes V^*$ и применим его к вектору $v = (v^k)$, то получим вектор $v^j e_i$, т.е. вектор, i-ая координата которого равна v^j, а остальные нули. Это снова согласуется с матричным умножением (если нижний индекс нумерует столбцы, а верхний строки): в матрице (a_j^i) оператора A i-ая строка дает линейную форму α_i на векторах: $\alpha_i(v) = a_j^i v^j$, значение которой есть i-ая координата вектора $A(v)$. Тензорное преобразование $a_{j'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} a_j^i$ дает элементы матричного произведения $(J)(A)(J^{-1})^T$ (J — матрица замены координат, транспонирование отвечает суммированию по нижнему индексу).

Мы можем более общим образом рассматривать элемент смешанного тензорного пространства $V_{(q)}^{(p)}$ как линейное отображение пространства $V^{(p)}$ в пространство $V^{(q)}$. Рассмотрим для простоты базисный элемент $e_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}$. Его значение на тензоре $t \in V^{(p)}$ есть тензор $t^{i_1 \ldots i_p} e^{j_1 \ldots j_q} \in V^{(q)}$. Дальше распространяем по линейности.

6. Свертка.

Мы закончили построение тензорной алгебры $TV = V_{(\infty)}^{(\infty)}$ над конечномерным векторным пространством V. Она распадается в прямую сумму бесконечного числа подпространств $V_{(q)}^{(p)}$ (размерностей $n^p n^q$), среди которых выделяются однородные подпространства $V^{(p)} = V_{(0)}^{(p)}$ и $V_{(p)} = V_{(p)}^{(0)}$ попарно двойственные друг к другу. Очевидно, эта двойственность продолжается до двойственности между $V_{(q)}^{(p)}$ и $V_{(p)}^{(q)}$, в частности, пространства $V_{(p)}^{(p)}$ служат двойственными сами себе.

Кроме основных операций в алгебре TV — векторного и тензорного умножений, имеется еще одна полезная операция, которая называется *свертка*. Эта операция обобщает операцию взятия следа tr квадратной матрицы. Если a_j^i – тензор валентности (1,1), то след этой матрицы записывается как a_i^i (суммирование!) и это – инвариант, т.е. функция от координат тензора, значение которой не меняется при заменах базиса.

(Для большей ясности последующего проверим это известное свойство следа. Заметим, что $\frac{\partial x^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^j} = \delta_j^i$ и $tr(a_j^i) = \delta_i^j a_j^i$. Теперь: $tr(a_{j'}^{i'}) = \delta_{i'}^{j'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} a_j^i \underset{i'=j'}{=} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} a_j^i = \delta_i^j a_j^i = tr(a_j^i)$.)

Пусть теперь дан произвольный тензор $t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}$. Выделим два индекса – верхний r-ый и нижний s-ый (им отвечают в пространстве $V_{(q)}^{(p)}$ два тензорных сомножителя, изоморфные V). Фиксируя значения остальных индексов, мы получим матрицу порядка

$n \times n$ с элементами $t^{\dots i_r \dots}_{\dots j_s \dots}$. Возьмем след этой матрицы, т.е. выделим координаты тензора с $i_r = j_s$ и просуммируем. Получим число. Меняя теперь наборы остальных индексов, мы получим координаты $t^{i_1 \dots \bar{i}_r \dots i_p}_{j_1 \dots \bar{j}_s \dots j_q}$ нового тензора (валентности $(p-1, q-1)$; черточка означает отсутствие индекса). Это требует проверки (т.е., того, что замена этих чисел при замене базиса тензорная):

$$tr(t^{i'_1 \dots \bar{i}'_r \dots i'_p}_{j_1{}' \dots \bar{j}_s{}' \dots j'_q}) = \delta^{j'_s}_{i'_r} \cdot t^{i'_1 \dots i'_p}_{j_1{}' \dots j_q{}'} = \delta^{j'_s}_{i'_r} \cdot \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \dots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \cdot \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1}{}'} \dots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial x^{j_s}{}'} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_q}{}'} \, t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \overset{i'_r = j_s{}'}{=}$$

$$= \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \cdot \frac{\partial x^{j_s}}{\partial x^{i'_r}} \cdot \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \bar{i}_r \dots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \cdot \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1}{}'} \dots \bar{j}_s \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_q}{}'} \, t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} =$$

(черточка означает отсутствие сомножителя на данном месте, он перенесен в начало)

$$= \delta^{j_s}_{i_r} \cdot \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \bar{i}_r \dots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \cdot \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1}{}'} \dots \bar{j}_s \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_q}{}'} \, t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} =$$

$$= \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \bar{i}_r \dots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \cdot \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1}{}'} \dots \bar{j}_s \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_q}{}'} \, tr(t^{i_1 \dots \bar{i}_r \dots i_p}_{j_1 \dots \bar{j}_s \dots j_q}).$$

Эта операция $V^{(k)}_{(l)} \to V^{(k-1)}_{(l-1)}$, зависящая от выбора индексов для свертывания, часто используется. Например,

Замечание. Операция вычисления значения 1-формы α на векторе v представляется (в двойственных базисах) композицией двух тензорных операций: сначала берется тензорное произведение $(a^i_j) = (\alpha_j) \otimes (v^i)$, а затем свертка (след): $\langle \alpha, v \rangle = a^i_i = \alpha_i v^i$.

Упражнение. Найти ранг матрицы $(a^i_j) = (\alpha_j) \otimes (v^i)$. (Ответ: 1.)

Задача. Выразить через коэффициенты характеристического многочлена оператора с матрицей (c^i_j) величины c^i_i, $c^i_j c^j_i$, $c^i_j c^k_i c^j_k$ и т.д. (Это полезное упражнение на собственные числа, использующее свойства следа.)

Важные замечания.

1. Тензорная замена является линейной и однородной. Линейность состоит в том, что новые координаты выражаются линейно через первые степени старых координат (коэффициентами служат элементы тензорной степени матрицы Якоби). Однородность состоит в отсутствии свободного члена. Благодаря этому:

Утверждение. *Если в одном базисе тензор имеет все координаты нулевые, то то же будет и в других базисах.*

2. Тензорные замены в пространстве $V^{(k)}_{(l)}$ образуют подгруппу полной линейной группы $GL(n^{k+l}, \mathbb{R})$ всех линейных изоморфизмов этого пространства. Это связано с тем, что мы конструировали базис этого пространства по базису в V. Поэтому композиции замен базисов в V отвечает композиция замен в $V^{(k)}_{(l)}$ и обратной замене отвечает обратная замена. Таким образом мы имеем гомоморфизм (даже мономорфизм) $GL(n, \mathbb{R})$ в $GL(n^{k+l}, \mathbb{R})$. Поэтому если мы произвольным образом зададим координаты тензора в одной системе координат и перенесем их в каждую другую систему по тензорному правилу, то координаты во всех (тензорных) системах в $V^{(k)}_{(l)}$ будут связаны между собой тензорным законом преобразования. В частности, *в данной системе координат можно произвольно задать n^{k+l} чисел в качестве координат некоторого тензора.*

7. Обратный тензорный признак

Допустим, что в каждой системе координат задан набор из $n^p n^q$ чисел $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$. Как узнать, задан ли этим тензор? То-есть, преобразуются ли эти наборы по тензорному закону. Оказывается, имеет место следующий очень полезный признак, позволяющий получать ответ на этот вопрос.

Утверждение. *Если свертка данной величины с произвольным тензором определенного типа всегда дает тензор, то и данная величина есть тензор.*

Мы проверим это в простом случае для конкретности, но принцип будет ясен для общего случая (даже более общего, чем сказано).

Итак, пусть в каждой системе задан набор чисел $t^{i_1i_2}$ и пусть свертка его с любым тензором типа b^j_k дает тензор: $t^{i_1i_2}b^j_{i_2} = c^{i_1j}$. Покажем, что t есть тензор. (Предполагается, что данное равенство справедливо в каждой координатной системе.) Имеем:

$$t^{i'k'}b^{j'}_{k'} = c^{i'j'} = \partial x^{i'}/\partial x^i \cdot \partial x^{j'}/\partial x^j \cdot c^{ij} = \partial x^{i'}/\partial x^i \cdot \partial x^{j'}/\partial x^j \cdot t^{ik}\, b^j_k.$$

Но $b^{j'}_{k'} = \partial x^{j'}/\partial x^j \cdot \partial x^k/\partial x^{k'} \cdot b^j_k$, поэтому $\partial x^{k'}/\partial x^s \cdot b^{j'}_{k'} = \partial x^{j'}/\partial x^j \cdot \partial x^k/\partial x^{k'} \cdot \partial x^{k'}/\partial x^s \cdot b^j_k = \partial x^{j'}/\partial x^j \cdot \delta^k_s \cdot b^j_k$.

Оставляем только равенства с $k = s$: $\partial x^{k'}/\partial x^k \cdot b^{j'}_{k'} = \partial x^{j'}/\partial x^j \cdot b^j_k$. Значит,

$$t^{i'k'}\, b^{j'}_{k'} = \partial x^{i'}/\partial x^i \cdot \partial x^{k'}/\partial x^k \cdot t^{ik}\, b^{j'}_{k'}.$$

Переносим все в левую часть и выносим $b^{j'}_{k'}$ за скобку:

$$(t^{i'k'} - \partial x^{i'}/\partial x^i \cdot \partial x^{k'}/\partial x^k \cdot t^{ik})\, b^{j'}_{k'} = 0.$$

Т.к., по условию, b – произвольный тензор данного типа, его координаты в какой-либо системе координат мы можем выбрать любыми. Выберем их в новой системе так, что одна из координат (для какого-либо значения k') равна 1, а остальные нулевые. Соответствующие скобки окажутся равными нулю, и мы получим тензорный закон преобразования t:

$$t^{i'k'} = \partial x^{i'}/\partial x^i \cdot \partial x^{k'}/\partial x^k \cdot t^{ik}.$$

Примеры.

1. Покажем, что символ Кронекера δ^i_j (но не δ_{ij} !) есть тензор. Действительно, для любого вектора v^j имеем $\delta^i_j v^j = v^i$ – вектор. Применяем доказанный признак. (Конечно, нетрудно в данном случае, используя правило умножения матриц, провести прямую проверку: $\partial x^{i'}/\partial x^i \cdot \partial x^j/\partial x^{j'} \cdot \delta^i_j = \partial x^{i'}/\partial x^i \cdot \partial x^i/\partial x^{j'} = \delta^{i'}_{j'}$.)

2. Покажем, что матрица b^i_j, обратная к матрице тензора a^i_j (оператора), есть также матрица тензора. Действительно, для любого вектора v^k (тензора) $a^j_i v^i = u^j$ есть тензор (т.к. свертка есть тензорная операция), который можно считать произвольным, если матрица a невырожденная. Но $b^i_j u^j = b^i_j a^j_k v^k = \delta^i_k v^k = v^i$.

3. Если $A^r_{st}x^s y^t z_r$ – инвариант для любой тройки векторов x, y и ковектора z, то A есть тензор. (Т.е. полилинейная функция есть тензор — мы проверяли это выше для нижних тензоров.)

4. Линейный оператор в пространстве $V^{(p)}$ имеет запись $A^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_p} t^{j_1\ldots j_p} = s^{i_1\ldots i_p}$ и является тензором, т.к. переводит произвольный тензор из $V^{(p)}$ в тензор из этого же пространства.

- - - - - - - - - - - -

II. СИММЕТРИЧЕСКИЕ ТЕНЗОРЫ

1. Симметрии тензоров при перестановках индексов.

В пространстве тензоров данной валентности $V^{(p)}_{(q)}$ можно выделить различные подпространства, которые остаются инвариантными при тех или иных группах тензорных координатных замен в этих пространствах. Сами эти группы могут порождаться некоторыми подгруппами координатных замен в базисном пространстве V или определяться непосредственно по их действию на тензорные базисы (т.е. на те, которые определены выборами базисов в V).

В первой группе наиболее важной является группа ортогональных замен – ортогональное преобразование в пространстве V (относительно фиксированной в V метрики) порождает ортогональное преобразование в каждом векторном пространстве (относительно индуцированной метрики).

Мы рассмотрим здесь вторую группу симметрий.

Возьмем пространство однородной валентности, скажем $V^{(k)}$. Оно имеет фиксированное разложение в тензорное произведение k сомножителей изоморфных V:

$$V^{(k)} = V \otimes \cdots \otimes V,$$

причем эти сомножители имеют фиксированный порядок, так что можно было бы написать, например, так:

$$V^{(k)} = ({}_1V) \otimes ({}_2V) \otimes \cdots \otimes ({}_kV).$$

Поменяем порядок двух сомножителей, скажем, ${}_rV$ и ${}_sV$, получив пространство

$$\bar{V}^{(k)} = ({}_1V) \otimes \cdots \otimes {}_sV \otimes \ldots {}_rV \otimes \cdots \otimes \cdots \otimes ({}_kV)$$

вместо пространства

$$V^{(k)} = ({}_1V) \otimes \cdots \otimes {}_rV \otimes \ldots {}_sV \otimes \cdots \otimes \cdots \otimes ({}_kV).$$

Мы отождествляем эти пространства, считая, что мы изменяем базис в $V^{(k)}$, сохраняя базис в V. Именно, мы меняем местами базисные векторы s-ого и соответственные базисные векторы r-ого пространств.

(Т.е. базисные векторы будут те же, но их порядок в базисном репере поменяется. Например, если $\dim V = 2$ и его базис есть $\{e_1, e_2\}$, то репер пространства $V^{(3)}$ в алфавитном порядке до замены есть

$$e_1{\otimes}e_1{\otimes}e_1,\ e_1{\otimes}e_1{\otimes}e_2,\ e_1{\otimes}e_2{\otimes}e_1,\ e_1{\otimes}e_2{\otimes}e_2,\ e_2{\otimes}e_1{\otimes}e_1,\ e_2{\otimes}e_1{\otimes}e_2,\ e_2{\otimes}e_2{\otimes}e_1,\ e_2{\otimes}e_2{\otimes}e_2,$$

а после замены, меняя местами реперы второго и третьего сомножителей, получим репер в $V^{(3)}$:

$$e_1{\otimes}e_1{\otimes}e_1,\ e_1{\otimes}e_2{\otimes}e_1,\ e_1{\otimes}e_1{\otimes}e_2,\ e_1{\otimes}e_2{\otimes}e_2,\ e_2{\otimes}e_1{\otimes}e_1,\ e_2{\otimes}e_2{\otimes}e_1,\ e_2{\otimes}e_1{\otimes}e_2,\ e_2{\otimes}e_2{\otimes}e_2.$$

Заметим, что 4 вектора репера остались старыми, а две пары поменялись местами.)

Данный тензор $t \in V^{(k)}$ получит новые координаты $t^{i'_1 \ldots i'_r \ldots i'_s \ldots i'_k}$, отличающиеся от старых $t^{i_1 \ldots i_r \ldots i_s \ldots i_k}$ перестановкой r-ого и s-ого индексов: $t^{i'_1 \ldots i'_r \ldots i'_s \ldots i'_k} = t^{i_1 \ldots i_r \ldots i_s \ldots i_k}$, где

$i'_p = i_p$, если $p \neq r$ и $p \neq s$, и $i'_r = i_s$, $i'_s = i_r$. Можно встать на двойственную точку зрения и говорить о преобразовании пространства $V^{(k)}$ (т.е. изоморфном отображении на себя), меняющего местами два координатных сомножителя, и тогда рассматривать соотношение между координатами тензора и его образа. Мы чаще будем использовать этот второй подход. Тензор, в который переходит тензор t при перестановке σ множества индексов, будем обозначать через σt или, иногда $t^{(\sigma)}$. (Заметим еще раз, что когда мы говорим о перестановках индексов, это означает перестановку двух сомножителей ${}_iV$ в тензорной степени V.)

Все перестановки индексов образуют группу из $k!$ элементов, и для каждого тензора получается $k!$ тензоров (или, двойственно, порождается $k!$ наборов координат в разных базисах). Как мы видели, некоторые из наборов могут совпадать, если соответствующие координаты оказываются равными. Например, если нам дана симметрическая матрица, то при перестановке индексов координаты соответствующего тензора t_{ij} не меняются (или, двойственно, тензор совпадает со своим образом). Но нам важно, чтобы этот факт не зависел от замены координат в базисном пространстве V. Поэтому мы можем рассматривать симметрическую матрицу как матрицу билинейной формы (t_{ij}), но не как матрицу оператора t^i_j, т.к. во втором случае двум индексам отвечают различные преобразования при замене координат в V, и симметрия будет нарушаться при преобразованиях.

Итак, мы хотим рассматривать тензоры, не меняющиеся при перестановках индексов (мы становимся на вторую точку зрения). Возможно также рассматривать случаи, когда тензоры при перестановках индексов меняются по определенному закону. Простой такой случай мы рассмотрим позже.

2. Определение симметрических тензоров.

Рассмотрим все тензоры в $V^{(k)}$, которые не меняются при всех перестановках индексов (т.е. сомножителей ${}_iV$). Они, очевидно, образуют линейное подпространство в $V^{(k)}$, которое не зависит от выбора базиса в V (в самом деле, отображение каждого сомножителя ${}_iV$ на другой сомножитель определено их отождествлением с пространством V и, значит, друг с другом; при этом замена координат в обоих ("верхних") пространствах происходит по тому же самому закону).

Мы обозначим это подпространство $S^{(k)}(V)$; тензоры, входящие в $S^{(k)}(V)$, называются *симметрическими.*

Если рассмотреть все перестановки индексов, то из каждого тензора получается $k!$ тензоров (некоторые из которых могут совпадать, если некоторые координаты тензора совпадают). Если сложить все эти тензоры, то получится, очевидно, симметрический тензор. Это отображение $V^{(k)} \to S^{(k)}(V)$, очевидно, линейно. Если мы начнем с уже симметрического тензора, то в результате он умножится на $k!$, т.к. все образы совпадают. Если, поэтому, включить в определение деление на $k!$, то симметрические тензоры будут отображаться сами в себя, т.е. эта операция, обозначим ее $Sym(t)$ или $s(t)$, будет *проекцией.* Это значит, что $Sym(Sym(t)) = Sym(t)$. Ее называют *симметрированием* тензора. Иногда вместо $s(t)$ пишут t^s.

(Вообще, отображение в математике называют проекцией (или *ретракцией* или еще идемпотентным отображением), если оно удовлетворяет уравнению $s^2 = s$, что равносильно тому, что это есть отображение на подмножество, на котором оно тождественно. Проверьте последнее утверждение самостоятельно.)

Итак, для тензора t с координатами $t^{i_1\dots i_k}$:

$$t^s = \frac{1}{k!}\sum_{(i_1\dots i_k)}\sum_{\sigma} t^{i_1\dots i_k} e_{\sigma(i_1\dots i_k)} = \frac{1}{k!}\sum_{(i_1\dots i_k)}\sum_{\sigma} t^{i_1\dots i_k} e_{\sigma(i_1)}\otimes\dots\otimes e_{\sigma((i_k))},$$

здесь суммирование происходит по всем перестановкам σ индексов и по всем наборам по k индексов.

3. Выбор базиса.

Построим теперь базис подпространства симметрических тензоров. применив операцию s симметрирования к тензору t, записанном в обычном базисе $V^{(k)}$, мы автоматически получим разложение тензора $s(t)$ по симметрическим тензорам, но возникает вопрос, куда отнести деление на $k!$ – к коэффициентам (координатам в симметрическом базисе) или к базисным элементам.

Например, возьмем пространство $V^{(2)}$ для двумерного V. Элементы базиса в $V^{(2)}$ мы обозначаем в алфавитном порядке e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}. Тогда

$$\begin{aligned} t &= t^{11}e_{11} + t^{12}e_{12} + t^{21}e_{21} + t^{22}e_{22} \\ s(t) &= \tfrac{1}{2}(2t^{11}e_{11} + t^{12}(e_{12}+e_{21}) + t^{21}(e_{21}+e_{12}) + 2t^{22}e_{22}) = \\ &= t^{11}e_{11} + \tfrac{t^{12}+t^{21}}{2}(e_{12}+e_{21}) + t^{22}e_{22}. \end{aligned}$$

Спрашивается, куда отнести двойку в знаменателе во втором члене? Мы отнесем ее к координате, т.е. будем считать базисными векторами e_{11}, $e_{12}+e_{21}$, e_{22}, а координатами t^{11}, $\frac{t^{12}+t^{21}}{2}$, t^{22}. (Можно было бы за базисные элементы взять образы базисных тензоров в $V^{(k)}$ при симметрировании (например, e_{11} и $1/2(e_{12}+e_{21})$ в $V^{(2)}$).)

В общем случае, как легко проверить, при симметрировании базисного тензора $e = e^{i_1\dots i_k}$, в который индекс 1 входит k_1 раз, 2 – k_2 раза, …, n – k_n раз ($\sum k_i = k$), получится тензор $s(e) = cf$, где f есть сумма базисных тензоров, полученных из e всеми перестановками, но взятых только по одному разу, а c есть величина, обратная “полиномиальному коэффициенту”, т.е. $c = \frac{k_1!\cdot\ldots\cdot k_n!}{k!}$ (напомним, что $0! = 1$). Действительно, для каждого слагаемого в f получится еще $k_1!\cdot\ldots\cdot k_n!$ таких же слагаемых перестановками совпадающих индексов.

Мы видим, что естественный базис в $S^{(k)}(V)$ получается из базиса в $V^{(k)}$ сложением базисных элементов, получаемых перестановками индексов, но без повторений и без делений. Точнее говоря, нужно сложить элементы, входящие в одну *орбиту* под действием группы перестановок. Эти суммы, разумеется, линейно независимы и любой симметрический элемент, согласно нашему построению, выражается через них.

Скажем, возьмем базисный тензор $e_{131531} = e_1\otimes e_3\otimes e_1\otimes e_5\otimes e_3\otimes e_1$. У него только одна ненулевая координата $t^{131531} = 1$. Допустим, размерность V равна 5 и мы расматриваем пространство $V^{(6)}$. Беря все перестановки 6 индексов, мы получим из этого базисного элемента всего 720 (тоже базисных) элементов. Но, в частности, имеется 6 перестановок, которые оставляют на месте индексы с номерами 2,4,5, и эти базисные элементы совпадают с данным e_{131531}. Но если мы сделаем другую перестановку, то получим элемент также совпадающий с шестью другими элементами. Значит, мы можем вынести 6=3! за скобку и в скобке останется 120 элементов. Но точно так же эти оставшиеся элементы разобьются на пары, т.к. имеется еще два совпадающих индекса. Таким образом, при симметрировании e_{131531} получится тензор вида $\frac{3!2!}{6!}T$, где T есть сумма 60 базисных тензоров, причем никакие два из них не получаются перестановкой троек между собой или единиц между собой. Ясно, что чтобы определить эту сумму, нам достаточно знать, что индекс 1 входит три раза, 3 два раза, а остальные по одному. В общем случае, чтобы написать такую скобку, полученную при симметрировании базисного тензора, нам достаточно знать, сколько раз входит в него каждый такой индекс. Поэтому мы можем обозначить такую скобку выражением $e_1^{k_1}e_2^{k_2}\dots e_n^{k_n}$. Здесь n — размерность V, $0 \le k_i \le n$ и сумма показателей k_i равна валентности k нашего пространства (т.е. числу индексов). Ясно, что сомножители с $k_i = 0$ можно не писать. Таким образом, в качестве элементов базиса в $S^p(V)$ мы берем не образы базисных тензоров при симметрировании, а более простую сумму базисных элементов V^p, без факториалов.

Утверждение. *Размерность пространства $S^{(k)}(V)$ равна $C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$.*

Действительно. Поскольку базисные элементы не меняются при перестановке индексов, мы можем, как сказано, каждый из них взаимно однозначно представить выражением $(\partial/\partial x^1)^{k_1}(\partial/\partial x^2)^{k_2}\dots(\partial/\partial x^n)^{k_n}$, где $\Sigma k_i = k$ и k_i – целые, $k_i \ge 0$. Возьмем ряд из $n+k$ палочек и сопоставим такой записи выбор n палочек: на k_1+1-ом месте, на k_1+k_2+2-ом, ..., на $(k+n)$-ом месте. Заметим, что последняя палочка выбирается всегда на последнем месте, так что происходит выбор $n-1$ палочки из $n+k-1$ палочек. Это сопоставление, очевидно, взаимно однозначно, так что имеется ровно $C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$ базисных элементов, т.е. $\dim S^{(k)}(V) = C_{n+k-1}^k$. □

(Заметим, что, в силу симметрии частного дифференцирования, базисных элементов в $S^{(k)}(V)$ столько же, сколько частных производных порядка k от функции n переменных, которых, значит, тоже C_{n+k-1}^k .)

4. Симметрическая алгебра.

Прямая сумма пространств $S(V) = \oplus S^{(k)}(V),\ 0 \le k,\ S^{(0)} = \mathbb{R}$, образует алгебру с коммутативным умножением, которое возникает из композиции операций тензорного умножения и симметрирования. Т.к. обе эти операции не зависят от выбора базиса в V, то это верно и для их композиции. На самом деле, мы должны несколько подправить это определение умножения в $S^{(p)}$, т.к. при таком простом определении получится, что произведение базисных элементов из $S^{(p)}$ и $S^{(q)}$ не совпадает с базисным элементом из $S^{(p+q)}$, как мы пожелали выше. Мы разберем аналогичную проблему ниже для кососимметрической алгебры (где проблема несколько проще). Мы просто переопределим умножение, задав его на базисах: произведение базисных элементов получается по знакомому из школы правилу умножения одночленов (показатели при одинаковых e_i складываются). Это умножение мы не будем отмечать особым знаком, просто, как для обычных одночленов, приписывая один к другому. Ясно, что это умножение коммутативно.

Упражнение. Найти коэффициент c в равенстве $Sym(e \otimes f) = cSym(e)Sym(f)$, где e и f – два базисных элемента, а Sym – операция симметрирования.

Полученное умножение обладает всеми свойствами алгебры многочленов с вещественными коэффициентами и может быть отождествлено с этой алгеброй при фиксированном базисе в V. Элементы этого базиса играют роль переменных для алгебры многочленов.

Замечания.

1. *Тензорную* верхнюю $V^{(\infty)}$ (и также нижнюю $V_{(\infty)}$) алгебру при фиксированном базисе иногда называют *алгеброй некоммутативных многочленов*.

2. Благодаря симметрии частного дифференцирования, мы можем отождествить симметрическую алгебру с алгеброй дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, где сложение имеет обычный смысл, а под умножением понимается композиция дифференциальных операторов (элемент этой алгебры есть линейная комбинация производных: $\sum\limits_{i_1+\dots+i_n=k} \frac{c_{i_1\dots i_n}\partial^k}{(\partial x_1)^{i_1}\dots(\partial x_n)^{i_n}}$, $0 \le i_s \le k$, $c_{i_1\dots i_n}$ – постоянные).

3. Симметрирование двойственного пространства $V_{(k)}$ дает пространство $S_{(k)}(V^*)$, которое, разумеется, можно отождествить с пространством сопряженным к $S^{(k)}(V)$. Однако, эту двойственность можно ввести по разному. Можно сохранить тензорную двойственность, т.е. просто рассматривать симметрические тензоры как элементы тензорных пространств. Но в этом случае построенные нами базисы не будут сопряженными, что важно (поскольку сопряженностью базисов определяется скалярное произведение, для которого эти базисы будут ортонормированными). Поэтому двойственность определяется просто объявлением построенных нами базисов сопряженными.

Как двойственность симметрических тензоров будет связана с тензорной двойственностью, установить нетрудно, что оставляется в качестве простого упражнения.

4. Симметрирование смешанных тензоров не имеет смысла, т.к. при замене базиса в V смешанные симметрические тензоры могут оказаться не симметричными.

III КОСОСИММЕТРИЧЕСКИЕ ТЕНЗОРЫ И ВНЕШНЯЯ АЛГЕБРА

1. Определение.

Кососимметрическим (или кософкоммутативным) тензором называется тензор, остающийся инвариантным при перестановке индексов, сопровождаемой изменением знака в согласии с четностью перестановки σ (т.е. умножением на $(-1)^\sigma = 1$, если σ четна и $= -1$, если она нечетна). Подпространство кососимметрических тензоров в $V^{(k)}$ обозначим $\Lambda^{(k)}$, а в $V_{(k)}$ соответственно $\Lambda_{(k)}$. В дальнейшем большее значение для нас будут иметь нижние подпространства. Их элементы называются также *внешними k-формами* (или просто k-формами). Элементы верхних подпространств называются *k-векторами.*

Напомним, что перестановке индексов отвечает изоморфизм пространства $V^{(k)}$, определенный перестановкой базисных сомножителей, изоморфных V. Произведя все перестановки индексов для данного $V^{(k)}$ и просуммировав со знаком, как было только что сказано, мы получим из данного тензора $t^{i_1\dots i_k} \in V^{(k)}$ новый тензор, который уже будет кососимметрическим. Чтобы при такой операции кососимметрические тензоры переходили в себя, мы, как и в симметрическом случае, должны разделить сумму на $k\,!$. Таким образом, эта операция (суммирование со знаком и с делением на $k!$), как и операция Sym является проекцией. Эту проекцию мы обозначим Alt : $V^{(k)} \to \Lambda^{(k)}$. Она называется *альтернированием.* Аналогично получаем Alt : $V_{(k)} \to \Lambda_{(k)}$. Alt$(t)$ будем обозначать также t^a.

Например, из тензора $t = a\ dx \otimes dy + b\ dx \otimes dz + c\ dy \otimes dx + f\ dy \otimes dy \in V_{(2)}$ над пространством V^3 с базисом $\{dx, dy, dz\}$ получается кососимметрический тензор

$$\begin{aligned} t^a = 1/2[&(a\ dx \otimes dy - a\ dy \otimes dx) + (b\ dx \otimes dz - b\ dz \otimes dx) + \\ &(c\ dy \otimes dx - c\ dx \otimes dy) + (f\ dy \otimes dy - f\ dy \otimes dy)] = \\ &= (a-c)\tfrac{(dx \otimes dy - dy \otimes dx)}{2} + b\tfrac{(dx \otimes dz - dz \otimes dx)}{2}. \end{aligned}$$

Альтернирование смешанных тензоров не имеет смысла, т.к. для них операция альтернирования, как и симметрирования, вообще говоря, не инвариантна относительно замены базисов.

2. Выбор базисов.

В общем случае образом базисного тензора $e^{i_1 \dots i_k} = dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}$ является тензор

$$\omega^{i_1 \dots i_k} = \frac{1}{k!} \Sigma (-1)^\sigma dx^{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes dx^{\sigma(i_k)}$$

($(-1)^\sigma$ означает ± 1 в зависимости от четности перестановки σ). Если базисный элемент содержит два одинаковых индекса, то при альтернировании он обратится в нуль. В силу того, что элементы $\omega^{i_1 \dots i_k}$ инвариантны при перестановках индексов с умножением на -1 для нечетных перестановок, такой элемент полностью определяется набором индексов с условием $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.

Заметим, что, во-первых, любой кососимметрический тензор выражается через $\omega^{i_1 \dots i_k}$. Чтобы это увидеть, достаточно применить альтернирование к записи данного кососимметрического k-тензора в тензорном базисе. Тензор не изменится, а эта запись перейдет в линейную комбинацию форм $\omega^{i_1 \dots i_k}$.

Во-вторых, эти формы линейно независимы. В самом деле, в линейную комбинацию $\Sigma c_{i_1 \dots i_k} \omega^{i_1 \dots i_k}$ (где формы $\omega^{i_1 \dots i_k}$ не повторяются) каждый тензор из базиса в $V^{(k)}$ войдет не более раза, а ненулевые коэффициенты $c_{i_1 \dots i_k}$ сохранятся. В таком случае, если данная комбинация равна нулевому тензору, то мы получим нулевую, но нетривиальную комбинацию базисных тензоров (с не равными нулю коэффициентами), чего быть не может.

Однако, при выборе базисных элементов в пространстве $\Lambda_{(k)}$ возникает двусмысленность (которая часто не отмечается в учебниках). Как нужно рассматривать коэффициент $1/k!$? Можно поступит двояко:

1. Либо принять, что базис состоит из форм $\omega^{i_1 \dots i_k}$, т.е. включить коэффициент $1/k!$ в базисный элемент.

2. Либо считать $1/k!$ *координатой* образа и взять за базисные элементы в $\Lambda_{(k)}$ проальтернированные канонические базисные элементы в $V_{(k)}$, но без деления на факториал, т.е., $k! \operatorname{Alt}(dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k}) = k!\, \omega^{i_1 \dots i_k} = \Sigma(-1)^\sigma dx^{\sigma(i_1)} \otimes \ldots \otimes dx^{\sigma(i_k)}$.

В первом случае для данного тензора t с координатами (в тензорном базисе в $V_{(k)}$) $t_{i_1 \dots i_k}$ координаты формы $t^a = \operatorname{Alt}\,(t) = \varphi$ будут получаться альтернированием, но без деления на $k!: \varphi_{i_1 \dots i_k} = \sum_\sigma (-1)^\sigma t_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k)}),\ i_1 < \dots < i_k$.

Во втором случае координаты φ будут получаться альтернированием из $t_{i_1 \dots i_k}$ с делением на $k!: \varphi_{i_1 \dots i_k} = \frac{1}{k!} \sum_\sigma (-1)^\sigma t_{\sigma(i_1) \dots (i_k)}),\ i_1 < \dots < i_k$.

Обычно принимают второй путь (мы так и поступим): считается, что при альтернировании на $k!$ делятся координаты, и за базисные формы в пространстве $\Lambda_{(k)}$ принимают формы $k!\, \omega^{i_1 \dots i_k} = \Sigma_\sigma (-1)^\sigma dx^{\sigma(i_1)} \otimes \ldots \otimes dx^{\sigma(i_k)}$ с условием $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.

Рассмотрим, как в $\Lambda_{(*)} = \sum_k \Lambda_{(k)}$ вводится умножение. Мы будем требовать, чтобы произведение базисных элементов было базисным элементом. Это умножение будет называться *внешним* и обозначаться значком $\wedge$, а полученная алгебра будет называться — *внешней алгеброй.*

3. Внешняя алгебра $\Lambda_{(*)} = \sum_k \Lambda_{(k)}$

Проще всего определить умножение $\alpha \wedge \beta$ как композицию тензорного умножения и альтернирования. Иначе говоря, нужно рассмотреть сомножители $\alpha \in \Lambda_{(p)}$ и $\beta \in \Lambda_{(q)}$ как тензоры из $V_{(p)}$ и $V_{(q)}$, соотв., умножить их сначала тензорно с результатом в $V_{(p+q)}$ и применить к результату операцию Alt. Например, умножим (считая для удобства, что $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$) две формы $\omega^{i_1 i_2}$ и $\omega^{i_3 i_4}$ из $\Lambda_{(2)}$:

$$[\mathrm{Alt}(dx^{i_1} \otimes dx^{i_2})] \bigwedge [\mathrm{Alt}(dx^{i_3} \otimes dx^{i_4})] = \mathrm{Alt}\left[\frac{1}{2!}(dx^{i_1} \otimes dx^{i_2} - dx^{i_2} \otimes dx^{i_1}) \bigotimes \right.$$

$$\left. \bigotimes \frac{1}{2!}(dx^{i_3} \otimes dx^{i_4} - dx^{i_4} \otimes dx^{i_3})\right].$$

Раскрывая скобки, мы получим 2!2! слагаемых (в общем случае их было бы $p!q!$), альтернирование которых во всех 4 случаях даст одно и то же:

$$\frac{1}{(2+2)!2!2!}\Sigma_\sigma (-1)^\sigma dx^{\sigma(i_1)} \otimes dx^{\sigma(i_2)} \otimes dx^{\sigma(i_3)} \otimes dx^{\sigma(i_4)}$$

и их сумма даст $\omega^{i_1 i_2 i_3 i_4}$.

В общем случае мы получим:

$$\omega^{i_1 \dots i_p} \wedge \omega^{j_1 \dots j_q} = \omega^{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q}.$$

Но приняв за базисные векторы $k!\,\omega^{i_1, \dots i_k}$, мы получим, что, например:

$$\mathrm{Alt}\left[(dx^{i_1} \otimes dx^{i_2} - dx^{i_2} \otimes dx^{i_1}) \bigotimes (dx^{i_3} \otimes dx^{i_4} - dx^{i_4} \otimes dx^{i_3})\right],$$

дает 4=2 ! 2 ! одинаковых слагаемых $\frac{1}{(2+2)!} \Sigma_\sigma (-1)^\sigma dx^{\sigma(i_1)} \otimes dx^{\sigma(i_2)} \otimes dx^{\sigma(i_3)} \otimes dx^{\sigma(i_4)}$, тогда $2\,!\,\omega^{i_1 i_2} \wedge 2\,!\,\omega^{i_3 i_4} = \frac{(2+2)\,!}{C^2_{2+2}} \omega^{i_1 i_2 i_3 i_4}$ и в общем случае при том же определении внешнего произведения получаем:

$$p\,!\,\omega^{i_1 \dots i_p} \wedge q\,!\,\omega^{j_1 \dots j_q} = \frac{1}{C^p_{p+q}}(p+q)!\,\omega^{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q}.$$

В этом случае произведение базисных элементов дает базисный элемент, умноженный на коэффициент $\frac{1}{C^p_{p+q}}$, а мы хотели бы, чтобы произведение базисных элементов было базисным элементом. Мы могли бы исправить положение, иначе определив операцию альтернирования, но тогда она перестала бы быть проекцией, т.е. альтернирование кососимметрических тензоров не оставляло бы их инвариантными, а инвариантность важнее.

Но мы можем также исправить положение, *иначе определив операцию умножения в* $\Lambda_{(*)}$: для p-формы α и q-формы β *определим* $\alpha \wedge \beta = \frac{(p+q)!}{p!q!}\mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta) = C^p_{p+q}\mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta)$. *Именно такое определение внешнего умножения мы и принимаем в дальнейшем.*

При этом, если за базисные элементы в $\Lambda_{(k)}$ взять проальтернированные базисные элементы из $V_{(k)}$ без деления на $k\,!$, то их внешние произведения оказываются снова базисными элементами. Координаты $\varphi_{i_1 \dots i_k}$ формы $\varphi = \mathrm{Alt}\ t$ получаются из координат $t_{i_1 \dots i_k}$ альтернированием с делением на $k\,!$, т.е. координаты Altφ в пространстве $\Lambda_{(k)}$ равны $\varphi_{i_1 \dots i_k} = \frac{1}{k\,!} \sum_\sigma (-1)^\sigma t_{i_1 \dots i_k}$. Повторим еще раз:

– За базис в пространстве $\Lambda_{(k)}$ мы принимаем элементы $k\,!\,\omega^{i_1\dots i_k}$ с условием $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$, т.е. $\sum_\sigma (-1)^\sigma dx^{\sigma(i_1)} \wedge \ldots \wedge dx^{\sigma(i_k)}$.

– внешнее произведение p-формы α и q-формы β есть, по нашему определению, $\frac{(p+q)!}{p!q!}\mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta) = C^p_{p+q}\mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta)$;

– внешнее произведение базисных элементов оказывается базисным элементом, т.е. $p\,!\,\omega^{i_1\dots i_p} \wedge q\,!\,\omega^{j_1\dots j_q} = (p+q)!\,\omega^{i_1\dots i_p j_1\dots j_q}$;

– каждый базисный элемент есть внешнее произведение базисных элементов ранга 1, т.е. мы можем обозначить его как $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$.

– координаты формы $\varphi = \mathrm{Alt}\ t = t^a$ в указанном базисе в $\Lambda_{(k)}$ получаются из тензорных координат формы t альтернированием, т.е., $\varphi_{i_1\dots i_k} = \frac{1}{k!}\sum_\sigma (-1)^\sigma t_{i_1\dots i_k}$.

Итак, в алгебре $\Lambda_{(*)}$ мультипликативными образующими являются базисные элементы $dx^i \in V_*$, их произведения задают в каждом $\Lambda_{(k)}$ базисные элементы этого векторного пространства (с точностью до умножения на -1).

Внешняя алгебра не коммутативна, но *кососкоммутативна*. Это значит, что при перестановке однородных сомножителей (т.е. элементов разных $\Lambda_{(k)}$) может измениться знак: элементы четной валентности перестановочны с каждым элементом, а при перестановке элементов нечетной валентности меняется знак. (При перестановке неоднородных сомножителей изменение становится существенно сложнее.)

Действительно, однородный элемент из $\Lambda_{(k)}$ представляется суммой одночленов. Перестановку в произведении двух одночленов степеней p и q можно осуществить, последовательно переставляя соседние пары базисных элементов dx^i. При этом число таких перестановок равно произведению pq степеней одночленов (так как каждый базисный сомножитель dx^i одного нужно переставить со всеми сомножителями другого). Отсюда ясно, что после перестановки двух одночленов произведение умножится на $(-1)^{pq}$:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-)^{pq}\omega_2 \wedge \omega_1.$$

Знак не меняется, если и только если степень одного из сомножителей четна (или произведение нулевое).

Итак, мы построили ассоциативную и кососкоммутативную алгебру $\Lambda_{(*)} = \overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} \Lambda_{(k)}$. Ее элементами служат кососимметрические тензоры в $V_{(*)}$, при этом мы определили операцию Alt, которая проектирует $V_{(*)}$ на $\Lambda_{(*)}$. За базис в $\Lambda_{(k)}$ мы взяли образы базисных элементов в $V_{(k)}$ при отображении $k!\,\mathrm{Alt}$. Мы определили операцию умножения однородных форм степеней p и q в $\Lambda_{(*)}$ как композицию $\frac{(p+q)!}{p!q!}\mathrm{Alt}(\otimes)$. При этом оказывается, что произведение базисных элементов есть базисный элемент, и все базисные элементы являются произведениями элементов базиса $\{dx^i\}$. Мы, следовательно, можем просто определить алгебру $\Lambda_{(*)}$ абстрактно, без обращения к объемлющему тензорному пространству $V_{(*)}$, как алгебру с образующими dx^i, подчиненную лишь соотношениям косого коммутирования: $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$ (в частности, $dx^i \wedge dx^i = 0$). Это — *свободная* кососкоммутативная алгебра с n свободными (мультипликативными) образующими.

В координатной (тензорной) записи эти факты имеют следующее выражение:

$$(\mathrm{Alt}\,\alpha)_{i_1\dots i_k} = \frac{1}{k!}\sum_\sigma (-1)^\sigma \alpha_{\sigma(i_1\dots i_k)}$$

$$(\alpha^p \wedge \beta^q)_{i_1\ldots i_{p+q}} = \sum_\sigma \frac{(-1)^\sigma}{p!q!}\alpha_{\sigma(i_1\ldots i_p}\beta_{i_{p+1}\ldots i_{p+q})}.$$

(В этой записи подразумевается, что суммирование справа происходит по всем перестановкам данных $p+q$ индексов и при каждой перестановке первые p относятся к α, а остальные к β.)

Мы, таким образом, получили простую структуру алгебры $\Lambda_{(*)}$ за счет того, что базисные элементы в $\Lambda_{(*)}$ получаются из тензорного базиса проектированием Alt с дополнительным умножением на $k!$, а умножение в $\Lambda_{(*)}$ получается из тензорного умножения альтернированием с дополнительным умножением на $\frac{(p+q)!}{p!q!}$.

Замечание. Отметим, наконец, что каждый кососимметрический тензор α имеет два набора координат: как элемент пространства $V_{(k)}$ в базисе $e^{i_1\cdots i_k}$ и как элемент $\Lambda_{(k)}$ в базисе $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$. При альтернировании одночлен $c\, e^{i_1\cdots i_k}$ переходит в одночлен $\frac{1}{k!}c\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, а одночлен $b\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \in \Lambda_{(k)}$, рассматриваемый как элемент $V_{(k)}$, становится многочленом $\sum\limits_\sigma (-1)^\sigma b\, e^{\sigma(i_1)\ldots\sigma(i_k)}$, суммирование по всем перестановкам индексов, $(-1)^\sigma$ – знак четности перестановки σ: плюс если она четна и минус, если нечетна. Координаты k-формы $\alpha \in \Lambda_{(k)}$ как элемента $V_{(k)}$ мы называем *тензорными координатами* этой формы.

4. Верхняя внешняя алгебра и двойственность

Аналогично $\Lambda_{(*)}$ строится и верхняя внешняя алгебра $\Lambda^{(*)} = \sum_{k=0}^n \Lambda^{(k)}$, $\Lambda^{(0)} = \mathbb{R}$: умножение определяется как композиция тензорного произведения и альтернирования результата с дополнительным умножением на $\frac{(p+q)!}{p!q!}$. Базисные элементы в $\Lambda^{(k)}$ записываются как внешние произведения элементов базиса в V: $\partial/\partial x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \partial/\partial x^{i_k}$, координаты $w^{i_1\cdots i_k}$ в $\Lambda^{(k)}$ проальтернированного тензора $w = \mathrm{Alt}\ t$ получаются из $t^{i_1\cdots i_k}$ с делением на $k!$: $w^{i_1\cdots i_k} = \frac{1}{k!}\sum_\sigma (-1)^\sigma t^{\sigma(i_1)\ldots\sigma(i_k)}$.

Элементы $\Lambda^{(k)}$ называются *k-векторами*, а однородные одночлены $v_1\wedge\cdots\wedge v_k$, $v_i \in V$ называются *простыми или разложимыми* k-векторами.

Пространства $\Lambda^{(k)}$ двойственны пространствам $\Lambda_{(k)}$. Если определить эту двойственность через наследование двойственности между $V^{(k)}$ и $V_{(k)}$, то построенные нами базисы *не* будут двойственными.

В самом деле, рассмотрим, например, значение базисного нижнего кососимметрического тензора валентности 2 на базисном верхнем кососимметрическом тензоре:

$$\begin{aligned}&dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}(\partial/\partial x^{i_1} \wedge \partial/\partial x^{i_2}) = \\ &= (dx^{i_1} \otimes dx^{i_2} - dx^{i_2} \otimes dx^{i_1})(\partial/\partial x^{i_1} \otimes \partial/\partial x^{i_2} - \partial/\partial x^{i_2} \otimes \partial/\partial x^{i_1})) = 2!.\end{aligned}$$

В случае двойственных базисов результат должен был бы быть 1.

В общем случае получится:

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}(\partial/\partial x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \partial/\partial x^{i_k}) = k!$$

Чтобы не испортить предыдущего, мы не станем изменять базисы, а изменим задание двойственности. Если обозначить двойственность между $\Lambda_{(k)}$ и $\Lambda^{(k)}$, наследуемую от тензорной двойственности, как выше, через $\langle \alpha, v\rangle$, то мы *определяем новую двойственность* равенством $\alpha(v) = \langle \alpha | v\rangle = \frac{1}{k!}\langle \alpha, v\rangle$.

Таким образом, двойственность внешних алгебр рассогласована с двойственностью тензорных алгебр. Однако построенные базисы двух алгебр двойственны.

Замечание. Если бы мы приняли, что при альтернировании надо отдать $k!$ в знаменателе не координатам, а базисным элементам (см. выше), то поправка в двойственности состояла бы в умножении на $k!$, а не делении на этот факториал.

Посчитаем, например, значение разложимой 2-формы $\alpha \wedge \beta = (a_1 dx^1 + a_2 dx^2) \wedge (b_1 dx^1 + b_2 dx^2)$ на разложимом 2-векторе $u \wedge v = (u^1 e_1 + u^2 e_2) \wedge (v^1 e_1 + v^2 e_2)$. (Мы заменяем сложное обозначение базисов более простым.) Имеем: $\alpha \wedge \beta = (a_1 b_2 - a_2 b_1) dx^1 \wedge dx^2$ и $u \wedge v = (u^1 v^2 - u^2 v^1) e_1 \wedge e_2$, откуда, в силу двойственности базисов,

$$\alpha\wedge\beta(u\wedge v) = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} \alpha(u) & \beta(v) \\ \alpha(v) & \beta(v) \end{pmatrix}.$$

С другой стороны $\alpha\wedge\beta(u\wedge v) = \frac{1}{2!}(\alpha\otimes\beta - \beta\otimes\alpha)(u\otimes v - v\otimes u) = \det\begin{pmatrix} \alpha(u) & \beta(v) \\ \alpha(v) & \beta(v) \end{pmatrix}$, что согласовано с предыдущим вычислением.

В общем случае для разложимых k-вектора $v = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ и k-формы $\alpha = \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k$, $\alpha^i \in V^*$, $v_j \in V$ получаем для k-мерного пространства V:

$$\alpha(v) = \det((\alpha^i_p) \cdot (v^p_j)) = \det(\alpha^i(v_j)).$$

Упражнение. Написать значение разложимой k-формы на разложимом k-векторе для случая $k < n$, где $n = \dim\, V$ (см. дальше пункт 9).

5. Замена переменных. Внешнее произведение матриц

Каждому базису в исходном пространстве V отвечает базис в каждом пространстве $\Lambda^{(k)}$ (и $\Lambda_{(k)}$). Естественно, *замена* базиса в V однозначно определяет замену базиса в Λ^k. Мы должны выяснить, как выражается матрица замены в Λ^k (т.е. матрица, выражающая новые координаты через старые) через матрицу замены в V, которую мы называем матрицей Якоби и обозначаем (J).

Вспомним, что для тензорных пространств $V^{(p)}_{(q)}$ нам пришлось ввести специальную операцию тензорного умножения матриц, и матрица замены в таком пространстве оказалась тензорным произведением тензорных степеней $(J)^{\otimes(p)}$ и $(J^*)^{\otimes(q)}$, где (J^*) есть матрица контравариантного преобразования в V^* (обратная к (J)).

Как мы сейчас увидим, для выражения матрицы преобразования в пространстве $\Lambda^{(k)}$ нам также удобно будет ввести специальную операцию внешнего умножения матриц, и наша матрица окажется внешней степенью матрицы Якоби. (Аналогично, матрица преобразования в пространстве $\Lambda_{(k)}$ является внешней степенью матрицы (J^*)).

Пусть дан k-вектор t_a (значок a нам удобно поместить внизу). Напомним, что мы можем рассматривать t_a и как элемент пространства $\Lambda^{(k)}$ и как кососимметрический тензор в "большом" пространстве $V^{(k)}$. Его координаты $t_a^{i_1 \dots i_k}$ в $\Lambda^{(k)}$ отвечают неупорядоченным группам по k попарно различных индексов, и каждой такой координате соответствуют $k!$ координат $t^{\sigma(i_1 \dots i_k)}$ равных $t_a^{i_1 \dots i_k}$ по модулю, но половина со знаком минус. Для определенности мы должны выбрать какой-то порядок в этой группе индексов за основной. Как принято, возьмем порядок возрастания за основной и будем писать $t_a^{i_1 < \dots < t_k}$.

Пусть даны две системы координат в пространстве V и им отвечают две системы тензорных координат в $V^{(k)}$ и две системы в $\Lambda^{(k)}$. Будем использовать для одной из них штрихованные индексы и найдем выражение штрихованных координат через нештрихованные.

Итак, пусть в штрихованной системе координат в пространстве $\Lambda^{(k)}$ данный k-вектор t_a имеет координаты $t_a^{i'_1<\ldots<i'_k}$. Возьмем его координату $t^{i'_1<\ldots<i'_k}$ в пространстве $V^{(k)}$ (остальные координаты с этой группой индексов равны ей по модулю).

Пусть замена координат в пространстве V имеет матрицу Якоби $(J) = (c^i_j)$. В пространстве $V^{(k)}$ мы получим замену с матрицей $(J)^{\otimes(k)}$. Наша координата получит выражение $t^{i'_1<\ldots<i'_k} = c^{i'_1}_{j_1}\cdots c^{i'_k}_{j_k} t^{j_1\ldots j_k}$. Здесь суммирование идет по всем перестановкам групп индексов. Сгруппируем слагаемые, отвечающие одной и той же неупорядоченной группе индексов $j_1\ldots j_k$:

$$t^{i'_1<\ldots<i'_k} = \sum_{j_1<\ldots<j_k}\sum_{\delta} c^{i'_1}_{\delta(j_1}\cdots c^{i'_k}_{j_k)} t^{\delta(j_1\ldots j_k)},$$

где δ перестановка индексов $(j_1\cdots j_k)$.

Так как $t^{\delta(j_1\ldots j_k)} = (-1)^\delta t^{j_1<\ldots<j_k}$, мы получаем

$$t_a^{i'_1\ldots i'_k} = \sum_{j_1<\ldots<j_k}\sum_{\delta}(-1)^\delta c^{i'_1}_{\delta(j_1}\cdots c^{i'_k}_{j_k)} t^{j_1<\ldots<j_k}$$

Заметим, что коэффициент $\sum_\delta(-1)^\delta c^{i'_1}_{\delta(j_1}\cdots c^{i'_k}_{j_k)}$ есть в точности минор $M^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k}$ матрицы (J), стоящий на пересечении строк с номерами $i'_1, \ldots, i'_k$ и столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_k$ (в этом порядке).

Таким образом матрица замены координат в пространстве $\Lambda^{(k)}$, индуцированная заменой базиса в пространстве V с матрицей (J) имеет элементами миноры матрицы (J) порядка $k\times k$. Это $(C^k_n\times C^k_n)$-матрица, нужно только договориться о порядке строк и столбцов. Мы примем алфавитный порядок для строк и для столбцов.

Заметим, что если мы возьмем произведение k элементов матрицы (J), стоящих в разных строках и разных столбцах и проальтернируем (без деления на факториал) это произведение по строкам (или по столбцам), то мы получим как раз минор, стоящий в пересечении выбранных строк и столбцов (со знаком, отвечающим их порядкам). При этом наше произведение получается кососимметричным также и по столбцам (или, соответственно, по строкам).

Теперь мы можем ввести новую операцию умножения матриц – внешнее умножение.

Назовем *внешним произведением* квадратных $m\times m$-матриц $A = (a^i_j)$ и $B = (b^p_q)$ матрицу $(A)\wedge(B)$, элементы которой получаются двойным альтернированием произведений $a^{(i}_{(j}b^{p)}_{q)}$ с умножением на 2, т.е. делить на факториал 2! надо один раз, а не два. (Произвольный элемент является полусуммой $\frac{1}{2}(a^i_jb^p_q - a^p_jb^i_q + a^p_qb^i_j - a^i_qb^p_j)$.)

Если $(A) = (B)$, мы получим внешний квадрат матрицы. Очевидным образом определяется внешнее произведение конечного числа матриц. Таким образом, мы можем сказать, что замена координат в пространстве $\Lambda^{(k)}$, отвечающая замене с матрицей (J) в пространстве V, осуществляется матрицей являющейся k-ой внешней степенью матрицы (J). Она обозначается $(J)\wedge\cdots\wedge(J)$ (k сомножителей).

Заметим, что в этом случае (когда сомножители совпадают), альтернирование по первым индексам в произведении $a^{i_1}_{j_1}\ldots a^{i_k}_{j_k}$ совпадает с альтернированием по вторым индексам. Таким образом, элемент $a^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k}$ матрицы $(J)\wedge\cdots\wedge(J)$ получается из этого произведения альтернированием только по верхним индексам или только по нижним (без деления на факториал).

Очевидно, k-кратное внешнее произведение матриц имеет обычные свойства умножения – ассоциативность и дистрибутивность; замена в пространстве $\Lambda_{(k)}$ имеет матрицу $(J^*) \wedge \cdots \wedge (J^*)$.

Контрольный вопрос. Чему равняется внешнее произведение трех матриц

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} ?$$

Задача. Как выражается определитель матрицы $(J) \wedge \cdots \wedge (J)$ через определитель матрицы J?

[Рассмотрите случай диагональной матрицы.]

6. Простые (разложимые) n-векторы

Разложимые k-векторы (т.е. внешние произведения векторов из V) называют также *простыми.* Каждый k-вектор является суммой простых, например, линейной комбинацией базисных.

Простые векторы имеют важное геометрическое значение.

Рассмотрим сначала случай $k = n$. Пространство $\Lambda^{(n)}$ одномерно, его базис, порожденный базисом в V, состоит из одного элемента $\partial/\partial x^1 \wedge \cdots \wedge \partial/\partial x^n$ и, в частности, всякий n-вектор разложим. При замене базиса в V с матрицей Якоби $\partial x^{i'}/\partial x^i$ и якобианом J в $\Lambda^{(n)}$ индуцируется замена, состоящая в умножении на какое-то число. Это число равно J.

Действительно, элемент $w = \mathbf{w}\, \partial/\partial x^1 \wedge \ldots \wedge \partial/\partial x^n$ пространства $\Lambda^{(n)}$ ($\mathbf{w}$ – координата w) получается альтернированием в $V^{(n)}$ элемента $n!\, \mathbf{w}\, \partial/\partial x^1 \otimes \ldots \otimes \partial/\partial x^n$ и имеет в тензорной записи (т.е. рассматриваемый как элемент пространства $V^{(n)}$) следующий вид: $w = (\Sigma_\sigma (-1)^\sigma \mathbf{w}^{\sigma(1\ldots n)} \partial/\partial x^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \partial/\partial x^{\sigma(n)})$, где $\mathbf{w}^{\sigma(1\ldots n)}$ есть $\mathbf{w}$ для всех σ. В новой системе координат имеем для тензорной координаты $\mathbf{w}^{1' \ldots n'} = \partial x^{1'}/\partial x^{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial x^{n'}/\partial x^{i_n}\, w^{i_1 \ldots i_n} = \mathbf{w} \sum_\sigma (-1)^\sigma \partial x^{1'}/\partial x^{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial x^{n'}/\partial x^{i_n} = \mathbf{w} \cdot J$ (сумма явным образом дает детерминант) и, значит, (альтернируя в новой системе): $w = \mathbf{w} J \partial/\partial x^{1'} \wedge \cdots \wedge \partial/\partial x^{n'}$.

Утверждение. Рассмотрим простой n-вектор $w = v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$; $w = 0$, если и только если векторы v_i линейно зависимы.

Действительно, если они независимы, то их систему можно принять за базис в V и тогда $w \neq 0$ в силу только что доказанного (и также в силу того, что он станет сам базисным элементом в Λ_n). Если же они зависимы, то один из них можно линейно выразить через остальные векторы, и, умножая его последовательно на $n-1$ остальных векторов, мы последовательно обратим в нуль все слагаемые линейной комбинации, т.к. внешнее произведение двух одинаковых 1-векторов равно нулю. □

Это же можно получить, просто подсчитав (единственную) координату w. Запишем каждый вектор v_k в кординатах: $v_k = a_k^i e_i$. Раскрывая скобки во внешнем произведении этих векторов, как легко проверить, получаем $\det(a_k^i)\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, т.е. координатой служит определитель матрицы, составленной из координат векторов v_k.

Упражнение. Приведите пример 2-формы, внешний квадрат которой не нуль.

Набор из n независимых векторов в V называется *n-репером.* Мы видим, что каждому n-реперу сопоставляется ненулевой элемент одномерного пространства $\Lambda^{(n)}$ (внешнее произведение векторов репера). При переходе от одного репера к другому этот элемент умножается на якобиан преобразования от системы координат, заданной одним репером, к системе координат другого. В то же время известно из аналитической геометрии, что на этот же якобиан умножится объем параллелепипеда, построенного на векторах репера.

Таким образом, задание упорядоченного набора из n независимых векторов в V задает с одной стороны элемент $w \in \Lambda^{(n)}$, а с другой ориентируемый параллелепипед, для которого эти векторы служат ребрами. При переходе к другому набору и этот элемент и объем параллелепипеда умножаются на одно и то же число – якобиан перехода. Если репер принимается за базисный в V, то соответствующий элемент будет базисным в $\Lambda^{(n)}$ и мы можем принять также соответствующий параллелепипед за единичный. Иными словами, выделение ненулевого элемента в $\Lambda^{(n)}$ задает в V единицу для измерения объемов.

7. Отступление об измерении объемов.

Измерение объемов областей в пространстве $\mathbb{R}^n$ составляет теорию, в основе которой лежат три аксиомы:

1. Инвариантность относительно параллельного переноса.
2. Аддитивность.
3. Непрерывность.

Измерение объемов – это сопоставление чисел ограниченным областям, при котором выполнены эти аксиомы.

Их смысл достаточно прост. Инвариантность состоит в том, что если одна область получена из другой параллельным переносом на некоторый вектор, то объемы этих областей равны.

Далее рассмотрим сначала третью аксиому. Вспомним, как происходит измерение площади или объема области соответственно на плоскости или в пространстве. Будем считать, что область ограничена, т.е. лежит в шаре какого-то радиуса. Рассматривается последовательность разбиений пространства на равные кубы соответствующей размерности с параллельными сторонами и со стремлением к нулю их сторон. Считается число кубов, лежащих строго внутри области и число кубов, содержащих хоть одну точку области. Каждое из чисел умножается на объем одного куба разбиения (т.е. на a^n, где a – сторона куба). Получаются две монотонные последовательности, стремящиеся друг к другу навстречу. Каждая из них имеет предел. Эти пределы не обязательно равны, и обычно ограничиваются рассмотрением областей, для которых пределы равны. Иначе говоря, областей с границами нулевого объема (например, гладкими). Общий предел этих двух последовательностей не зависит, как несложно доказывается, от выбора последовательности “кубильяжей” пространства и он должен совпадать с объемом области. В этом стоит аксиома непрерывности.

Вторая аксиома состоит в том, что если область разрезана замкнутым множеством нулевого объема на две области, то сумма их объемов должна равняться объему исходной области.

Конструктивно измерение объемов проходит следующие этапы. В качестве единицы измерения берется объем некоторого параллелепипеда (построенного на n-репере).

Показывается с помощью разрезаний и параллельных переносов, что объем любого другого параллелепипеда будет равен якобиану перехода от репера, соответствующего первому параллелепипеду, к реперу второго параллелепипеда. После этого нетрудно показать, что предел, описанный выше для данной области (если он существует, т.е. если имеет место совпадение двух пределов), не зависит от выбора кубильяжа.

Упражнение. Докажите сделанное утверждение о соответствии объемов двух параллелепипедов.

8. Простые (разложимые) k-векторы

Рассмотрим теперь простые k-векторы для любого k, $1 \leq k \leq n$.

Упражнение. Покажите, что каждый $(n-1)$-вектор разложим.

Каждый простой k-вектор w определяется набором из k векторов как их внешнее произведение. Если эти векторы зависимы, то, как и выше, один из них выражается через другие и их внешнее произведение равно нулю. Если они независимы, то мы можем дополнить их $n-k$ векторами до n-репера и тогда из предыдущего ясно, что их внешнее произведение отлично от нуля.

Итак, *внешнее произведение k векторов отлично от нуля тогда и только тогда, когда они линейно независимы.*

Координаты простого k-репера в пространстве $\Lambda^{(n)}$. Заметим, что координата $w^{(i_1 \dots i_k)}$ k-репера $w = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ не изменится, если у каждого вектора v_i, $1 \leq i \leq k$ координаты, не входящие в группу $i_1, \dots, i_k$, заменить нулями. При этом мы получим k векторов $\bar{v}_i$, лежащих в k-мерной координатной плоскости $Ox_{i_1} \dots x_{i_k}$ (т.е. проекции этих векторов паралельно дополнительной координатной плоскости) и указанная координата w будет совпадать с координатой k-вектора, построенного на векторах $\bar{v}_i$ в этой координатной плоскости. Но последняя, очевидно, в силу предыдущего, совпадает с минором матрицы, составленной из координат векторов $\bar{v}_i$ и находящегося в строках с номерами $i_1 \dots i_k$. Этот минор совпадает с минором, находящимся на строках с теми же номерами матрицы векторов v_i.

Таким образом, *координатами k-вектора $w = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ служат миноры матрицы координат этих векторов*. Численно эти координаты-миноры равны объемам k-мерных параллелепипедов, полученных координатными проекциями параллелепипеда, построенного на векторах v_i, в координатные плоскости.

(Этот же результат получится, если рассмотреть координатную запись векторов v_i в их внешнем произведении $w = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$, раскрыть в нем скобки и привести подобные члены).

Уточним теперь геометрический смысл k-вектора.

Если две системы из k векторов линейно выражаются друг через друга, то они лежат в одной плоскости $P \subset V$ (проходящей через начало), а если они еще выражаются с помощью матриц с определителем 1, то они задают в этой плоскости тот же объем (со знаком, если плоскость ориентирована) и, в силу предыдущего, они задают один и тот же k-вектор в этой плоскости и, значит, также во всем пространстве. Действительно, дополним один из этих k-векторов до базиса в V $n-k$ векторами, не лежащими в этой плоскости, и выразим векторы другого в этом базисе, а затем расмотрим координаты их внешнего произведения. Ясно, что останется только одна ненулевая координата, отвечающая первому k-вектору, и эта координата равна определителю перехода от него в его плоскости ко второму k -вектору. Если этот определитель равен 1, то оба k-вектора совпадают, т.к. совпадают их координаты в выбранном базисе.

Покажем, обратно, что если два k-репера порождают один и тот же k-вектор, то они выражаются друг через друга с определителем 1 и, значит, не только лежат в общей k-мерной плоскости, но также задают в ней один и тот же объем (включая знак, т.е. ориентацию этой плоскости).

Будем рассуждать с помощью индукции по размерности n. Если $n = k$, утверждение доказано выше. Допустим, утверждение верно для $n-1$ и $k < n$.

Пусть два k-репера даны в $\mathbb{R}^n$ и порождают там один и тот же k-вектор, т.е., координаты двух порожденных k-векторов совпадают в любом кососимметрическом базисе. Дополним первый репер до базиса в $\mathbb{R}^n$. Координаты обоих k-векторов все нулевые, кроме одной, отвечающей плоскости, содержащей первый репер.

Возьмем какую-нибудь $(n-1)$-мерную координатную плоскость P^{n-1}, содержащую первый k-репер. Спроектируем (параллельно дополнительной оси) второй репер на P^{n-1}. Порожденный его проекцией k-вектор в этой плоскости по-прежнему будет иметь одну координату 1, а остальные нулевые. По индукции проекции векторов репера лежат в k-мерной плоскости, натянутой на первый репер. Дополняяя оба репера кординатными ортами до $(n-1)$-репера в плоскости P^{n-1}, мы сведем задачу к случаю $k = n-1$.

Дополним первый k-репер вектором e до базиса в $\mathbb{R}^n$ и запишем каждый вектор второго k-репера суммой $v_i + \bar{v}_i$, где первое слагаемое лежит в k-мерной плоскости, порожденой первым репером, а вторые слагаемые все коллинеарны e. Внешнее произведение вторых слагаемых равно нулю и поэтому второй k-вектор представляется суммой $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k + \sum_i v_1 \wedge \ldots \wedge \bar{v}_i \wedge \ldots v_k$. Первое слагаемое не нуль (т.к. первая координата равна 1), а остальные равны нулю (т.к. остальные координаты равны нулю). Но это означает, что все $\bar{v}_i = 0$, так как иначе равнялось бы нулю внешнее произведение каких-то $k-1$ векторов v_s, и тогда равнялось бы нулю и первое слагаемое.

Но для второго репера это в точности означает, что его векторы лежат в координатной плоскости, определенной первым репером и при этом он связан с ним координатным преобразованием с определителем 1. $\square$

Итак, геометрический смысл простого k-вектора — *определение единицы измерения ориентированного объема в некоторой k-мерной плоскости.*

При замене координат в пространстве V с помощью $n\times n$-матрицы C $n\times k$-матрица B, составленная из координат векторов v_i данного k-репера, умножится слева на C: $B' = CB$. Миноры порядка $k \times k$ матрицы B' получаются перемножением матриц порядка $k \times n$, составленных из строк матрицы C на матрицу B (см. ниже замечание о теореме Сильвестра.)

9. Двойственность простых k-векторов и простых k-форм.

Двойственным образом мы получим, что координатами простых k-форм $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$, $\alpha_i \in \Lambda_{(1)} = V^*$ являются миноры матрицы, составленной из координат линейных форм α_k.

Подсчитаем значение 2-формы $\alpha \wedge \beta$, $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$, $\beta = (b_1, b_2, b_3) \in V^{3*}$ на 2-векторе $u \wedge v$, $u = (u^1, u^2, u^3)$, $v = (v^1, v^2, v^3) \in V^3$ двумя способами:

$$
\begin{aligned}
&\alpha\wedge\beta(u\wedge v)=\tfrac{1}{2!}[2!\tfrac{\alpha\otimes\beta-\beta\otimes\alpha}{2!}(2!\tfrac{u\otimes v-v\otimes u}{2!})]=\\
&=\tfrac{1}{2}\left(\alpha\otimes\beta(u\otimes v)-\beta\otimes\alpha(u\otimes v)-\alpha\otimes\beta(v\otimes u)+\beta\otimes\alpha(v\otimes u)\right)=\\
&=\alpha(u)\beta(v)-\alpha(v)\beta(u))=\det\begin{pmatrix}\alpha(u)&\beta(u)\\ \alpha(v)&\beta(v)\end{pmatrix}.
\end{aligned}\tag{1}
$$

Будем здесь обозначать двойственные базисы в V^3 и V^{*3} через $(e_1,e_2,e_3\ )$ и (e^1,e^2,e^3), соответственно.

$$
\begin{aligned}
&\alpha\wedge\beta\,(u\wedge v)=(a_1e^1+a_2e^2+a_3e^3)\wedge(b_1e^1+b_2e^2+b_3b^3)\cdot\\
&\cdot((u^1e_1+u^2e_2+u^3e_3)\wedge(v^1e_1+v^2e_2+v^3e_3))=\\
&=\left(\det\begin{pmatrix}a_1&a_2\\ b_1&b_2\end{pmatrix}e^1\wedge e^2+\det\begin{pmatrix}a_2&a_3\\ b_2&b_3\end{pmatrix}e^2\wedge e^3+\det\begin{pmatrix}a_3&a_1\\ b_3&b_1\end{pmatrix}e^3\wedge e^1\right)\cdot\\
&\cdot\left(\det\begin{pmatrix}u_1&u_2\\ v_1&v_2\end{pmatrix}e_1\wedge e_2+\det\begin{pmatrix}u_2&u_3\\ v_2&v_3\end{pmatrix}e_2\wedge e_3+\det\begin{pmatrix}u_3&u_1\\ v_3&v_1\end{pmatrix}e_3\wedge e_1\right)=\\
&=\det\begin{pmatrix}a_1&a_2\\ b_1&b_2\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix}u_1&u_2\\ v_1&v_2\end{pmatrix}+\\
&+\det\begin{pmatrix}a_2&a_3\\ b_2&b_3\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix}u_2&u_3\\ v_2&v_3\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}a_3&a_1\\ b_3&b_1\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix}u_3&u_1\\ v_3&v_1\end{pmatrix}.
\end{aligned}\tag{2}
$$

Заметим, что мы доказали в этом частном случае теорему Сильвестра:

Определитель $k\times k$-матрицы, полученной произведением матриц A и B порядков $k\times n$ и $n\times k$ соответственно, равен сумме C_n^k произведений соответствующих миноров матриц A и B порядков $k\times k$.

Укажем смысл этой теоремы в общем случае. Мы рассматриваем значение простой k-формы на простом k-векторе. Непосредственно видно (раскрытием скобок), что это есть определитель матрицы с элементами $\alpha^i(v_j)$ (в отличие от координат 1-формы мы нумеруем индексами вверху, а векторы индексами внизу). С другой стороны, ввиду двойственности наших базисов, значение k-формы на k-векторе равно сумме произведений их соответствующих координат в этих базисах (свертка тензорного произведения). Но их координаты, как мы видели, и есть миноры матрицы, составленной из координат сомножителей.

Мы оставляем рассмотрение общего случая читателю и предлагаем постараться найти прямое доказательство этой теоремы.

10. Двойственность $\Lambda_{(n)}$ и $\Lambda^{(n)}$ и измерение объемов

Выбор ненулевого элемента $\omega=q\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\in\Lambda_{(n)}$ задает, в силу двойственности, линейный функционал на $\Lambda^{(n)}$, который определяется числом q. В силу одномерности $\Lambda^{(n)}$, можно считать, что этот функционал есть умножение в $\Lambda^{(n)}$ на q. Этим выбирается элемент $q\,\partial/\partial x^1\wedge\cdots\wedge\partial/\partial x^n$ в $\Lambda^{(n)}$. Мы знаем, что простые n-векторы задают класс эквивалентности n-реперов и вместе с этим их параллелепипедов. При переходе от одного репера к другому в том же классе объем параллелепипеда не меняется. Значит, числом q, т.е. формой ω, определен класс равновеликих параллелепипедов, которые можно принять за единичные.

Итак, задание элемента из $\Lambda_{(n)}$ равносильно выбору единицы объема в пространстве V.

III. МЕТРИКА

1. Напоминание из линейной алгебры.

Вспомним, что любая билинейная форма $b(u,v)$ над V^n задает линейное отображение $\hat{b} : V \to V^*$: для вектора $v_0 \in V$ образом служит линейная форма $\hat{b}(v_0) = \hat{v}_0 \in V^*$, $\hat{v}_0(u) = b(u, v_0)$.

Если в V задан базис $e_1, \ldots, e_n$, в V^* возникает двойственный базис $e^1, \ldots, e^n$. В этих базисах форма b и отображение $\hat{b}$ получают одинаковые матрицы: $b_{ij} = \hat{b}^i_j$. Действительно, по определению, элементами матрицы формы b служат числа $b(e_i, e_j) = b_{ij}$, а элементами матрицы отображения $\hat{b}$ числа $\hat{b}^i_j$, где $\hat{b}^i_j$ это i-ая координата (ко)вектора $\hat{b}(e_j) = \widehat{e_j}$ в данном базисе в V^*. В нашем случае $\hat{b}^i_j$ это значение ковектора $\widehat{e_j}$ на e_i, т.е. $\hat{b}(e_j)(e_i) = \widehat{e_j}(e_i)$, что есть $b(e_i, e_j) = b_{ij}$, по определению $\hat{b}$.

Разумеется и обратно, линейному отображению $\hat{b} : V \to V^*$ однозначно отвечает билинейная форма $b(u,v) = \hat{b}(v)(u)$ на V. (Таким образом, мы отождествили пространство $V_{(2)}$ с пространством линейных отображений V в V^* (т.е. с пространством $V^{(1)}_{(1)}$), но это отождествление имеет силу только для данного базиса, в другом базисе оно будет иным.)

Невырожденной форме $b(u,v)$ отвечает невырожденная матрица и, следовательно, изоморфизм $\hat{b} : V \approx V^*$. (Естественного изоморфизма между V и V^*, не связанного с выбором базиса, не существует, но каждая нвырожденная билинейная форма на V порождает такой изоморфизм.)

Если выбрана *симметричная* билинейная форма b (это условие не зависит от выбора базиса), то в сопряженных базисах и матрица $\hat{b}$ симметрична. Из линейной алгебры известно, что в этом случае мы можем выбрать базис в V так, что эта матрица станет диагональной. Для отображении $\hat{b}$ это означает, что каждый базисный вектор e_i переходит в (ко)вектор коллинеарный e^i. Умножая базисные векторы на числа, мы получим матрицу, у которой на диагонали стоят единицы со знаком $+$ или $-$, а остальные элементы нули (мы считаем, что форма невырождена, так что нулей на диагонали нет); число минусов, как известно, есть, по "закону инерции", инвариант – *сигнатура* формы.

Таким образом, в случае симметрической матрицы формы b мы можем выбрать базис так, что при отображении $\hat{b}$ образом вектора e_i служит e_i или $-e^i$. (Такие базисы в общем случае называют псевдоэвклидовыми, а форма *псевдоэвклидовой метрикой* и пространство V, снабженное такой метрикой, называется *псевдоевклидовым.*)

Если, наконец, форма такова, что индекс инерции формы равен нулю, то в таком случае форма называется, как известно, *скалярным произведением* или евклидовой метрикой, базисы, в которых образом каждого e_i служит e^i – ортонормированными, а пространство V, снабженное скалярным произведением, *евклидовым.* Билинейную форму, задающую скалярное произведение, мы будем обозначать, например, $g(\,.\,,.)$.

Итак, скалярные произведения выделяются из всех билинейных форм тем, что отображение V в V^*, соответствующее форме, есть изоморфизм, который для некоторых базисов переводит векторы базиса в соответствующие векторы двойственного базиса. Такие базисы будут ортонормированными, в них матрица формы единична и $b(u,u) = \Sigma(u^i)^2$, в частности, форма b положительно определена.

2. Отождествление векторов и ковекторов в евклидовом пространстве

Изоморфизм между евклидовым пространством и его двойственным может быть использован для отождествления этих пространств, в частности, координаты вектора и его образа в V^* совпадают, если мы рассматриваем ортонормированный базис и его двойственный. Если же мы переходим к произвольному базису в V, то координаты становятся различными, но мы можем говорить (как и делают физики) о верхних и нижних координатах *того же самого* вектора.

Если базис не ортонормированный, то матрица g_{ij} формы отлична от единичной, и нижние координаты вектора u имеют вид $u_j = g_{ij}u^j$. Заметим, что формально эти координаты получаются сверткой координат формы и вектора. Эта операция называется операцией *опускания индекса.* Встречная операция называется операцией *поднятия индекса.* Она осуществляется с помощью обратной матрицы, т.е. матрицы встречного изоморфизма V^* на V. Обратная матрица записывается как g^{ij} и операция перевода нижних координат в верхние записывается формулой $g^{ij}u_i = u^j$.

Замечание. Поднимать или опускать индексы можно, разумеется с помощью свертки с любым тензором валентости 2, верхней или нижней, соотв. Но именно метрика, т.е. скалярное произведение (иногда псевдометрика), используется для *отождествлени* верхних и нижних тензоров.

Нижние координаты вектора можно интерпретировать в самом векторном пространстве V снабженном метрикой с матрицей g_{ij}. А именно,

Утверждение. Нижние координаты равны проекциям вектора на оси координат.

Действительно. Ортогональная проекция вектора v^i на i-ую ось с ортом e_i равна скалярному произведению вектора и орта: $(v, e_i) = g_{kj}v^j(e_i)^k = g_{ij}v^j = v_i$.

3. Распространение метрики на тензорные пространства

Пусть V теперь евклидово пространство, т.е. снабжено метрикой (скалярным произведением) g_{ij}. Эта метрика порождает метрику во всех введенных выше верхних, нижних и также смешанных тензорных пространствах.

Именно, мы видели выше, что метрика однозначно определяется изоморфизмом, переводящим выделенный базис в его двойственный. Но мы видели также, что каждому верхнему пространству отвечает двойственное нижнее пространство и обратно, причем базис в V порождает двойственные тензорные базисы в этих пространствах. Например, мы считаем базис $\partial/\partial x^{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial/\partial x^{i_k}$ в $V^{(k)}$ двойственным базису $dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}$ в $V_{(k)} = (V^{(k)})^*$. Соответствием этих базисов, как мы знаем, задается метрика в $V^{(k)}$, причем указанные базисы будут в этой метрике ортонормированными, и нижние координаты тензора t будут в этих базисах совпадать с верхними.

Если в V выбран не ортонормированный базис, связанный с ортонормированным матрицей перехода $(J) = (\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i})$, то матрица скалярного произведения (g) в этом базисе будет $(g) = (J)(J)^T$. ($(J)^T$ – матрица, транспонированная к (J)). В тензорном пространстве $V^{(k)}$ матрица построенного скалярного произведения будет совпадать с k-ой тензорной степенью (g): $g_{i_1\ldots i_k;j_1\ldots j_k} = g_{i_1j_1}\ldots g_{i_kj_k}$. Это вытекает из следующего утверждения, которое мы оставляем в качестве задачи.

Задача. $JJ^T \otimes JJ^T = (J \otimes J)(J \otimes J)^T = (J \otimes J)(J^T \otimes J^T)$.

(Второе равенство следует из того, что тензорное произведение – в отличие от обычного – перестановочно с транспонированием. Элементом получающейся матрицы будет произведение скалярных произведений двух пар строк исходной матрицы.)

Каждый тензор получает норму, квадрат которой для верхнего тензора равен $|t|^2 = g_{i_1\dots i_k;j_1\dots j_k} t^{i_1\dots i_k} t^{j_1\dots j_k}$. В согласии с предыдущим, его нижние координаты будут $t_{j_1\dots j_k} = g_{i_1\dots i_k;j_1\dots j_k} t^{i_1\dots i_k}$. Переход от нижних координат к верхним осуществляется сверткой с обратной матрицей, которая будет тензорной степенью матрицы g^{ij}.

Соответственно определяется метрика в смешанных пространствах.

4. Метрика в пространствах кососимметрических тензоров

Для пространств $\Lambda_{(k)}$ и $\Lambda^{(k)}$ кососимметрических тензоров мы выше определили двойственность, согласованную с двойственностью тензорных базисов $\partial/\partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial/\partial x^{i_k}$ и $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, порожденных базисом в V. Определяя изоморфизм между этими пространствами единичной матрицей, мы вводим в них метрику, в которой эти базисы будут ортогональными. Эта метрика отличается на множитель $k!$ от метрики, полученной ограничением метрики в тензорном пространстве. Посмотрим, как будет выглядеть эта метрика в других (тензорных) базисах.

Матрица метрики (g) в данной системе координат выражается через матрицу C перехода к этой системе от ортонормированной по формуле $(g) = CC^T$. В нашем случае матрица перехода выражается через матрицу Якоби (J) (в V) как ее внешняя степень: $(J_{(k)}) = (J) \wedge \dots \wedge (J)$. Элементами этой матрицы служат миноры $J_{i'_1\dots i'_k;i_1\dots i_k}$, образованные элементами матрицы (J), стоящими в ней в указанных индексом строках и столбцах. Матрица $(g)^{(k)}$ метрики в пространстве $\Lambda^{(k)}$ в данной системе координат задается формулой: $(g)^{(k)} = ((J) \wedge \dots \wedge (J))((J) \wedge \dots \wedge (J))^T = (g) \wedge \dots \wedge (g)$.

Мы оставляем доказательство последнего равнства в качестве необязательной задачи:

Задача. $((J) \wedge \dots \wedge (J))((J) \wedge \dots \wedge (J))^T = (J)(J)^T \wedge \dots \wedge (J)(J)^T$.

[Здесь нужно воспользоваться теоремой Сильвестра (см. выше п.9 раздела II) и показать, что в обоих случаях получится матрица, каждый элемент которой есть сумма попарных произведений соответствующих $(k \times k)$-миноров, стоящих в двух наборах по k столбцов матрицы (J).]

Элемент $g_{i_1\dots i_k;j_1\dots j_k}$ этой матрицы равен альтернированию по первым индексам произведения $g_{i_1 j_1} \dots g_{i_k j_k}$ (при этом автоматически происходит альтернирование и по второму индексу), в результате этого получается минор матрицы (g), стоящий на пересечении строк и столбцов с номерами, указанными нижним индексом.

Итак, скалярное произведение k-векторов u и v в $\Lambda^{(k)}$ есть

$$g_{i_1\dots i_k;j_1\dots j_k}\, u^{i_1\dots i_k} v^{j_1\dots j_k}.$$

Двойственно, скалярное произведение k-форм α и β в $\Lambda_{(k)}$ имеет вид:

$$g^{i_1\dots i_k;j_1\dots j_k} \alpha_{i_1\dots i_k} \beta_{j_1\dots j_k}$$

.

В частности, для простого k-вектора $v = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ квадратом нормы служит

$$g_{i_1\dots i_k;j_1\dots j_k} v^{i_1\dots i_k} v^{j_1\dots j_k},$$

здесь $v^{i_1\dots i_k}$ есть минор матрицы координат векторов v_i. Если исходный базис ортонормирован, то квадрат нормы k-вектора равен сумме квадратов миноров.

Если выбрать базис, первые k векторов которого лежат в плоскости этого k-вектора, а остальные ей ортогональны, то в этой системе координат только первые k координат каждого вектора v_i отличны от нуля и мы приходим к выражению $\tilde{g}(v^{i_1 \dots i_k})^2$, где $\tilde{g}$ есть определитель метрического тензора для плоскости, порожденной векторами v_i.

Аналогичное имеет место и для простых форм.

Особое значение имеет случай одномерных пространств $\Lambda^{(n)}$ и $\Lambda_{(n)}$. В этом случае $g = \det((J)(J)^T)$ и якобианы равны соответственно $\sqrt{g}$ в первом и $1/\sqrt{g}$ во втором случае:

$$\partial/\partial x^{1'} \wedge \dots \wedge \partial/\partial x^{n'} = \sqrt{g}\partial/\partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial/\partial x^n.$$

$$dx^{1'} \wedge \dots \wedge dx^{n'} = 1/\sqrt{g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

При фиксированном базисе в V мы имеем базисный элемент $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ в $\Lambda_{(n)}$, тензорные координаты которого обозначаются $\epsilon_{i_1 \dots i_n}$ (они равны 0 при совпадении индексов и 1 или -1 в зависимости от четности перестановки в противном случае). При переходе к другой системе координат этот элемент умножается на $1/J$, т.е. $\epsilon_{i_1 \dots i_n}$ переходит в $1/J \epsilon_{i'_1 \dots i'_n}$. Таким образом $\epsilon_{i_1 \dots i_n}$ не есть тензор. Но $\sqrt{g}\epsilon_{i_1 \dots i_n}$ является тензором, т.к. происходит сокращение J и $1/J$. Этот кососимметрический тензор называется формой метрического объема, т.к. в каждой системе координат он задает, как мы видели, единичный объем, порожденный метрикой.

5. Двойственность Пуанкаре и оператор Ходжа "звездочка"

Для данного натурального числа k, $1 \leq k \leq n$, мы имеем в двух внешних алгебрах $\Lambda^{(*)}$ и $\Lambda_{(*)}$ четыре пространства , имеющие ту же размерность C_n^k: $\Lambda^{(k)}$ и $\Lambda_{(k)}$, $\Lambda^{(n-k)}$ и $\Lambda_{(n-k)}$. Если в V фиксирована метрика, то, как мы знаем, метрика индуцируется во всех пространствах $\Lambda^{(k)}$ и $\Lambda_{(k)}$ и это устанавливает изоморфизм в каждой такой паре.

Оказывается, что вне зависимости от метрики возможно фиксировать изоморфизм между пространствами $\Lambda^{(k)}$ и Λ_{n-k} (и аналогично между $\Lambda_{(k)}$ и $\Lambda^{(n-k)}$), если выбрать образующую в одномерном пространстве $\Lambda_{(n)}$. Точнее,

Утверждение. С помощью выбора образующей $w \in \Lambda_{(n)}$ пространство $\Lambda_{(k)}$ отождествляется с пространством двойственным к $\Lambda_{(n-k)}$ и, тем самым, с $\Lambda^{(n-k)}$.

Действительно, пусть выбран элемент $w \in \Lambda_{(n)}$ в качестве образующей этого пространства. Рассмотрим две k-формы $\alpha \in \Lambda_{(n-k)}$ и $\beta \in \Lambda_{(k)}$. Их внешнее произведение $\alpha \wedge \beta$ лежит в $\Lambda_{(n)}$ и, значит, имеет вид cw, где $c \in \mathbb{R}$. Фиксируя β, мы получим линейное отображение $\Lambda_{(n-k)}$ в $\mathbb{R}$, т.е. элемент $\hat{\beta} \in \Lambda^{(n-k)} : \hat{\beta}(\alpha) = c$. Таким образом получается отображение пространства $\Lambda_{(k)}$ в $\Lambda^{(n-k)} : \beta \mapsto \hat{\beta}$, очевидно, линейное. Это отображение будет изоморфизмом $\Lambda_{(k)}$ на $\Lambda^{(n-k)}$, т.к. размерности этих пространств равны, а ненулевому β будет, разумеется, отвечать ненулевое $\hat{\beta}$. □

Полученное отождествление $\Lambda_{(k)}$ с $\Lambda^{(n-k)}$, пространством двойственным к $\Lambda_{(n-k)}$, называют *двойственностью Пуанкаре.* (Точнее говоря, это — алгебраическая основа топологической двойственности Пуанкаре для инвариантов многообразий, с которыми мы познакомимся позже.) Эта двойственность не связана в общем случае с метрикой, а только с выбором образующей в одномерном пространстве $\Lambda_{(n)}$. Отметим, что замена w на $-w$ соответственно заменит $\hat{\beta}$ на $-\hat{\beta}$.

Двойственная образующая ε в $\Lambda^{(n)}$ есть n-вектор, с помощью которого, как мы знаем, определяется объем и ориентация пространства V.

Но если в V фиксирована метрика, то в $\Lambda^{(n)}$ фиксирован с точностью до знака единичный базисный n-вектор ε (и двойственная форма $w \in \Lambda_{(n)}$). Тем самым, при фиксированной метрике и фиксированном знаке соответствующей образующй в $\Lambda^{(n)}$ (т.е. ориентации пространства V) с одной стороны отождествляются пары $\Lambda^{(k)}$, $\Lambda_{(k)}$ а, с другой, определяется двойственность Пуанкаре. Таким образом, при наличии метрики и ориентации V возникает отождествление всех четырех кососимметрических пространств размерности C_n^k. Кроме того, фиксируется единица объема.

Пример. Рассмотрим тензорный смысл векторного произведения в $\mathbb{R}^3$.

Вектор в $\mathbb{R}^3 = V = V^{(1)}$ мы можем отождествить с 1-формой в $V_{(1)} = \Lambda_{(1)}$ с помощью метрики и с 2-формой в $\Lambda_{(2)}$ с помощью образующего элемента в $\Lambda_{(3)}$ (т.е. единицы объема).

Заметим, что школьное определение вкторного произведения существенно связано с метрикой — результат *ортогонален* сомножителям и его *длина* равна площади параллелограмма, построенного на сомножителях.

Выберем ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 в V. Его двойственный обозначим e^1, e^2, e^3, соответствующие базисы в $\Lambda_{(2)}$ и $\Lambda_{(3)}$ будут $e^2\wedge e^3$, $e^3\wedge e^1$, $e^1\wedge e^2$ и $e^1\wedge e^2\wedge e^3$.

Вектору $v = v^1e_1 + v^2e_2 + v^3e_3$ отвечают, согласно сказанному, формы $v^1e^1 + v^2e^2 + v^3e^3$ и $v^1e^2 \wedge e^3 + v^2e^3 \wedge e^1 + v^3e^1 \wedge e^2)$.

Пусть теперь даны два вектора v и u. Координатами их векторного произведения, как известно, будут три минора (2×3)-матрицы, составленной из их координат. С другой стороны мы двумя способами можем получить вектор из этой пары векторов. Либо взять их внешнее произведение, применить двойственность Пуанкаре, получив 1-форму, и затем взять двойственный вектор. Либо сначала взять двойственные им 1-формы, затем их внешнее произведение и применить двойственность Пуанкаре. Легко проверить, что в обоих случаях координаты полученного вектора совпадут с координатами векторного произведения исходных векторов. Проверим это во втором случае.

Двойственные 1-формы имеют координаты u^1, u^2, u^3 и v^1, v^2, v^3, координаты их внешнего произведения, как мы видели раньше, это миноры матрицы их коэффициентов:

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} u^2 & u^3 \\ v^2 & v^3 \end{vmatrix} e^2 \wedge e^3 + \begin{vmatrix} u^3 & u^1 \\ v^3 & v^1 \end{vmatrix} e^3 \wedge e^1 + \begin{vmatrix} u^1 & u^2 \\ v^1 & v^2 \end{vmatrix} e^1 \wedge e^2,$$

и двойственный по Пуанкаре вектор действительно совпадает с векторным произведением.

Таким образом мы можем рассматривать вместо векторного произведения внешнее произведение векторов. Это простой 2-вектор, определяющий, как мы видели, измерение площади в 2-плоскости, содержащей данные векторы. С другой стороны мы видим, что внешнее произведение любого числа векторов можно рассматривать как обобщение понятия векторного произведения.

Рассмотрим теперь смешанное произведение трех векторов u, v, w. По школьному определению это есть скалярное произведение векторного произведения $[u, v]$ на w. Пусть α, β, γ, соответственно, 1-формы, двойственные этим векторам (в силу метрики). Скалярное произведение $[u, v]$ и w совпадает со значением на γ вектора $[u, v]$ (рассматриваемого как линейная функция на $V_{(1)} = V^*$). Но по определению двойственности Пуанкаре это значение совпадает с координатой внешнего произведения двойственной 2-формы и γ. А по только что доказанному двойственной к $[u, v]$ 2-формой является $\alpha\wedge\beta$. Таким образом, скалярное произведение совпадает с кординатой $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$, т.е. с определителем матрицы координат трех данных векторов.

Рассмотрим еще соотношение между векторным и смешанным произведениями с несколько иной точки зрения. Снова для простоты возьмем ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 в V. Операция "векторное произведение" является кососимметрическим билинейным отображением $V\oplus V$ со значениями в V. Мы можем считать его смешанным тензором B "над группой $SO(3, \mathbb{R})$". Это значит, что в ортонормированных системах с положительной оиентацией он имеет известный геометрический смысл. В произвольных линейных системах он не имеет такого смысла, но мы можем по тензорному правилу написать его координаты в любой линейной системе и с точки зрения такой системы выразить его геометрический смысл относительно ортонормированных координат. Его координаты в ортонормированной системе $B_{ij}^k = [e_i, e_j]^k$ равны нулю, если пара индексов совпадает, и равны ±1 в зависимости от четности перестановки (i, j, k), если они попарно различны. С другой стороны операция "смешанное произведение" есть трилинейная функция над V и есть тензор A нижней валентности 3 над той же группой $SO(3, \mathbb{R})$. Его координаты A_{ijk} совпадают с B_{ij}^k. Так как координаты ортонормированы, A получается из B опусканием индекса k. Поскольку это верно в ортонормированной системе кординат, это будет верно в любой системе (в которой метрика имеет матрицу g_{mn} и опускание индекса производится с помощью этой матрицы).

Оператор звездочка

Напишем формулу, отождествляющую пространство $\Lambda_{(p)}$ и $\Lambda_{(n-p)}$. Этот изоморфизм называется *оператором Ходжа* или изоморфизмом "звездочка" и он так и обозначается $*\colon \Lambda_{(p)} \to \Lambda_{(n-p)}$. Мы запишем этот изоморфизм в тензорных координатах.

Рассмотрим сначала внешнее произведение p-вектора u и $(n-p)$-вектора v. Это произведение $z = u \wedge v$ есть элемент одномерного пространства $\Lambda^{(n)}$. Если в $\Lambda^{(n)}$ выбран базисный элемент w, то координата $\mathbf{z}$ этого произведения есть число, которое линейно зависит от v при фиксированном u. Значит, мы имеем линейную форму на $\Lambda^{(n-p)}$, т.е. элемент $\Lambda_{(n-p)}$. Таким образом получается отображение $\Lambda^{(p)} \to \Lambda_{(n-p)}$. Оно линейно и ядро его, очевидно, нуль. (По p-вектору $u \neq 0$ легко подобрать $(n-p)$-вектор так, что их внешнее произведение не равно нулю.) Т.к. размерности пространств совпадают, это отображение есть изоморфизм. Указанная координата есть значение базисного двойственного к w элемента ω из $\Lambda_{(n)}$ на z. Если перейти к тензорным координатам, то мы должны взять свертку координат z и ω, разделенную на $n!$.

Допустим теперь, что в пространстве V мы фиксировали метрику G с матрицей (g_{ij}) в не ортогональном относительно G базисе $\frac{\partial}{\partial x^i}$ и распространили ее на все тензорные пространства, в том числе кососимметрические, как это было описано выше. Якобиан перехода от ортогональной системы к данной есть $J = \sqrt{g}$. Тогда в $\Lambda_{(n)}$ мы получаем элемент $\omega = \sqrt{g}dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, определяющий единицу объема, тензорные координаты которого — $\sqrt{g}\epsilon_{i_1 \ldots i_n}$.

Тензорные координаты $z = u\wedge v$ равны $\frac{n!}{p!(n-p)!}u^{i_1\dots i_p}v^{i_{p+1}\dots i_n}$, а значение ω на z есть $\frac{1}{p!(n-p)!}u^{i_1\dots i_p}v^{i_{p+1}\dots i_n}\sqrt{g}\epsilon_{i_1\dots i_n}$ (вспомните, как мы определяли внешнее произведение и двойственность кососимметрических тензоров). Но свертку с $\sqrt{g}\epsilon_{i_1\dots i_n}$ можно сделать в два шага: сначала свернуть по первым p индексам, а затем по остальным. Если мы возьмем свертку

$$\frac{1}{p!}u^{i_1\dots i_p}\sqrt{g}\epsilon_{i_1\dots i_n},$$

мы получим координаты $\beta_{i_{p+1}\dots i_n}$ кососимметрического $(n-p)$-тензора β. Беря оставшуюся свертку $\frac{1}{(n-p)!}\beta_{i_{p+1}\dots i_n}v^{i_{p+1}\dots i_n}$, мы очевидно, вычислим значение $(n-p)$-формы β на $(n-p)$-векторе v. Тем самым $\beta_{i_{p+1}\dots i_n} = \frac{1}{p!}u^{i_1\dots i_p}\sqrt{g}\epsilon_{i_1\dots i_n}$ — тензорные координаты формы, сопоставленной p-вектору u отображением, построенным выше.

С другой стороны при наличии метрики мы можем считать p-вектор u образом p-формы α при соответствующем изоморфизме. В тензорных координатах: $u^{i_1\dots i_p} = g^{i_1j_1}\dots g^{i_pj_p}\alpha_{j_1\dots j_p}$. Таким образом, по заданной p-форме α мы получаем $(n-p)$-форму β, тензорные координаты которой суть

$$\frac{1}{p!}g^{i_1j_1}\dots g^{i_pj_p}\alpha_{j_1\dots j_p}\sqrt{g}\epsilon_{i_1\dots i_n}.$$

Построенное изоморфное отображение пространства $\Lambda_{(p)}$ на пространство $\Lambda_{(n-p)}$ обозначается $* : \Lambda_{(p)} \to \Lambda_{(n-p)}$ и называется оператором “звездочка”.

Задача. Доказать, что квадрат звездочки (т.е. композиция $**$) есть отображение $\alpha \mapsto (-1)^{k(n-k)}\alpha$, где k есть валентность α.

[Эту формулу удобно проверять в ортонормированных координатах. Дело в том, что для таких координат $(dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k})\wedge(dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_{n-p}}) = \varepsilon_{i_1\dots i_pj_1\dots j_{n-p}}\ dx^1\wedge\dots\wedge dx^n$. Т.е. получается линейная форма, которая на $dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_{n-p}}$ принимает значение $\varepsilon_{i_1\dots i_pj_1\dots j_{n-p}}$, а на остальных базисных формах нуль (т.к. все индексы должны быть попарно различными). Значит, по двойственности, базисной форме $dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}$ ставится в соответствие $(n-p)$-вектор $\varepsilon_{i_1\dots i_pj_1\dots j_{n-p}}\partial/\partial x^{j_1}\wedge\dots\wedge\partial/\partial x^{j_{n-p}}$ и, в силу метрического отождествления, $(n-p)$-форма $*(dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}) = \varepsilon_{i_1\dots i_pj_1\dots j_{n-p}}dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_{n-p}}$ (без суммирования).

Двойное применение звездочки даст

$$**(dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}) = \varepsilon_{j_1\dots j_{n-p}i_1\dots i_p}\varepsilon_{i_1\dots i_pj_1\dots j_{n-p}}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_{n-p}}.$$

Два первых сомножителя справа отличаются на $(-1)^{p(n-p)}$, т.к. чтобы один получить из другого, нужно p раз сделать транспозицию каждого индекса i_s с $n-p$ индексами j_t. Это доказывает сделанное утверждение.

Проведите доказательство непосредственно с произвольными тензорными координатами.]