Часть третья.
КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ

А.В. ЧЕРНАВСКИЙ

4 июня 2010 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 10. Репер Френе и натуральные уравнения кривой в $\mathbb{R}^n$

Мы вернемся в этой главе к теории кривых в линейном пространстве с тем, чтобы сопоставить гладкой кривой в каждой точке "наиболее прилегающий" к этой кривой репер. Мы примем, что для какой-нибудь (и тогда для любой) регулярной параметризации первые n производных линейно независимы. (Если имеется линейная зависимость на целом интервале параметра, то это значит, что кривая лежит в некотором линейном подпространстве – глава 5 п.8 – и размерность объемлющего пространства можно уменьшить.) Главное понятие, которое мы изучим в этой главе – *кривизна кривой*. Кривизна и ее высшие аналоги служат мерой отклонения кривой от прямой линии или плоскостей высших размерностей. Вместе они позволяют восстановить кривую с точностью до пространственного движения. Можно сказать, что набор кривизн определяет форму кривой (но не ее положение в пространстве).

A. Уравнения Френе

1. Напоминание. Реперное поле вдоль кривой и его производная

Мы по-прежнему рассматриваем в пространстве $\mathbb{R}^n$ канонический репер, орты которого обозначаем $\mathbf{e}_i$. В таком случае каждый репер в этом пространстве определяется начальной точкой и невырожденной матрицей. Канонические координаты векторов репера служат столбцами этой матрицы. Ортонормированным реперам отвечают ортогональные матрицы.

Кривая реперов и кривая в группе матриц. Важное замечание состоит в том, что если дана параметризованная кривая $\mathbf{x}(t)$ и реперное поле $\mathbf{f}_i(t)$ вдоль этой кривой, то ему отвечает кривая в группе матриц, для ортонормированного репера – в группе ортогональных матриц. Обратно, параметризованная кривая в группе матриц порождает реперное поле вдоль каждой (параметризованной тем же параметром) кривой. Это соответствие оказывается возможным благодаря существованию в $\mathbb{R}^n$ параллельного переноса: по матрице мы можем построить репер, приложенный к началу O, и затем перенести его параллельно в точку кривой с данным параметром.

Замечание. *Если потребовать, чтобы первый вектор репера был вектором скорости кривой, то сама кривая определится однозначно начальной точкой с помощью интегрирования этого вектора (как функции от параметра).*

2. Флаг Френе в $\mathbb{R}^n$.

Флаг Френе. Итак, пусть дана гладкая кривая $\mathbf{r}(t)$, первые n производных которой линейно независимы в каждой точке интервала параметризации ($t_1 < t < t_2$). В силу этого условия производные $\frac{d^i\mathbf{r}}{dt^i} = \overset{(i)}{\mathbf{r}}(t),\ 1 \le i \le n$, образуют при каждом значении параметра t репер, приложенный в точке $\mathbf{r}(t)$. Обозначим его $\mathbf{R}(t)$.

Будем считать, что начало пространства совмещено с некоторой точкой кривой, которую будем обозначать O, и ей отвечает начальное значение параметра t, для определенности $t = 0$. Мы имеем дело с регулярной кривой и рассматриваем только регулярные параметризации. Для двух таких параметризаций векторы скорости пропорциональны с ненулевым коэфициентом пропорциональности. Более того. По индукции доказывается, что если для параметров t и q: $\frac{d\mathbf{r}(t(q))}{dq} = c\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ $(c = \frac{dt(q)}{dq})$, то для производных порядка k имеем:

$$\overset{(k)}{\mathbf{r}}(q) = c^k \overset{(k)}{\mathbf{r}}(t) + \dots,$$

где многоточие означает линейную комбинацию производных по t *меньшего порядка.*

В частности, как мы знаем, прямая, несущая вектор скорости, не зависит от параметризации – это касательная. Направление остальных векторов-производных меняется при замене параметра. Однако, из приведенного выражения вытекает, что *плоскость, содержащая первые k производных, не меняется при такой замене.*

Определение. Пусть первые k производных $\mathbf{r}_0^{(i)}$ линейно независимы в точке $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ кривой. Плоскость размерности k, проведенная через точку кривой и содержащая эти производные (отложенные от точки $\mathbf{r}_0$), называется *k-ой соприкасающейся плоскостью.*

Из того же выражения вытекает, что если производные линейно независимы при одном параметре, то они будут такими и при любом другом параметре. Ясно также, что k-ая соприкасающаяся плоскость содержит i-ую при $i < k$. Это вытекает из треугольного вида матрицы этого линейного выражения со степенями числа $c \neq 0$ на диагонали. Мы доказали

Предложение. Если в каждой точке кривой первые n производных радиус-вектора линейно независимы, то в каждой ее точке определена не зависящая от регулярной параметризации вложенная последовательность соприкасающихся плоскостей P_k всех размерностей k от 1 до n так, что производная порядка k от радиус-вектора $\mathbf{r}$ при любой такой параметризации лежит в P_k. ("Вложенная" означает, что плоскости меньшей размерности лежат в бóльших.) ■

Последовательность плоскостей, в которой следующая содержит предыдущую и имеет на единицу бóльшую размерность, называют *флагом*. В нашем случае:

Определение. *Соприкасающимся флагом* и также *флагом Френе* называется в случае линейной независимости первых n производных радиус-вектора последовательность соприкасающихся плоскостей P_i.

3. Репер Френе.

Мы построим теперь, считая, что производные до порядка n линейно независимы, ортонормированный репер, который почти однозначно определен флагом. Именно, для каждой пары соседних плоскостей флага P_{k-1} и P_k возьмем орт, принадлежащий P_k и ортогональный P_{k-1}. Имеется выбор из двух векторов. Мы уточним его позже, а выбранный вектор обозначим $\boldsymbol{\tau}_k$.

Определение. Построенный ортонормированный репер $\boldsymbol{\tau}_k$, $1 \leq k \leq n$, будем называть *репером Френе*.

Первый вектор репера Френе есть вектор-скорости натуральной параметризации, второй – орт главной нормали. В трехмерном пространстве третий орт лежит на *бинормали*, его направление выбирают так, чтобы репер Френе получился положительно ориентированным. В более высоких размерностях выбор идет по другому принципу, нужно, чтобы все кривизны, которые мы скоро определим, оказались положительными.

4. Уравнения Френе.

Первые k векторов репера Френе и первые k производных радиус-вектора кривой служат реперами в одной и той же k-мерной плоскости флага Френе и потому они линейно выражаются друг через друга.

Замечание. Репер Френе получается из репера производных с помощью канонического процесса ортонормализации (с точностью до выбора направления ортов), и поэтому коэффициенты линейного выражения векторов одного из них через векторы другого аналитически зависят от исходных векторов, которые в свою очередь гладко зависят от параметра. Значит и коэффициенты линейных выражений векторов репера Френе через производные будут гладкими функциями параметра.

Дифференцирование такого выражения даст линейное выражение производной вектора $\boldsymbol{\tau}_k$ через первые $k+1$ производных $\mathbf{r}$ и, тем самым, если $k < n$, через первые $k+1$ векторов репера Френе. Так как мы предположили, что первые n производных независимы, $n+1$-ая производная выражается через предыдущие, и, значит, производная n-ого вектора $\boldsymbol{\tau}_n$ репера Френе также линейно выражается через векторы репера. При этом коэффициенты будут гладкими функциями параметра (с понижением, вообще говоря, класса гладкости на единицу). е Итак, производная $\boldsymbol{\tau}'_k$ при $k < n$ линейно выражается через $k+1$ первых векторов репера Френе, а $\boldsymbol{\tau}'_n$ имеет линейное выражение через все n векторов репера. Мы должны будем сейчас уточнить характер этих выражений, принимая, что параметризация кривой натуральная.

Определение. Выражения производных $\boldsymbol{\tau}_k(s)$ по натуральному параметру векторов $\boldsymbol{\tau}_k(s)$ в репере Френе в точке $\mathbf{r}(s)$ составляют систему векторных линейных дифференциальных уравнений, которая называется *системой Френе*, а ее матрица – *матрицей Френе*.

Вид матрицы Френе. Во-первых, элементы матрицы Френе, лежащие выше диагонали соседней сверху к главной, равны нулю (как сказано, $\boldsymbol{\tau}'_k(t)$ выражается через векторы $\boldsymbol{\tau}_i(t)$, где $i \leq k+1$: $\boldsymbol{\tau}'_k(t) = a_1(s)\boldsymbol{\tau}_{k+1}(t) + a_2(s)\boldsymbol{\tau}_k(t) + \dots$). Оказывается, что в натуральном параметре эта матрица имеет еще более простой вид.

Во-вторых, она кососимметрична. В самом деле, если мы отождествим репер Френе в точке O с каноническим, мы можем отождествить реперную функцию $\mathbf{R}(t)$, значениями которой являются реперы Френе в точках кривой $\mathbf{r}$, с кривой в ортогональной группе $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$, проходящей при $t = 0$ через единицу групы. Тогда правая часть этой системы представляет собой вектор скорости этой кривой, выраженный в каноническом репере. Это выражение, как мы знаем, дается кососимметрической матрицей (см.гл.8 п.6). В частности, на главной диагонали стоят нули.

Замечание. Можно более элементарно вывести условие кососимметричности. Равенство нулю диагональных элементов следует из того, что векторы репера имеют единичную длину. Равенство $a_{ij} = -a_{ji}$ в двумерном случае следует из ортонормированности: $0 = (\boldsymbol{\tau}_i, \boldsymbol{\tau}_j)' = (\boldsymbol{\tau}'_i, \boldsymbol{\tau}_j) + (\boldsymbol{\tau}_i, \boldsymbol{\tau}'_j) = a_{ij}(\boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\tau}_j) + a_{ji}(\boldsymbol{\tau}_i, \boldsymbol{\tau}_i) = a_{ij} + a_{ji}$. В общем случае нужно заметить, что производные не изменятся, если спроектировать систему ортогонально на плоскость ортов $\boldsymbol{\tau}_i$, $\boldsymbol{\tau}_j$.

В-третьих, соединение этих двух условий – равенства нулю элементов выше диагонали соседней с главной и кососимметричности матрицы – показывает, что ненулевыми в нашей матрице являются элементы только на двух диагоналях соседних с главной, причем они отличаются только знаком. Итак, *система Френе определяется $n-1$ гладкими функциями параметра s.*

Если заменить параметр, все производные и, значит, указанные функции умножатся на производную длины по новому параметру. Система сохранит указанные особенности. Для определенности нужно выбрать одну параметризацию, и, конечно, выбор натурального параметра наиболее естественный.

Так как для натурального параметра кривой первый вектор репера Френе является вектором скорости, кривая восстанавливается по нему однозначно интегрированием при заданных начальных условиях, т.е. заданном векторе скорости в точке O. Ниже мы покажем, что вообще, если дана система Френе с некоторым параметром, то интегрированием вектора $\boldsymbol{\tau}_1$ получается кривая, для которой данный параметр является натуральным и вся система Френе которой совпадает с данной.

5. Кривизны.

Итак, матрица системы Френе в натуральном параметре имеет такой вид

$$\begin{pmatrix} 0 & k_1 & & & & \\ -k_1 & 0 & k_2 & & 0 & \\ & -k_2 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & 0 & k_{n-1} \\ & & & & -k_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы приходим к следующему выражению производной p-ого орта $\boldsymbol{\tau}_p$ нашего репера:

$$\boldsymbol{\tau}'_p(s) = -k_{p-1}\boldsymbol{\tau}_{p-1} + k_p\boldsymbol{\tau}_{p+1}.$$

Здесь через $k_p(s)$ обозначены последовательно элементы диагонали соседней сверху с главной. Они называются *кривизнами* ($k_p(s)$ называется p-ой кривизной). Первая кривизна называется просто *кривизной* (или главной кривизной.)

В трехмерном пространстве вторая кривизна кривой называется ее *кручением*, мы будем обозначать ее κ.

Контрольный вопрос. Напишите систему Френе в двумерном и трехмерном прострнстве. Как изменится система Френе для плоской кривой при переходе к другому параметру, отличному от натурального?

Обратим внимание на то, что первая и последняя строка матрицы Френе содержат только по одному ненулевому элементу.

Выражение высших производных. С помощью этих уравнений производится рекуррентное выражение последующих производных радиус-вектора через векторы репера Френе. Действительно, $\mathbf{r}^{(p+1)} = (\mathbf{r}^{(p)})'$. Теперь нужно подставить существующее по индуктивному предположению выражение $\mathbf{r}^{(p)}$ через векторы репера и продифференцировать его. Затем остается воспользоваться уравнениями Френе, и заменить производные векторов репера векторами самого репера.

Например, в трехмерном пространстве: $\mathbf{r}' = \boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{r}'' = k(s)\boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{r}''' = k'(s)\boldsymbol{\nu} - k(s)\boldsymbol{\tau} + \kappa(s)\boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{r}^{IV} = (\mathbf{r}''')' = \dots$.

Направление ортов и знаки кривизн. Выбор знака кривизн достаточно произволен. Он связан с выбором направления ортов репера при ортонормализации репера $\mathbf{R}(s)$. Мы можем, очевидно, выбирать их один за другим так, чтобы все коэффициенты $k_p(s)$ оказались положительными. Первый орт по определению направлен в сторону возрастания параметра s.

Ориентация и направление на кривой. Поскольку кривая определяет репер, она определяет и ориентацию в пространстве.

Предложение. Изменение направления обхода кривой изменяет направление четных ортов и не изменяет направления нечетных.

Доказательство. При вычислении производной до взятия предела происходит вычитание векторов приложенных в близких точках, причем порядок этих точек меняется. Следовательно, изменяется знак $\Delta\,\mathbf{r}$ и, в пределе, знак $\boldsymbol{\tau}$. Направление первого орта изменилось, но и направление обхода изменилось, значит, направление его производной не изменилось. В таком случае не должно измениться направление второго орта, а направление его производной изменится. Тогда изменится направление третьего орта и т.д. ■

Следствие. Ориентация, которую задает в пространстве репер Френе кривой, меняется при изменении ее обхода, если размерность пространства имеет вид $4k+1$ или $4k+2$, т.к. произойдет изменение направления нечетного числа ортов. Если размерность равна $4k+3$ или $4k$, то ориентация пространства задается кривой независимо от обхода, т.к. изменит направление четное число ортов. ■

Следствие. *На плоскости* обход кривой задает ориентацию плоскости и она меняется с изменением направления обхода.

В трехмерном пространстве мы можем различать левые и правые кривые. ■

Обычный выбор третьего вектора Френе – бинормали – отличается от описанного здесь: обычно принимается, что репер Френе положителен, а *кручение* – вторая кривизна – может быть отрицательна. Кривая задает ориентацию пространства независимо от ее обхода. Обход зеркального образа кривой определяет противоположную ориентацию пространства. Например, различают левую и правую винтовые линии.

Упражнение. Напишите уравнения левой и правой винтовых линий.

(Винтовая линия описываетя концом отрезка, параллельного плоскости Oxy, второй конец которого равномерно поднимается по оси Oz. За параметр принимается азимут его проекции на плоскость Oxy, так что его высота пропорциональна этому азимуту. Коэффициент пропорциональности положительный для правого винта (штопора) и отрицательный для левого — "штопор для левшей".)

(Напомним еще раз, что мы все время говорим о кривых, первые n производных которых образуют репер в каждой точке некоторого интервала параметризации.)

6. Геометрический и механический смысл кривизны

Кривизна – скорость поворота касательной. Первая формула Френе показывает, что главная кривизна кривой есть модуль производной касательного орта по длине дуги. Это свойство может быть принято за определение кривизны, независимо от высших производных репера. В таком случае имеем:

$$k = k_1 = |\frac{d\boldsymbol{\tau}_1}{ds}| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{\tau}|}{\Delta s} = \lim\frac{|\Delta\boldsymbol{\tau}|}{\Delta\varphi}\lim\frac{\Delta\varphi}{\Delta s},$$

где $\Delta\varphi$ есть угол поворота касательного орта при изменении параметра на Δs. Перенесем параллельно оба касательных орта, отвечающих концам интервала изменения параметра s, совместив их начала, скажем, с точкой O. На большом круге единичной сферы, который они определяют, $\Delta\boldsymbol{\tau}$ – хорда дуги, равной $\Delta\varphi$. Но $\Delta\boldsymbol{\tau}$ и $\Delta\varphi$ являются эквивалентными бесконечно малыми и мы получаем:

Предложение. Кривизна $k(s)$ есть скорость поворота касательной по отношению к длине дуги. ■

Прямая линия – прямая. Кривизна есть мера отклонения кривой от прямой линии, кривизна которой нуль. Обратно:

Предложение. Если в целом интервале кривизна равна нулю, то в этом интервале кривая является отрезком прямой.

Доказательство. Если кривизна равна нулю, то $\boldsymbol{\tau}_1' = \mathbf{r}'' = 0$ и, значит, $\mathbf{r}$ линейно зависит от параметра s. ■

Механический смысл кривизны. Для натурального параметра $k\boldsymbol{\nu}=\frac{d\tau}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$. Если кривая есть траектория движения точки единичной массы в силовом поле, то вектор ускорения $\ddot{\mathbf{r}}$ совпадает с действующей силой и

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\dot{s}^2 + \frac{d\mathbf{r}}{ds}\ddot{s} = k(s)\boldsymbol{\nu}\dot{s}^2 + \boldsymbol{\tau}\ddot{s},$$

$$(\ddot{\mathbf{r}},\boldsymbol{\nu}) = (\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2},\boldsymbol{\nu})\dot{s}^2 = (k\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})\dot{s}^2 = kv^2.$$

Кривизна оказывается пропорциональной абсолютной величине нормальной составляющей силы и обратно пропорциональной квадрату линейной скорости: чем сила больше, тем более она искривляет движение, но чем быстрее движение, тем это влияние меньше.

Заметим, что $(\dot{\mathbf{r}},\tau) = \dot{s}$, $(\ddot{\mathbf{r}},\tau) = \ddot{s}$, но $(\dddot{\mathbf{r}},\tau) = \dddot{s} - k^2\dot{s}^3$, т.е. кривизна влияет на изменение касательной составлящей силы.

Последняя кривизна. Таким же образом последняя кривизна k_{n-1} есть скорость поворота n-ого орта репера Френе.

Предложение. Если последняя кривизна равна нулю в целом интервале, в котором $\mathbf{r}' \neq 0$, то кривая лежит в постоянной плоскости, ортогональной $\boldsymbol{\tau}_n$.

Доказательство. Если производная $\boldsymbol{\tau}_n$ равна нулю, то вектор $\boldsymbol{\tau}_n$ постоянен и $\frac{d}{ds}(\boldsymbol{\tau}_n,\mathbf{r}) = (\boldsymbol{\tau}_n,\frac{d\mathbf{r}}{ds}) = (\boldsymbol{\tau}_n,\boldsymbol{\tau}_1) = 0$. ■

(Иными словами в этом случае нарушено условие независимости производных и n-ая производная линейно выражается через предыдущие.)

7. Плоский случай. Формулы

Кривизна плоской кривой. На плоскости $\mathbb{R}^2$ репер Френе состоит из двух векторов – орта касательной $\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}$ и орта нормали $\boldsymbol{\tau}_2 = \boldsymbol{\nu}$, причем $\frac{d\tau}{ds} = k\boldsymbol{\nu}$ и $\frac{d\nu}{ds} = -k\boldsymbol{\tau}$, k – единственный коэффициент кривизны, который называется просто *кривизной.*

Т.к. кривизна k неотрицательна, поворот $\boldsymbol{\tau}$ (т.е. отклонение от касательной) происходит в сторону, указываемую вектором $\boldsymbol{\nu}$. Иными словами, направление орта нормали выбирается в сторону изгиба кривой.

Произвольный параметр. Полезно уметь вычислять кривизну в случае, если параметр не обязательно натуральный. Для получения соответствующей формулы проведем следующие выкладки (напомним, что производная по s обозначается штрихом, а по t – точкой).

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}' = \dot{\mathbf{r}}t', \quad t' = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

$$k\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\tau}' = \ddot{\mathbf{r}}(t')^2 + \dot{\mathbf{r}}t''$$

$$k[\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\nu}] = [\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\tau}'] = [\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}}]t'^3.$$

Отсюда

$$k = \frac{|[\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}}]|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$$

и в координатах ($\mathbf{r} = (x(t),y(t))$)

$$k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

В п.14 главы 5 мы получили это выражение для $1/R$, где R – радиус соприкасающейся окружности. Таким образом, $k = 1/R$.

Упражнение. Написать выражение кривизны для кривой, заданной неявно с помощью уравнения $F(x, y) = 0$ и также заданной графиком функции $y = f(x)$, принимая $t = x$.

8. Трактриса.

Название этой кривой происходит от латинского слова, означающего "тащить". Для нее отрезок касательной от точки касания до оси абсцисс постоянен. (Представьте себе ребенка, который идет по тротуару и тащит на веревочке тележку, которая катится за ним по мостовой.)

Пусть этот отрезок равен a. Примем за параметр угол α между отрезком и осью абсцисс. Тогда ордината будет $y = a \sin \alpha$. Сразу видно, что особая точка будет при $\alpha = \pi/2$, когда отрезок ортгонален оси.

Чтобы найти абсциссу точки приходится обратиться к интегрированию. Именно, $dy = \operatorname{tg} \alpha dx$ и, значит, $dx = a \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}\, d\alpha$. Интеграл легко берется и мы получаем параметрическое представление нашей кривой:

$$\begin{aligned} x &= a\,(\cos \alpha + \ln \operatorname{tg} \tfrac{\alpha}{2}) \\ y &= a\, \sin \alpha. \end{aligned}$$

Заметим, что постоянная интегрирования выбрана так, что $x = 0$ при $\alpha = \pi/2$ и кривая симметрична относительно оси ординат (слева угол наклона касательной мняется от 0 до $\pi/2$, а справа от $\pi/2$ до π). Точка $x = 0$ действительно особая: касательная в ней вертикальна.

Действительно, $\dot{x}|_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = (-\sin \alpha + \frac{1}{\sin \alpha})|_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = 0 = \dot{y}|_{\alpha=\frac{\pi}{2}}$ и $\ddot{x}|_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = 0$, $\ddot{y}|_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = -a$. (Знак минус связан с тем, что кривая меняет возрастание на убывание, хотя точка особая и этот "поворот" происходит через остановку – первая производная обращается в нуль.)

Интерес представляет геометрическое место центров кривизны трактрисы – ее *эвольвента*. Для этого найдем ее кривизну, используя определение кривизны как скорости (по натуральному параметру) вращения касательной. Так как $ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{a^2}{\operatorname{tg} \alpha}\, d\alpha^2$, получаем

$$\frac{1}{R} = k = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{a} = \frac{y}{a^2 \cos \alpha}$$

(R – радиус кривизны). Но $\frac{y}{\cos \alpha}$ есть отрезок нормали до оси абсцисс. Обозначив его N, получим $RN = a^2$. Значит, отрезок касательной a есть среднее геометрическое между R и N. Так как выпуклость кривой направлена вниз (вторая производная, очевидно, положительна), мы получаем такое геометрическое построение центра кривизны: это есть точка пересечения нормали и перпендикуляра к оси абсцисс в точке пересечения с этой осью касательной к кривой (мы используем то, что высота в прямоугольном треугольнике есть среднее геометрическое отрезков гипотенузы).

Упражнения. Показать, что уравнение эволюты трактрисы есть $y = a\operatorname{ch} \frac{x}{a}$ – *цепная линия.*

Найти координаты центра кривизны при данном значении параметра α.

Показать, что радиус кривизны трактрисы R равен длине дуги цепной линии от особой точки до центра кривизны.

Показать, что цепная линия касается радиуса кривизны трактрисы в центре кривизны.

(Эти свойства цепной линии означают, что она является *эволютой* трактрисы (см. ниже).)

9. Эволюты и эвольвенты

Утверждение. Кривая ζ, образованная центрами кривизны данной кривой $\gamma = \mathbf{r}(s)$ (s – нормальный параметр γ), служит огибающей семейства нормалей γ, т.е. нормали к γ являются касательными к ζ.

Радиусы кривизны γ равны длинам дуг от некоторой начальной точки до соответственной точки на ζ.

Если кривая состоит из центров кривизны двух кривых, то расстяние между соответственными точками этих кривых постоянно

Определение. Кривая ζ, состоящая из центров кривизны кривой γ, называется ее *эволютой*, а γ – *эвольвентой* кривой ζ.

Доказательство. Напишем параметрическое задание кривой ζ: $\boldsymbol{\rho}(s) = \mathbf{r}(s) + \frac{1}{k}\boldsymbol{\nu}$, беря за параметр натуральный параметр кривой γ. Вектор скорости $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ есть $\boldsymbol{\tau} + (\frac{1}{k})^{\cdot}\boldsymbol{\nu} - (\frac{1}{k})k\boldsymbol{\tau} = (\frac{1}{k})^{\cdot}\boldsymbol{\tau}$. Таким образом, вектор скорости направлен по нормали к γ в соответствующей точке.

Возьмем теперь в качестве параметра $\bar{s}$ натуральный параметр кривой ζ и запишем задание γ в этом параметре: $\mathbf{r}(\bar{s}) = \boldsymbol{\rho}(\bar{s}) - R(\bar{s})\bar{\boldsymbol{\tau}}(\bar{s})$, где R – радиус кривизны γ, а $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ – касательный орт ζ в соответственных точках (направление $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ противоположно направлению к точке на γ). Тогда вектор скорости кривой γ есть $\dot{\mathbf{r}} = \bar{\boldsymbol{\tau}} - \dot{R}\bar{\boldsymbol{\tau}} - R(\bar{\boldsymbol{\tau}})'$ ($\bar{\boldsymbol{\tau}}$ орт касательной кривой γ). Согласно предыдущему, орты касательных двух кривых в соответственных точках ортогональны, и мы получаем: $0 = (\dot{\mathbf{r}}, \bar{\boldsymbol{\tau}}) = 1 - \dot{R}$. Интегрирование дает: $R = \bar{s}_0 + \bar{s}$.

Если начальная точка $s = 0$ отвечает точке пересечения этих кривых, то получается, что радиус кривизны γ равен длине дуги ζ до соответственной точки.

С другой стороны из этой формулы следует, что расстояние между соответственными точками двух эвольвент той же кривой постоянно. ■

Упражнение. Найдите кривизну цепной линии, используя то, что она является эволютой трактриссы.

10. Трехмерный случай. Формулы

Трехгранник Френе кривой в $\mathbb{R}^3$. Три оси сопровождающего трехгранника кривой в $\mathbb{R}^3$ это касательная (главная) нормаль и перпендикулярная им *бинормаль*. Орт бинормали обозначается $\boldsymbol{\beta}$. Плоскость, содержащая касательную и нормаль является *соприкасающейся* (см. выше п.2). Две плоскости трехгранника, проходящие через бинормаль, – это нормальная плоскость (ортогональная касательной) и *спрямляющая* (содержащая касательную). Смысл последнего названия станет ясен немного ниже.

Кривизна и кручение. Два коэффициента в уравнениях Френе называются *кривизной* $k = k_1$ и *кручением* $\varkappa = k_2$.

Таким образом, система Френе в трехмерном случае выглядит так:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}' & = & 0 & + & k_1\boldsymbol{\nu} & + & 0 \\ \boldsymbol{\nu}' & = & -k_1\boldsymbol{\tau} & + & 0 & + & \varkappa\boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}' & = & 0 & - & \varkappa\boldsymbol{\nu} & + & 0. \end{pmatrix}$$

Кручение служит мерой отклонения кривой от соприкасающейся плоскости – если кручение нуль в целом интервале, то в этом интервале кривая лежит в постоянной плоскости, как было показано выше в общем случае.

Уравения координатных плоскостей трехгранника для произвольного параметра.

Соприкасающаяся плоскость. В п.13 главы 5 было выведено уравнение соприкасающейся плоскости в общем случае. В трехмерном случае мы можем записать нормальный вектор к этой плоскости как векторное произведение $[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]$ и тогда уравнение соприкасающейся плоскости для кривой $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ будет $([\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}], (\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r})) = 0$ или:

$$(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, (\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r})) = \begin{pmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{pmatrix} = 0.$$

(Греческие буквы обозначают координаты переменной точки на плоскости, а латинские – той точки на кривой, в которой взята соприкасающаяся плоскость.)

Нормальная плоскость. Уравнение плоскости нормальной к вектору $\dot{\mathbf{r}}$ есть $(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = 0$, где $\boldsymbol{\rho}$ – радиус-вектор точки на плоскости, а $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки кривой, в которой проведена плоскость.

Спрямляющая плоскость. Уравнение спрямляющей плоскости (она нормальна к главной нормали кривой) есть $(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}, \boldsymbol{\nu}) = 0$. Чтобы выразить его в прозвольной параметризации кривой, заметим, что $k\dot{s}^2\boldsymbol{\nu} = \ddot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\tau}\ddot{s}$ и $\ddot{s} = (\ddot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\tau})$, и $\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{k\dot{s}^2}(\ddot{\mathbf{r}} - (\ddot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{k\dot{s}^2}(\ddot{\mathbf{r}} - \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|^2}(\ddot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}})$, (т.к. $\boldsymbol{\tau} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$). Таким образом, уравнение записывается в таком виде:

$$(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}, |\dot{\mathbf{r}}|^2\ddot{\mathbf{r}} - (\ddot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}}) = 0.$$

Формула кривизны. Для вычисления кривизны остается справедливой формула, полученная выше для двумерного случая: $k = \frac{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$, но выражение в координатах получается более сложным:

$$k = \frac{\sqrt{(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Формула кручения. Чтобы получить формулу кручения, мы должны к выражениям двух первых производных, приведенных в предыдущем пункте, ($\mathbf{r}' = \dot{\mathbf{r}}t'$, $\mathbf{r}'' = \ddot{\mathbf{r}}(t')^2 + \dot{\mathbf{r}}t''$) добавить выражение третьей производной по натуральному параметру через производные по произвольному параметру: $\mathbf{r}''' = \dddot{r}(t')^3 + 3\ddot{r}t't'' + \dot{r}t'''$.

Это выражение вместе с предыдущими нужно подставить в равенство

$$(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') = ([\mathbf{r}', \mathbf{r}''], \mathbf{r}''') = (k\boldsymbol{\beta}, -k^2\boldsymbol{\tau} + k'\boldsymbol{\nu} + k\varkappa\boldsymbol{\beta}) = k^2\varkappa.$$

Получится $k^2\varkappa = (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})t'^6$. Учитывая, что $t' = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|}$ и $k = \frac{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$, имеем

$$\varkappa = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{k^2|\dot{\mathbf{r}}|^6} = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|^2}.$$

Упражнение. Запишите это выражение в координатах.

Упражнение. Выведите из этих выражений для трехмерного случая:

– равенство нулю кривизны в интервале параметра влечет, что в этом интервале $\ddot{\mathbf{r}}$ пропорционально $\dot{\mathbf{r}}$ (и, значит, кривая является отрезком прямой),

– равенство нулю кручения в интервале параметра означает, что в этом интервале кривая плоская,

– при зеркальном отражении кручение меняет знак.

(Мы условились в общем случае выбирать кривизны k_p положительными. Это определяет репер Френе. Он может задавать ориентацию пространства противоположную канонической. Но в $\mathbb{R}^3$ орт бинормали выбирают так, чтобы ориентация репера Френе совпадала с заданной ориентацией пространства, при этом кручение изменяет знак не только при изменении обхода, но и при зеркальном отражении. Это проще всего увидеть из формулы следующего пункта, выражающей отклонение кривой от соприкасающейся плоскости – при зеркальном отражении в этой плоскости направления как $\boldsymbol{\beta}$, так и кривой не изменятся, а отклонение изменит знак.)

Упражнение. Кривая с постоянными кривизной и кручением – винтовая линия, см. выше конец п.5 и дальше п. Б 5.

11. Разложение Тейлора отклонения от плоскости.

Пусть дана кривая с натуральным параметром $\mathbf{r}(s)$ в окрестности точки $M_0 = \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s_0)$, $s_0 = 0$. Расстояние от кривой до плоскости, заданной нормальным уравнением $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0) = 0$, равняется $l = (\mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$. Знак l положителен, если точка кривой лежит с той стороны, в которую указывает нормальный вектор $\mathbf{n}$.

Разложение l в ряд Тейлора получается подстановкой разложения $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_0' s + \frac{1}{2}\mathbf{r}_0'' s^2 + \frac{1}{6}\mathbf{r}_0''' s^3 + \ldots$ (см.гл. 5, п.3). С точностью до 4-ого порядка оно имеет вид

$$l = (\mathbf{n}, \mathbf{r}_0')s + \frac{1}{2}(\mathbf{n}, \mathbf{r}_0'')s^2 + \frac{1}{6}(\mathbf{n}, \mathbf{r}_0''')s^3 + As^4.$$

Применяя формулы Френе, получаем (индекс 0 опускается):

$$l = (\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau})s + \frac{k}{2}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\nu})s^2 + \frac{1}{6}(\mathbf{n}, -k^2\boldsymbol{\tau} + k'\boldsymbol{\nu} + k\varkappa\boldsymbol{\beta})s^3 + As^4.$$

Общая плоскость. Плоскость, проходящая через точку M_0, вообще говоря, является *трансверсальной* к кривой — $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}) \neq 0$, т.е. не касается ее (не содержит касательную), и расстояние от точки M кривой, приближающейся к M_0, до плоскости – величина того же порядка малости, что и длина дуги $\smile{MM_0}$ или расстояние до M_0.

Касательные плоскости и соприкасающаяся плоскость. Плоскость *касается* кривой в точке M_0, если она содержит касательную в этой точке, это равносильно тому, что $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}) = 0$ и, значит, расстояние от точки кривой до такой плоскости имеет порядок малости по крайней мере второй. Считая, что кривизна в точке M_0 не нуль, мы получим, что этот порядок в точности равен два, если плоскость не соприкасающаяся, т.е. $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\nu}) \neq 0$, например, если это спрямляющая плоскость. Для соприкасающейся плоскости ($(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}) = 0$ и $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\nu}) = 0$) порядок равен трем, если в M_0 не обращается в нуль кривизна или ее производная кручение (или больше, если $k = 0$ и $k' = 0$).

12. Вид кривой в сопровождающем трехграннике

Пересечение кривой с плоскостью. При малом s знак l совпадает со знаком первого ненулевого члена разложения. Этот знак меняется при переходе через точку M_0, если степень s нечетная, и не меняется, если она четная. Изменение знака l означает, что точка переходит с одной стороны плоскости на другую.

Из этого следует, что если плоскость трансверсальная или соприкасающаяся, то точка кривой переходит с одной стороны плоскости на другую, если же это касательная, но не соприкасающаяся, то она остается с одной стороны. (Предполагается, что кривизна и кручение в точке ненулевые.)

Проекции кривой на оси репера Френе. Если координаты в сопровождающем репере вдоль осей $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}$ обозначить соответственно x, y, z, то они будут совпадать с расстояниями до соответствующих координатных плоскостей репера с учетом знака и первые члены разложения этих координат для точки M на кривой будут:

$$\begin{aligned} x &\approx s \\ y &\approx \tfrac{k}{2}s^2 \\ z &\approx \tfrac{k\varkappa}{6}s^3. \end{aligned}$$

Проекции на координатные плоскости. Чтобы получить проекции кривой на одну из координатных плоскостей репера, нужно отбросить дополнительную координату. (Мы снова сохраняем только первые члены разложений.)

Проекция на соприкасающуюся плоскость получается отбрасыванием координаты z, уравнение этой проекции в параметрической форме оказывается уравнением параболы: $x = s, y = \frac{1}{2}ks^2$. "Усы" этой параболы направлены в сторону, указываемую ортом нормали $\boldsymbol{\nu}$.

Проекция на спрямляющую плоскость оказывается кубической параболой $z = \frac{1}{6}k\varkappa x^3$. В зависимости от знака кручения кривая переходит с отрицательной на положительную сторону соприкасающейся плоскости или наоборот, где положительная сторона указана направлением бинормали. (При изменении направления обхода меняет направление и орт бинормали.)

Проекция на нормальную плоскость имеет вид полукубической параболы: $y = \frac{1}{2}ks^2, z = \frac{1}{6}k\varkappa s^3$. Она имеет в точке M_0 *острие*, причем ветви этой проекции лежат по разные стороны от бинормали. (ср. п.9 гл.1).

Б. Кривизны и форма кривой

1. Одинаковость фигур и группы преобразований

Предварительное определение. Две фигуры в пространстве считаются одинаковыми, если их можно перевести друг в друга преобразованием пространства.

Относительность одинаковости. Это определение еще не вполне строго и достаточно расплывчато, т.к. не говорится о том, какого рода должно быть преобразование. Математической формализацией этого понятия "одинаковости" является понятие группы преобразований. Это значит, что для того чтобы ставить вопрос об одинаковости фигур, нужно вначале задаться некоторой группой преобразований. Иначе говоря, допустимые преобразования должны быть обратимыми, и их композиции должны быть допустимыми преобразованиями. Таким образом, одинаковость – понятие относительное.

Две окружности на плоскости, например, одинаковы, если за основную группу принять группу преобразований подобия, но они будут различаться величиной, если за основную группу принять группу движений, сохраняющих расстояния (т.е. ортогональную группу, расширенную параллельными сдвигами). Если же в качестве основной группы взять группу аффинных преобразований, то окружности станут одинаковыми с эллипсами и т.д.

Топологическая одинаковость. Разумеется, нет необходимости ограничиваться группами линейных преобразований. Самой широкой является группа топологических преобразований (гомеоморфизмов). Но эта группа уже слишком широка и одинаковость относительно этой группы может служить, конечно, предметом специальной (и очень содержательной) теории, но слабо отражает интуитивно ясное представление сохранения формы. (Впрочем, ею различаются блин и бублик, велосипедная и футбольная камера, замкнутая и незамкнутая кривые, заузленная и незаузленная кривые и проч.)

Группа движений. Для нас основной группой будет группа (прямых) движений $\mathbb{R}^n$, т.е. группа порожденная поворотами из $\mathbf{SO}(n,\mathbb{R})$ и параллельными переносами. Это максимальная группа линейных преобразований $\mathbb{R}^n$, которые сохраняют расстояния и ориентацию $\mathbb{R}^n$.

Одинаковость кривых. Мы еще вернемся к общему вопросу о линейных преобразованиях $\mathbb{R}^n$, а также о группах преобразований гладких многообразий, сохраняющих расстояния. Сейчас нас интересует вопрос о том, *в какой мере набор кривизн определяет форму кривой.* Мы докажем теорему, в которой утверждается, что в случае, если все кривизны отличны от нуля, кривая определена однозначно с точностью до движения, т.е., во-первых, существуют кривые с заданным набором кривизн и, во-вторых, две кривые с одинаковым набором "одинаковые": переводятся друг в друга движением пространства (возможно, с зеркальным отражением).

Сначала напомним некоторые факты из линейной алгебры и теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Напоминание о скалярном произведении

Пусть дано линейное пространство V с базисом $\mathbf{e}_i$, которое будем считать конечномерным. Пусть также в этом пространстве дано скалярное произведение, имеющее в этом базисе матрицу $G : (\mathbf{v},\mathbf{u}) = g_{ij}v^iu^j$. Как известно, при фиксации второго вектора в этой записи получается линейная функция от первого сомножителя, т.е. второй сомножитель определяет элемент двойственного пространства V^*. Этим (в конечномерном случае) устанавливается изоморфизм V и V^*.

Будем обозначать значение линейной формы $\boldsymbol{\alpha}$ на векторе $\mathbf{v} \in V$ с помощью угловых скобок: $\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}\rangle = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v})$. В пространстве V^* определен базис $\mathbf{e}^j$ двойственный базису $\mathbf{e}_i$, т.е. $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j\rangle = \delta_i^j$. (Индексы координат в пространстве V пишутся вверху, в двойственном пространстве внизу, а нумерация базисных векторов наоборот – внизу для V и вверху для V^*.)

Координаты a_i образа $\boldsymbol{\alpha}$ вектора $\mathbf{x}$ в двойственном базисе определяются через его координаты x^j в исходном базисе соотношением:

$$g_{ij}v^ix^j = (\mathbf{v},\mathbf{x}) = \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}\rangle = a_iv^i.$$

Именно, беря в качестве $\mathbf{v}$ базисные векторы $\mathbf{e}_i$, получим, что

$$a_i = g_{ij}x^j \text{ и } x^j = g^{ij}a_i,$$

где g^{ij} – матрица обратная матрице g_{ij}.

Напомним, что координаты образа вектора $\mathbf{v}$ в двойственном базисе в V^* называются *ковариантными координатами* вектора $\mathbf{v}$ (а его координаты в V – контравариантными).

Базис, как известно, называется *ортонормированным*, если в нем матрица скалярного произведения единичная. Это означает, что скалярный квадрат любого вектора равен сумме квадратов его координат, и равносильно тому, что ковариантные координаты каждого вектора совпадают с его контравариантными. Это можно выразить так: *при изоморфизме V на V^*, определенным скалярным произведением, ортонормированный базис переходит в свой двойственный.*

(Вообще, любая невырожденная билинейная форма определяет изоморфизм V на V^* по тому же правилу, что и скалярное произведение, но скалярные произведения выделяются тем свойством, что обладают базисами, которые переходят в свои двойственные при этом изоморфизме. Позже нам придется рассмотреть и другие случаи.

Отметим, что матрица g_{ij} билинейной формы одновременно служит матрицей соответствующего линейного отображения V на V^*, если в этих пространствах берутся сопряженные базисы.)

3. Линейные дифференциальные уравнения с кососимметрической матрицей.

Система Френе как уравнение для реперов. На систему Френе можно смотреть с разных точек зрения.

Прежде всего это – система векторных уравнений. Ее решением является набор из n кривых $\mathbf{r}_i(s)$ в линейном n-мерном пространстве (или кривая в прямой сумме n экземпляров n-мерных пространств). Переходя к координатам, мы можем также рассматривать ее как систему из n^2 уравнений от n^2 неизвестных скалярных функций.

Однако, заменяя последовательно векторы на их координаты, мы получим n одинаковых линейных скалярных систем. Мы можем рассматривать их решения как n решений одной системы. Опираясь на то свойство линейных систем, что если решения оказываются независимыми в одной точке, то они будут независимыми при всех значениях параметра, мы можем рассматривать эту систему как уравнение для реперной функции. Иными словами мы ищем сразу фундаментальную матрицу решений, рассматривая ее как функцию, которая каждому значению параметра ставит в соответствие репер в n-мерном линейном пространстве. *В таком случае мы можем рассматривать нашу систему как переменное векторное поле на общей линейной группе* $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$.

[Напишем для ясности, независимо от системы Френе, векторную линейную (однородную) систему с переменными коэффициентами в общем виде в $\mathbb{R}^2$ для функций $\mathbf{r}_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_1 &= a(t)\mathbf{r}_1 + b(t)\mathbf{r}_2 \\ \dot{\mathbf{r}}_2 &= c(t)\mathbf{r}_1 + d(t)\mathbf{r}_2. \end{aligned}$$

Эта система эквивалентна двум одинаковым системам — для первых и для вторых координат:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(t)x_1 + b(t)x_2 \qquad & \dot{y}_1 &= a(t)y_1 + b(t)y_2 \\ \dot{x}_2 &= c(t)x_1 + d(t)x_2 \qquad & \dot{y}_2 &= c(t)y_1 + d(t)y_2 \end{aligned}$$

или одной матричной системе:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) & c(t) \\ b(t) & d(t) \end{pmatrix}$$

Обе системы имеют одну и ту же фундаментальную систему решений, скажем, $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, но разные начальные данные, через которые выражаются постоянные коэффициенты решения, имеющего форму $\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}\varphi_1(t)+$ $\begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}\varphi_2(t)$].

Линейные системы с кососимметрической матрицей.

Лемма. Если переменное векторное поле $\mathbf{V}(t)$ в многообразии M в каждой точке подмногообразия N для каждого значения t касается N, то интегральные кривые этого поля, проходящие через точки подмногообразия, лежат в N.

Доказательство. Лемма следует из теоремы существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений. Одно решение, проходящее через $x \in N$, лежит в N, т.к. система может быть ограничена на N. Но это же решение удовлетворяет и данной системе в M.

■

Наша система как векторное поле на группе, может быть записана в виде $\mathbf{U}(t)^{\cdot} = \mathbf{U}(t)A(t)$.

Запись $\mathbf{V}(t) = \mathbf{U}(t)A(t)$, где $\mathbf{U}(t)$ – матрица репера (каждый столбец состоит из координат одного из векторов репера в канонических координатах), означает, что набор векторов-столбцов, составляющих матрицу $\mathbf{V}(t)$ при каждом t выражается в репере столбцов $\mathbf{U}(t)$ с помощью матрицы $A(t)$.

Эта же запись $\mathbf{U}(t)^{\cdot} = \mathbf{U}(t)A(t)$ говорит, что при каждом t мы имеем векторное поле на всей группе $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$, полученное левыми сдвигами вектора $A(t)$ ($\in \mathbb{R}^{n^2}$) в единичном элементе E. (Умножение на матрицу есть линейный оператор в $\mathbb{R}^{n^2}$!)

В нашем случае вектор-производные репера Френе выражаются в этом репере при каждом t с помощью матрицы Френе. Она кососимметрическая в каждой точке.

Мы выяснили в п.6 главы 8, что если вектор выражен в единичной точке E кососимметрической матрицей, то он касается ортогональной группы, являющейся подмногообразием в $\mathbf{GL}(\mathbf{n},\mathbb{R})$. Наше переменное векторное поле на группе $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$, полученное сдвигами в этой группе на ее элементы, касается $\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$ при каждом t в каждой точке ортогональной группы. Действительно, если матрица $\mathbf{U}$ ортогональна, то сдвиг на $\mathbf{U}$ переводит ортогональную подгруппу в себя. Вектор касательный к $\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$ в E переводится этим сдвигом в вектор касательный к $\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$ в $\mathbf{U}$, т.к. сдвиг в группе есть ее диффеоморфизм. В силу леммы, интегральные кривые, пересекающиеся с ортогональной группой, целиком лежат в ней.

Значит, если хотя бы в одной точке решение нашей системы является ортонормированным репером, то оно целиком состоит из ортонормированных реперов! Итак,

Утверждение. Пусть даны векторная система линейных дифференциальных уравнений с кососимметрической матрицей коэффициентов и ортонормированный репер в качестве начального значения. Тогда решение этой системы существует и единственно и при каждом значении параметра решение является ортонормированным репером. ∎

4. Построение кривой по системе Френе

Предложение. Пусть дана точка $\mathbf{r}_0$ и репер $\mathbf{u}_{i0}$ в этой точке. Решение $\mathbf{u}(s)$ системы Френе с коэффициентами $k_i(s) > 0\,, 1 \le 0 \le n{-}1$, и с начальным значением $\mathbf{u}(s_0) = \mathbf{u}_{i0}$ определяет вместе с точкой $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s_0)$ кривую $\mathbf{r}(s)$, для которой натуральным параметром служит параметр s этой системы, и при каждом значении параметра коэффициенты $k_i(s)$ оказываются последовательными кривизнами кривой $\mathbf{r}(s)$. Более того, само решение $\mathbf{u}(s)$, при каждом значении параметра s совпадает с соприкасающимся репером этой кривой в точке $\mathbf{r}(s)$.

Доказательство. Пусть получено решение $\mathbf{u}(s)$. Оно является ортонормированным репером для каждого значения параметра системы, обозначенного нами s. При этом $\mathbf{u}_{i0}$ есть i-ый вектор репера $\mathbf{u}(s_0)$. Кривая $\mathbf{r}(s)$ определяется интегрированием первого вектора решения-репера:

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + \int\limits_{s_0}^{s} \mathbf{u}_1(s)\, ds.$$

Обозначим через $\boldsymbol{\tau}_i$ векторы *ее* репера Френе и через $\hat{k}_i$ *ее* кривизны.

Поскольку $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{u}_1$ и дано, что $|\mathbf{u}_1| = 1$, мы получаем, что $\mathbf{u}_1$ – касательный орт нашей кривой, т.е. он совпадает с $\boldsymbol{\tau}_1$, и s – натуральный параметр.

В таком случае, сравнивая первое уравнение $\dot{\mathbf{u}}_1 = k_1\mathbf{u}_2$ данной системы с первым уравнением Френе $\dot{\boldsymbol{\tau}}_1 = \hat{k}_1\boldsymbol{\tau}_2$ для полученной кривой, имеем

$$k_1\mathbf{u}_2 = \hat{k}_1\boldsymbol{\tau}_2,$$

и, беря модули, – $k_1 = \hat{k}_1$. Тогда $\mathbf{u}_2 = \boldsymbol{\tau}_2$.

Далее рассуждаем по индукции. Производная вектора, для которого на предыдущем шаге было установлено его тождество с соответствующим вектором репера Френе, одинаково выражается через репер Френе кривой и репер-решение системы:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_i &= -k_{i-1}\mathbf{u}_{i-1} + k_i\mathbf{u}_{i+1} = \\ &= \dot{\boldsymbol{\tau}}_i = -\hat{k}_{i-1}\boldsymbol{\tau}_{i-1} + \hat{k}_i\boldsymbol{\tau}_{i+1}. \end{aligned}$$

Вычитая одно выражение из другого, мы получим $k_i\mathbf{u}_{i+1} = \hat{k}_i\boldsymbol{\tau}_{i+1}$. Так как эти векторы – орты, получаем равенство модулей коэффициентов $|k_i| = |\hat{k}_i|$. Направление ортов также совпадает, если они были выбраны так, чтобы все коэффициенты были положительными. Значит, $\mathbf{u}_{i+1} = \boldsymbol{\tau}_{i+1}$. ∎

Двумерный случай. Разберем подробнее для большей ясности вычисления в случае плоской кривой. Мы имеем здесь векторную систему

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}' &= k\boldsymbol{\nu} \\ \boldsymbol{\nu}' &= -k\boldsymbol{\tau}. \end{aligned}$$

Пусть $(x(s), y(s))$ – решение системы (s – параметр решения и автоматически натуральный параметр кривой). Тогда $\boldsymbol{\tau}(s) = (x'(s), y'(s))$ и $\boldsymbol{\nu}(s) = (-y'(s), x'(s))$, т.к. $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}) = 0$.

Имеем две одинаковые системы для первых и для вторых координат. Ограничимся первой:

$$\begin{aligned} x''(s) &= -k(s)y'(s) \\ y''(s) &= k(s)x'(s). \end{aligned}$$

Вектор $\boldsymbol{\tau}$ единичный, т.е. $x'^2 + y'^2 = 1$, отсюда $x''^2 + y''^2 = k^2$.

Положим $x'(s) = u(s)$. Тогда $u'^2 + k^2u^2 = k^2$, т.е. $u' = k\sqrt{1-u^2}$. Это уравнение интегрируется:

$$u(s) = \sin\left(\int_{s_0}^{s} k(s)ds\right).$$

После этого можно найти $x(s)$ и $y(s)$.

Пусть, например, $k(s) = s$. Тогда $u(s) = \sin(\frac{s^2+c_1}{2})$, и

$$x(s) = \int_0^s \sin(\frac{s^2+c_1}{2})ds + c_2.$$

$$y(s) = \int_0^s \cos(\frac{s^2 + c_1}{2})ds + c_3.$$

Докажем теперь основную теорему.

5. Существование и единственность кривой с данным набором кривизн

Теорема. Пусть заданы $n-1$ непрерывных и положительных функций $k_i(s)$, $s_1 < s < s_2$, $0 \in [s_1, s_2]$, $1 \le i \le n-1$, и ортонормированный репер в $O \in \mathbb{R}^n$.

Тогда существует единственная кривая $\mathbf{r}(s) \subset \mathbb{R}^n$, для которой s является натуральным параметром, эти функции служат кривизнами при каждом значении s, $\mathbf{r}(0) = O$, и при этом сопровождающий репер в точке O совпадает с заданным репером.

Докажем сначала две леммы и выведем из теоремы одно следствие.

Лемма 1. *(Сохранение кривизн при сдвиге кривой).* Если две кривые получаются друг из друга пространственным движением, то в соответствующих точках кривизны у них одинаковые.

Доказательство. Во-первых, соответствующие друг другу при движении дуги имеют одинаковые длины, и поэтому соответствующие точки имеют одинаковое значение натурального параметра (если начальные точки отсчета выбраны соответствующими). Векторы приращения $\Delta\mathbf{r}$ при равных приращениях аргумента будут иметь одинаковую длину и, значит, в пределе касательный орт перейдет в касательный орт. Далее рассуждаем по индукции. Последовательность соприкасающихся пространств перейдет в такую же последовательность для кривой-образа: если векторное поле производных порядка $p-1$ перейдет в такое же поле, то ясно, что это будет верно и для производных порядка p. Процесс ортогонализации также инвариантен при движении и, значит, репер Френе переходит в репер Френе. Линейные соотношения сохраняются, т.к. движение – линейная операция. Поскольку и производные векторов репера, как и выше, переходят в соответствующие производные, выражения производных векторов репера Френе через векторы этого репера должны быть в обоих случаях одинаковыми. Коэффициентами этих выражений служат кривизны, которые, таким образом, одинаковы у двух кривых в соответствующих точках. ■

Лемма 2. Для двух данных точек с данными в них ортонормированными и одинаково ориентированными реперами существует ровно одно движение пространства, сохраняющее ориентацию и переводящее точку в точку и репер в репер.

Доказательство. Движение строится как композиция параллельного сдвига, совмещающего начальные точки реперов и поворота с матрицей, выражающей векторы одного репера в другом. Оно единственно, т.к. только тождественное движение оставляет репер неподвижным. ■

Следствие из теоремы. Две кривые с равными кривизнами в точках с одинаковым значением натурального параметра переводятся друг в друга движением пространства.

Доказательство. Для двух кривых мы всегда ровно одним движением можем совместить две их наперед заданные точки и при этом так, что совместятся их реперы Френе в этих точках (если они имеют одинаковую ориентацию, то движение будет сохраняющим ориентацию, если нет, то нужно перейти к зеркальному образу одной из кривых). Передвинем одну кривую так, чтобы совместились две точки данных кривых с одним значением параметра, притом так, чтобы совместились реперы Френе. Значения кривизн при этом у перемещенной кривой не изменятся. Но по теореме она тогда должна полностью совместиться с другой кривой. ■

В этом смысле мы можем сказать, что набор кривизн как функций натурального параметра полностью определяет форму кривой.

Доказательство теоремы. Уравнения Френе представляют собой систему векторных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которую в координатной записи можно представить как систему n^2 обыкновенных дифференциальных уравнений относительно n^2 неизвестных скалярных функций (координат векторов репера).

Мы можем применить к этой системе стандартную теорему существования и единственности для линейной системы, по которой мы можем найти и притом единственным образом функции, удовлетворяющие данной системе. Найденные функции однозначно определяют некоторую кривую $\mathbf{r}(s)$. Точнее, эта кривая однозначно определяется уже векторной функцией $\boldsymbol{\tau}(s)$ интегрированием: $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + \int\limits_{s_0}^{s} \boldsymbol{\tau}(s)\, ds$.

Выше в п.4 показано, что полученная система решений в каждой точке определяет репер Френе найденной кривой.

Т.к. любая кривая с теми же кривизнами и с тем же начальным репером служит решением этой же системы Френе с этими же начальными условиями, такая кривая только одна в силу теоремы единственности решения дифференциального уравнения. Наша теорема доказана. ■

Глава 11. Метрика поверхности (первая квадратичная форма)

А. Длины, углы и площади

1. Риманова метрика

Пока мы пользуемся линейными системами координат, мы имеем простое соответствие между векторами и точками в $\mathbb{R}^n$ и нам безразлично, в какой точке приложен координатный репер. С помощью операции параллельного переноса мы устанавливаем изоморфизмы линейных пространств V_x с началами в точках x.

Нелинейные координаты. Перейдем теперь к нелинейным координатам, заданным, как обычно, в окрестности некоторой точки $A_0 \in \mathbb{R}^n$. Это значит, что нам дан диффеоморфизм $\psi : W \to U$, где W, U – области в $\mathbb{R}^n$, причем $A_0 \in U$. Стандартные координаты точки $x \in W$ мы принимаем за нелинейные координаты точки $y = \psi x \in U$.

Мы должны научиться вычислять длину вектора и скалярное произведение двух векторов, пользуясь нелинейными координатами.

Мы лишены теперь права пользоваться параллельными переносами, т.к. параллельный перенос в области W не переводится дифференциалом ψ в параллельный перенос в области U. Это значит, что если $A_i = \psi\,(B_i)$, $i = 1, 2$, и векторы $\mathbf{v}_i$ в точках B_i параллельны, то векторы $d\psi\,(\mathbf{v}_i) = \mathbf{u}_i$ не обязательно параллельны. Поэтому мы не будем сейчас отождествлять векторы, приложенные к разным точкам, а рассмотрим скалярное произведение в каждой точке отдельно.

Скалярное произведение в нелинейной координатной системе. Пусть дана точка A в U и пусть $\psi B = A$. Пусть даны векторы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, приложенные в B, которые отображаются дифференциалом диффеоморфизма ψ в векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ в A.

Нас интересует, как выразится скалярное произведение векторов $\mathbf{u}_i$ в нелинейной системе координат, т.е. через координаты $\mathbf{v}_i$. (Координаты векторов $\mathbf{u}_i$ в нелинейной системе координат равны, по определению, координатам векторов $\mathbf{v}_i$ в стандартной системе координат.) В матричной форме имеем: $Jv_i = u_i$, $i = 1, 2$, где через J мы обозначаем для краткости матрицу Якоби (а не якобиан) в точке B, а u_i, v_i – *столбцы* координат соответствующих векторов $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{v}_i$. Тогда (индекс T вверху означает транспонирование)

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = u_1^T u_2 = v_1^T J^T J v_2 = v_1^T G v_2.$$

Значит, стандартное скалярное произведение векторов в точке A записывается в нелинейной системе координат как квадратичная форма с матрицей G. Эта матрица имеет вид $J^T J$, где J – невырожденная матрица, в силу чего G является симметричной, невырожденной и положительно определенной. Первые два утверждения очевидны, а третье следует из того, что выражение $v^T J^T J v = (Jv)^T Jv$ есть *стандартный* скалярный квадрат вектора $\mathbf{u} = J\mathbf{v}$, не равного нулю, если $\mathbf{v} \neq 0$.

Таким образом, стандартное скалярное произведение векторов в A выглядит в нелинейной системе координат, как скалярное произведение с матрицей $G = J^T J$. Но эта матрица меняется от точки к точке.

Замена координат. Разумеется, если мы перейдем к новой системе координат, эта матрица заменится на матрицу $J_1^T G J_1$, где J_1 – матрица Якоби диффеоморфизма замены. Мы имеем право использовать для записи скалярного произведения в нелинейных координатах обычную запись билинейной формы, но с той поправкой, что теперь коэффициенты являются функциями от координат точки:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})\,|_A = g_{ij}(A) u^i v^j = g_{ij}(x_1, \, \ldots, \, x_n) u^i v^j.$$

2. Поле скалярных произведений (метрика)

В результате мы можем сказать, что получили полевой объект нового типа. Мы имели дело уже с векторными и ковекторными полями. Теперь мы получили поле билинейных форм. Напомним, что векторы в $\mathbb{R}^n$, приложенные в одной точке, образуют линейное пространство, которое можно рассматривать как касательное пространство к $\mathbb{R}^n$ в этой точке.

Поле билинейных форм — это функция, которая каждой точке ставит в соответствие билинейную форму в касательном пространстве в этой точке. Как обычно, это поле считается гладким, если коэффициенты этих форм являются гладкими функциями в какой-нибудь (и тогда в любой) гладкой системе координат (например, в стандартной). Пока мы рассматриваем такое поле только в точках некоторой области в $\mathbb{R}^n$. Но ясно, что нетрудно перенести его на любое многообразие, что мы немного погодя и проделаем. Нас интересуют сейчас симметричные билинейные формы, они находятся во взаимно однозначном соответствии с квадратичными формами, и мы будем свободно заменять в нашем рассмотрении одни другими.

Однако, чтобы рассматривать поле форм как отображение многообразия в многообразие, нужно определить пространство-образ. Как множество это есть объединение пространств квадратичных форм на касательных плоскостях во всех точках многообразия. Мы не готовы сейчас определить структуру гладкого многообразия на этом объединении. (Впрочем, это несложное упражнение для хорошего студента.) Для области W в эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ это легко сделать – это просто прямое произведение $W \times \mathbf{Q}$, где $\mathbf{Q}$ – пространство квадратичных форм в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$. Оно отождествляется (в канонических координатах) с пространством симметрических матриц. За канонические координаты в нем выбираются те элементы матрицы, которые лежат на диагонали и выше ее. Очевидно, $\mathbf{Q}$ линейное пространство размерности $C_n^2 + n = C_{n+1}^2$, т.е. оно отождествляется с $\mathbb{R}^{C_{n+1}^2}$.

Итак, *поле квадратичных форм в области W — это отображение W в многообразие $W \times \mathbf{Q}$, которое точке $A \in W$ ставит в соответствие точку (A, q) в этом прямом произведении, где $q \in \mathbf{Q}$.*

Мы можем считать, что это есть естественное отображение на график отображения $W \to \mathbf{Q}$. Во всяком случае мы можем записать поле q квадратичных форм в W в виде $\sum q_{ij}(A)\, dx^i\, dx^j$ и считать его непрерывным или гладким или аналитическим, если таковы все функции $q_{ij}(A)$.

Поле квадратичных форм на гладком многообразии. Для произвольного гладкого многообразия, как говорилось, мы не будем здесь определять “расслоения квадратичных форм” по аналогии с касательным расслоением, а используем *метод локальных представителей*. Именно,

Определение. *Полем $q(A)$ квадратичных форм* на гладком k-мерном многообразии M называется сопоставление каждой точке $A \in M$ квадратичной формы $q(A)$ на касательном пространстве $\tau_A(M)$.

Определение. *Локальным представителем поля q* в карте $\varphi : W \to U \subset M$, W – область в $\mathbb{R}^k$, называется квадратичная форма $\tilde{q}$ в области W, значение которой на каждом векторе $\mathbf{v} \in V_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x} \in W$, равно значению q на векторе $d\varphi|_{\mathbf{x}}(\mathbf{v})$ в касательной плоскости $\tau_{\varphi(\mathbf{x})}(M)$.

Если даны две карты $\varphi_i : W_i \to U_i \subset M$, $i = 1, 2$, с пересекающимися образами и координатным преобразованием $\psi = \varphi_2^{-1}\varphi_1$, то квадратичные формы на прообразах пересечения $U_1 \cap U_2$ будут связаны соотношением

$$\tilde{q}_2|_{B_2}(d\psi|_{B_1}\mathbf{v}) = \tilde{q}_1|_{B_1}(\mathbf{v}),$$

где $\psi(B_1) = B_2$ и $\varphi_1(B_1) = \varphi_2(B_2) \in U_1 \cap U_2$.

Ясно, что если один локальный представитель является непрерывным или гладким (или аналитическим и т.п.) в окрестности данной точки, то таковым же будет и другой представитель, если только таким является координатное преобразование. Поэтому мы можем дать такое

Определение. Поле квадратичных форм на многообразии называется гладким класса гладкости p, если таковы его локальные представители в картах атласа, задающего гладкую структуру многообразия.

При этом в окрестности каждой точки достаточно проверить условие гладкости для какой-нибудь одной карты соответствующей гладкости.

Отметим еще раз: в локальной карте локальный представитель поля квадратичных форм имеет вид $\sum q_{ij}(A)\, dx^i\, dx^j$.

Замечание. Вместо педантичного “поле квадратичных форм”, говорят просто о квадратичной форме на многообразии.

Определение гладкости поля *билинейных* форм аналогично. При этом гладкой квадратичной форме по обычному правилу взаимно однозначно отвечает гладкая симметрическая билинейная форма. Соответственно, можно говорить о гладком скалярном произведении и т.д.

Важное замечание. *Вопрос об интегрируемости поля скалярных произведений.* Даже оставаясь в пределах области в $\mathbb{R}^n$, можно поставить вопрос: всякое ли поле билинейных форм с обычными свойствами скалярного произведения (симметрия и положительная определенность) может быть получено указанным путем, т.е. получено из стандартного (“пифагорова”) скалярного произведения переходом к нелинейной системе координат. С аналогичной задачей мы встречались для векторных и ковекторных полей.

Для векторных полей, нигде в данной области не обращающихся в нуль, имеется, как мы знаем, теорема о локальном выпрямлении, согласно которой в малой окрестности каждой точки такое поле может быть заменой координат приведено к виду координатного поля $\frac{\partial}{\partial x^1}$. Иными словами все такие (не обращающиеся в нуль) поля локально устроены одинаково.

Это не так для ковекторных полей (пфаффовых форм или дифференциалов), для которых имеется известный критерий $(\frac{\partial a_i}{\partial x^j} = \frac{\partial a_j}{\partial x^i})$ возможности локального приведения их к виду дифференциала некоторой функции df. А если функция невырождена, т.е. хотя бы один коэффициент $a_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ не обращается в нуль, то и к виду координатного дифференциала dx^i.

Другой пример дают реперные поля, относительно которых ставится вопрос, когда такое поле порождается локальной картой, т.е. является координатным. Критерием этого служит обращение в нуль всех попарных скобок Ли векторных полей, составляющих реперное поле.

Оказывается, для скалярного произведения дело обстоит так же, как для пфаффовых форм и реперных полей. Существуют поля билинейных форм, служащих в каждой точке скалярным произведением, (т.е. симметричных и положительно определенных), которые не могут быть изменением координатной системы в как угодно малой области приведены к стандартному (“пифагорову”) виду сразу во всех точках области.

Имеется и критерий того, когда это может быть проделано, но он существенно сложнее и знакомство с ним в полной мере мы осуществим во втором томе. В двумерном случае это сделано в главе 13.

3. Терминологические замечания.

Во-первых, мы в дальнейшем будем говорить, как это принято, о скалярном произведении как о квадратичной форме, хотя правильнее говорить в этом случае "билинейная форма". Это не имеет большого значения, т.к. квадратичная форма однозначно соответствует симметрической билинейной форме.

Метрика. Во-вторых, поле $g_{ij}(A)dx^i dy^j$ кратко называется *метрикой* по той причине, что с его помощью вычисляются длины векторов и также длины кривых, как мы скоро увидим. (Не следует путать этот термин с метрикой метрического пространства.)

Метрики. При этом термин метрика сохраняется за всякой *симметрической и невырожденной* формой, хотя и *не обязательно положительно определенной.* Иными словами, допускается ее обращение в нуль на ненулевых векторах, лишь бы ее матрица была невырожденной. Простым примером является квадратичная форма $x^2 - y^2$ на плоскости.

Римановы и псевдоримановы метрики.

Определение. Метрика в строгом смысле слова, т.е. положительно определенная в каждой точке, называется *римановой*, а метрики неопределенные – *псевдоримановыми*.

Впрочем, как правило, то, что мы будем говорить о римановых метриках, почти без изменения приложимо и к псевдоримановым.

4. Метрика на многообразии

Первая наша задача заключается в перенесении наших построений на произвольные гладкие многообразия. Тут нет никаких трудностей.

Определение. Пусть дано многообразие M. Метрическим полем на M или просто *метрикой* в M назовем задание метрики (скалярного произведения) $g_A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ в касательном пространстве $T_A(M)$ в каждой точке $A \in M$.

Если дана локальная карта, то она определяет каноническим образом линейную систему координат в каждом касательном пространстве и тогда скалярное произведение получает координатную запись $g_{ij}(A)dx^i dy^j$. Мы предполагаем, что функции $g_{ij}(A)$ являются непрерывно дифференцируемыми в картах данного атласа M.

Метрика в многообразии называется также *первой квадратичной формой.* Это важнейший объект дифференциальной геометрии, она определяет, как мы увидим, *внутреннюю геометрию* многообразия, его собственную форму, которая не зависит от расположения его в пространстве.

Римановы и псевдоримановы многообразия. Введем важное понятие.

Определение. Гладкое многообразие M называется *римановым многообразием*, если оно снабжено римановой метрикой $g(x)$, т.е. положительно определенной квадратичной формой в каждом касательном пространстве с коэффициентами гладко зависящими от точки $x \in M$.

Последнее означает, что в локальных координатах форма g записывается в виде $g_{ij}(x)dx^i dx^j$, где коэффициенты g_{ij} непрерывно дифференцируемы. Классом гладкости метрики g называется минимум класса гладкости ее коэффициентов, где минимум берется по всем картам атласа для M и всем коэффициентам.

Заменяя условие положительной определенности на условие невырожденности, т.е. считая, что на M задана псевдориманова метрика, мы приходим к понятию *псевдориманова многообразия.*

Метрика и длина векторов. Метрика – это задание скалярного произведения в каждом касательном пространстве многообразия. В частности, она позволяет измерять длины касательных векторов и углы между ними с помощью известных формул: $|\mathbf{w}| = \sqrt{g_{ij}(A)w^i w^j}$, $\mathbf{w} \in \tau_A M$ и

$$\cos \widehat{\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2} = \frac{g_{ij}(A)w_1^i w_2^j}{\sqrt{g_{ij}(A)w_1^i w_1^j}\sqrt{g_{ij}(A)w_2^i w_2^j}}$$

Длина кривых на многообразии. Теперь мы можем распространить определение длины кривой, данное в главе 9 п.11 для кривых в $\mathbb{R}^n$, на случай кривых в произвольном римановом многообразии. Мы исходим из формулы $\int |\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt$, где $\mathbf{r}(t)$ – вектор скорости параметризованной кривой. Это выражение может быть перенесено на произвольное риманово многообразие, т.к. длину вектора скорости мы можем вычислить с помощью первой квадратичной формы. Итак,

Определение. Длиной дуги кривой $\mathbf{x}(t) \subset M$ от точки $A_1 = \mathbf{x}(t_1)$ до точки $A_2 = \mathbf{x}(t_2)$ называется интеграл

$$\int_{A_1}^{A_2} \sqrt{g_{ij}(\mathbf{x}(t))dx^i dx^j} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(\mathbf{x}(t))\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)}\, dt$$

Независимость от параметризаци доказывется в точности так же, как это было проделано для случая кривых в $\mathbb{R}^n$ в п.11 главы 9.

Определение. Углом между кривыми в точке их пересечения называется угол между их векторами скорости.

Этот угол определяется через свой косинус, который определяется с помощью первой квадратичной формы по стандартной приведенной выше формуле.

Ясно, что это определение не зависит от параметризаций кривых, т.к. при замене параметризации вектор скорости умножится на скаляр, а значение косинуса не изменится.

Замечание. Если первую квадратичную форму умножить на скалярную функцию, то значения косинусов также не изменятся, т.к. в формуле для косинуса произойдет сокращение.

5. Метрика и расстояние.

Как известно, словом *метрика* в топологии обозначают неотрицательную функцию от пары точек, которая симметрична относительно перестановки аргументов, равна нулю, если и только если аргументы совпадают, и удовлетворяет аксиоме треугольника. С помощью такой функции измеряют *расстояния*. Множество, в котором задана метрика, называется *метрическим пространством.* Значение такой функции для пары точек называется расстоянием между этими точками.

Метрика определяет топологию с помощью ε-окрестностей, служащих базисом топологии. Метрика в нынешнем новом смысле на многообразии позволяет определить функцию расстояния, т.е. метрику в топологическом смысле.

Расстояние в римановом многообразии. Пусть дана риманова метрика $g(x) = g_{ij}(x)dx^i dx^j$ в многообразии M. За расстояние $s(x,y)$ между точками M принимается максимальная нижняя грань длин кусочно гладких кривых, соединяющих эти две точки. Такая грань существует, поскольку длины кривых неотрицательны и

Упражнение. Любые две точки в связном гладком многообразии можно соединить кусочно гладкой кривой конечной длины.

Нетрудно показать и то, что такое расстояние равно нулю только для совпадающих точек. Докажем сначала лемму для областей евклидова пространства.

Лемма. Пусть в области $U \subset \mathbb{R}^n$ задано поле $g(x)$ положительно определенных симметричных квадратичных форм. Для каждой точки $x_0 \in U$ найдется окрестность U_0 и положительное число c так, что $\rho_0(x_1) > c\,r_0(x_1)$ для всех $x_1 \in U_0$, где $r_0(x_1)$ – стандартное расстояние между x_0 и x_1 в $\mathbb{R}^n$ (т.е. длина отрезка $l = [x_0, x_1]$), а $\rho_0(x_1)$ – максимальная нижняя грань длин (в смысле метрики g) гладких кривых, соединяющая x_0 и x_1 в U_0.

Доказательство. В силу компактности сферы и положительной определенности g найдется $\bar{c} > 0$ так, что $g(\mathbf{r}) = g_{ij}(x_0)dx^i dx^j > \bar{c}^{\,2}$ на единичных векторах $\mathbf{r} = (dx^i)$ в точке x_0. По непрерывности g, то же верно и для единичных векторов во всех точках некоторой окрестности U_0 точки x_0. Для вектора $\mathbf{r} = (dx^i)$ произвольной длины $|\mathbf{r}|$ в любой точке A этой окрестности тогда можно написать $g_A(\mathbf{r}) = g_{ij}(A)dx^i dx^j > \bar{c}^{\,2}|\mathbf{r}|^2 = \bar{c}^{\,2}\Sigma_i(dx^i)^2$. Окрестность U_0 можно взять шаровой.

Пусть γ – произвольная гладкая кривая, соединяюшая x_0 с x_1 в U_0, ρ_γ – длина γ и $l = [x_0, x_1]$ – прямолинейный отрезок с концами x_0 и x_1. Тогда

$$\rho_\gamma = \int_\gamma \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j} > \bar{c}\int_\gamma \sqrt{(dx^i)^2} \geq \bar{c}\; r_0(x_1). \qquad \blacksquare$$

Поскольку для любой кривой γ, соединяющей точки x_0 и x_1, длина $\rho_\gamma > \bar{c}\; r_0(x_1)$, мы получаем для точной грани требуемое неравенство $\rho_0(x_1) > c\,r_0(x_1)$, взяв $c = \frac{1}{2}\bar{c}$.

Следствие. Расстояние между двумя различными точками риманова многообразия M строго больше нуля.

Доказательство. Пусть даны точки x_0 и x_1 в M. Возьмем какую-нибудь карту $\varphi : V \to U \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in V$. Пусть $U_1 \subset U$ – шар в $\mathbb{R}^n$ с центром $\varphi(x_0)$ и V не содержит точки x_1. Любая кривая, соединяющая точку $\varphi(x_0)$ с точкой вне U_1 должна иметь дугу, соединяющую в U точку $\varphi(x_0)$ с точкой на границе U, и потому она имеет длину (в смысле метрики в V, перенесенной в U) больше, чем $c\,r_0 > 0$, где r_0 – радиус U_1. $\blacksquare$

Введенная функция $s(x,y)$ (равная наибольшей нижней грани длин кусочно гладких кривых, соединяющих x и y), очевидно, симметрична, неотрицательна и равна нулю, как мы показали, если и только если $x = y$. Она также удовлетворяет аксиоме треугольника. В самом деле, сумма расстояний от точки z до точек x и y равна, очевидно, наибольшей нижней грани длин кусочно гладких кривых, соединяющих x и y и проходящих через z. Она может только уменьшиться, если не нужно требовать, чтобы кривые содержали z.

Итак, *риманово многообразие является метрическим пространством.* Риманова метрика однозначно определяет расстояние между точками многообразия.

В дальнейшем мы будем говорить *метрика* только в смысле *риманова метрика*, а под *расстоянием* в M будем понимать расстояние, определенное в M с помощью его римановой метрики так, как это было описано выше.

6. Метрика и отображения

Посмотрим, как ведет себя метрика по отношению к отображениям многообразий.

Напоминание о векторных и ковекторных полях. Вспомним, что если дано непрерывно дифференцируемое отображение $M_1 \xrightarrow{F} M_2$, то векторы из касательной плоскости в точке A первого многообразия переводятся дифференциалом этого отображения в касательную плоскость в точке $F(A)$ второго многообразия. Мы видели в главе 7 (п.2), что, к сожалению, нельзя, вообще говоря, сказать, что при этом векторные поля на первом многообразии переводятся в векторные поля на втором, т.к. в одну точку могут отобразиться две или больше точек и тогда в точке-образе появится несколько векторов, т.е. мы не получим векторного поля.

Для ковекторных полей ситуация иная. Мы должны в этом случае рассмотреть для точки $F(A) = B \in M_2$ кокасательную плоскость и ее отображение в кокасательную плоскость в точке A сопряженное дифференциалу. Это отображение вполне определено и мы по заданному ковектору в кокасательной плоскости к точке $B \in M_2$ получаем ковектор в каждой точке в прообразе B. Поэтому ковекторное поле в M_2 определяет ковекторное поле в M_1. Аналогично строится встречное отображение билинейных форм:

Предложение. По данному гладкому отображению $M_1 \xrightarrow{F} M_2$ и полю q билинейных форм в M_2 однозначно строится поле билинейных форм $\tilde{q}$ в M_1 так, что $\tilde{q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = q(dF|_A(\mathbf{u}), dF|A(\mathbf{v}))$. В этом случае говорят, что форма $\tilde{q}$ *индуцирована* формой q или, что она является прообразом q.

Доказательство. Очевидно, указанное в формулировке предложения требование однозначно определяет билинейную форму на $\tau|_A(M)$. Ее матрица $J^T G J$, где J – матрица Якоби F в A, а G – матрица q, для фиксированных карт в окрестностях A и $F(A)$. Класс гладкости $\tilde{q}$ равен минимуму классов гладкости q и F. ■

Случай скалярного произведения. Если в образе дано поле скалярных произведений, то в прообразе получится в каждой точке симметрическая билинейная форма, но она не обязательно будет положительно определена. Именно, она будет равна нулю на векторах, которые отображаются дифференциалом в нулевой вектор:

Предложение. Индуцированная скалярным произведением форма будет неотрицательно определенной всегда, а невырожденной, т.е. скалярным произведением, она будет, если и только если дифференциал имеет нулевое ядро. В частности, это будет так для диффеоморфизмов, вложений и погружений. Во всяком случае размерность многообразия-прообраза должна быть не больше размерности образа. ■

Итак, если гладкое отображение в каждой точке имеет нулевое ядро дифференциала (т.е. является погружением, в частности, если это – диффеоморфизм), то метрическое поле в образе индуцирует метрическое поле в прообразе. В случае диффеоморфизма (в этом случае имеется обратное отображение) мы получаем, что и наоборот поле в прообразе индуцирует поле в образе.

7. Метрика подмногообразия $\mathbb{R}^n$

Наиболее важный для нас случай последнего результата это случай тождественного отображения подмногообразия $M \subset \mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^n$, причем в $\mathbb{R}^n$ берется стандартное скалярное произведение. Рассмотрим формулу получающейся в M метрики в трех стандартных случаях локального задания M.

1-ый случай (параметрический). Пусть локальная карта в окрестности U точки $A \in M$ задана отображением $F : W \to \mathbb{R}^n$, которое диффеоморфно отображает на U область W в $\mathbb{R}^k$.

Обозначим стандартные координаты точек в $\mathbb{R}^n$ через x^i, а в $\mathbb{R}^k$ через t^α. Элементами матрицы Якоби служат производные $\frac{\partial x^i}{\partial t^\alpha}$. Пусть даны векторы $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ в касательной плоскости в точке A многообразия. Обозначим их стандартные координаты в $\mathbb{R}^n$ через u^i и v^i, а координаты в данной локальной карте (т.е. стандартные координаты в $\mathbb{R}^k$ их прообразов) через u^α и v^α ($u^i = \frac{\partial x^i}{\partial t^\alpha} u^\alpha$). Тогда для векторов $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ в касательной плоскости в точке A многообразия их стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ будет записываться как

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} u^i v^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial t^\alpha} u^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial t^\beta} v^\beta = g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta,$$

где матрица получившейся формы G равна $J^T J$, а J – матрица Якоби.

(В данном случае нам приходится суммировать по повторяющимся верхним индексам, в отличие от обычно принимаемого соглашения. Это соответствует транспонированию первой матрицы.)

Заметим, что коэффициентами квадратичной формы оказались стандартные скалярные произведения в $\mathbb{R}^n$ столбцов матрицы Якоби, т.е. векторов $\mathbf{r}_\alpha$ с координатами $\frac{\partial x^i}{\partial t^\alpha}$:

$$g_{\alpha\beta} = (\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta).$$

2-й случай (неявное задание). Пусть дано отображение $F : U \to \mathbb{R}^{n-k}$, неособое во всех точках прообраза M точки $C \in \mathbb{R}^{n-k}$. Иными словами, нам дано неявное представление области k-мерного многообразия M в виде системы уравнений

$$F_i(x^1 \dots x^n) = c_i.$$

Дифференцируя каждое уравнение в каждой точке $A \in M$, получаем систему однородных линейных уравнений для касательных векторов в этой точке:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x^j}\, dx^j = 0.$$

Эта система невырождена по условию на задание многообразия (F неособо в A) и мы можем выразить линейно $n-k$ из этих дифференциалов через остальные.

Допустим, последние дифференциалы выражаются через k первых. Это значит, что в окрестности точки A наше многообразие параметризуется проекцией на плоскость первых k координат. Чтобы в такой локальной карте в окрестности A выразить стандартное скалярное произведение пространства $\mathbb{R}^n$ для векторов $\mathbf{u} = (du^i)$, $\mathbf{v} = (dv^i)$ из касательной плоскости многообразия M в точке A, нужно просто подставить в выражение $\sum du^i\, dv^i$ выражение последних координат через первые.

3-ий случай. Случай графика отображения из одной координатной плоскости в другую можно рассматривать как частный случай предыдущего с тем добавлением, что сразу дана возможность параметризовать многообразие проекцией в ту координатную плоскость, на которой задано отображение.

8. Метрика на поверхности в $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим двумерные поверхности в трехмерном пространстве. Этот случай для нас основной.

Координаты на поверхности. Итак, нам дано двумерное многообразие M, расположенное в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. Мы вводим в окрестности $U \subset M$ точки A_0 локальную карту с координатами (u, v). Мы будем отождествлять точки M с их радиус-векторами $\mathbf{r}(u, v)$. Тогда в касательной плоскости τ_A в каждой точке $A \in U$ мы имеем репер $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$.

Метрика на поверхности. Коэффициентами метрики (или первой квадратичной формы), индуцированной на M, служат, как мы видели, стандартные скалярные произведения этих векторов:

$$E = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u), \quad F = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v), \quad G = (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v).$$

Иными словами в данной локальной карте метрика имеет вид:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Эта запись выражает скалярный квадрат вектора $(du,\, dv)$ в касательной плоскости τ_A в координатах локальной карты. Значит, это – квадрат дифференциала дуги любой кривой, которая имеет этот вектор своим вектором скорости.

Линейный элемент и длина дуги. Дифференциал дуги, лежащей на поверхности, т.е. дифференциал радиус-вектора (в локальных координатах: $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u\, du + \mathbf{r}_v\, dv$) называют также *линейным элементом*. Так как $|d\mathbf{r}| = ds$, скалярный квадрат $d\mathbf{r}^2$ есть ds^2. Так как локальные координаты в M это стандартные координаты в $\mathbb{R}^2$, мы можем вычислять длину дуги, лежащую в пределах одной карты в M, по формуле

$$\int \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \int \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}dt,$$

где t – гладкая параметризация кривой в M.

Случай неявного задания. Если поверхность задана неявно, уравнением $F(x, y, z) = 0$, то мы должны допустить, что в некоторой локальной карте одна из частных производных F, скажем, $\frac{\partial F}{\partial z} = F_z$ отлична от нуля. Тогда мы можем написать

$$dz = -\frac{F_x}{F_z}dx - \frac{F_y}{F_z}dy.$$

Значит,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + (\frac{F_x}{F_z}dx + \frac{F_y}{F_z}dy)^2$$

и коэффициенты нашей квадратичной формы имеют вид:

$$E = \frac{F_z^2 + F_x^2}{F_z^2}, \quad F = \frac{F_x F_y}{F_z^2}, \quad G = \frac{F_z^2 + F_y^2}{F_z^2},$$

а сама форма –

$$ds^2 = \frac{(F_z^2 + F_y^2)dx^2 + 2F_xF_y\, dx\, dy + (F_z^2 + F_y^2)dy^2}{F_z^2}$$

Случай графика. Если поверхность задана графиком функции $z = f(x, y)$, т.е. $F = z - f(x, y)$, то $F_z = 1$ и

$$E = 1 + f_x^2, \ \ F = f_x f_y, \ \ G = 1 + f_y^2,$$

или $1 + p^2$, pq, $1 = q^2$, если использовать *обозначения Монжа*: $f_x = p$, $f_y = q$.

Неравенства для коэффициентов. Поскольку первая квадратичная форма представляет собою скалярное произведение, она, конечно, является положительно определенной квадратичной (или билинейной) формой. Из высшей алгебры известны критерии положительной определенности. В нашем случае они означают положительность диагональных элементов E и G и определителя $EG - F^2$. Выполнение этих условий можно проверить и непосредственно. Для E и G это очевидно, поскольку они сами являются скалярными квадратами координатных векторов $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$. Что касается определителя, то он также оказывается скалярным квадратом, именно векторного произведения этих векторов. Это вытекает проще всего с помощью тождества Лагранжа

$$\begin{gathered}([\mathbf{r}_u,\ \mathbf{r}_v], [\mathbf{r}_u,\ \mathbf{r}_v]) = \\ = \quad (\mathbf{r}_u,\ \mathbf{r}_u)(\mathbf{r}_v,\ \mathbf{r}_v) - (\mathbf{r}_u,\ \mathbf{r}_v)^2 = \begin{pmatrix} (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \\ (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) & (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v) \end{pmatrix},\end{gathered}$$

что есть $EG - F^2$.

Обе части равенства равны, как доказывается в аналитической геометрии, квадрату площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$, левая по школьному определению, а правая как квадрат определителя дифференциала карты, рассматриваемого как линейное отображение координатной плоскости на касательную.

Упражнение. Докажите последнее утверждение. (Более общая формула доказана в п.12.)

[Докажем последнее утверждение. Пусть в $\mathbb{R}^3$ даны два вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Дополним эту пару до репера $R = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}\}$ вектором $\mathbf{z}$, единичной длины и ортогонального обоим векторам $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, и построим линейное отображение $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, переводящее единичный репер $R_0 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в репер R. Матрица (A) этого отображения имеет столбцами координаты векторов репера R. Определитель этой матрицы равен смешанному произведению векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{z}$, т.е., объему параллелепипеда, построенного на векторах репера R и, значит, площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, т.е. $|[\mathbf{u}, \mathbf{v}]|$. В то же время, как нетрудно видеть, произведение этой матрицы на ее транспонированную есть матрица, полученная окаймлением матрицы Грама (т.е. нашей матрицы $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$) единицей на диагонали и нулями. Ее определитель g равен $EG - F^2$.

Итак, g есть квадрат длины или скалярный квадрат вектора $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$.

Контрольный вопрос. Покажите, что g равен сумме квадратов трех миноров матрицы координат векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

Задача. Обобщите доказанное утверждение: квадрат объема k-мерного параллелепипеда в $\mathbb{R}^n$ равен определителю Грама для репера, состоящего из сторон этого параллелепипеда.]

С определителем $g = EG - F^2 = |[\mathbf{r}_u,\ \mathbf{r}_v]|^2$ мы будем встречаться постоянно.

Косинус угла между двумя векторами $\mathbf{w}_1 = (u_1, v_1)$, $\mathbf{w}_2 = (u_2, v_2)$ пишется по формуле, приведенной выше в общем виде:

$$\cos \widehat{\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2} = \frac{Eu_1u_2 + F(u_1v_2 + u_2v_1) + Gv_1v_2}{\sqrt{Eu_1^2 + 2Fu_1v_1 + Gv_1^2}\sqrt{Eu_2^2 + 2Fu_2v_2 + Gv_2^2}}$$

Формула для синуса и ортогональность координатных линий. Векторное произведение, как известно, по модулю равно площади параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях, которая в свою очередь равна произведению их модулей на синус угла между ними (взятого в положительную сторону). В таком случае мы получаем выражение для синуса угла θ между координатными линиями в данной точке:

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

Отсюда сразу видно, например, что для ортогональности координатных линий в данной точке необходимо и достаточно, чтобы средний коэффициент в первой квадратичной форме равнялся нулю. (Это, конечно, видно и из выражения для косинуса.)

Выведем также выражение для синуса угла φ между любыми двумя векторами в касательной плоскости. Мы снова используем выражения для площади параллелограмма.

Векторное произведение векторов $u_1\mathbf{r}_u + v_1\mathbf{r}_v$ и $u_2\mathbf{r}_u + v_2\mathbf{r}_v$ есть $(u_1v_2 - v_1u_2)[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$. Значит,

$$|[u_1\mathbf{r}_u + v_1\mathbf{r}_v, u_2\mathbf{r}_u + v_2\mathbf{r}_v]| = (u_1v_2 - v_1u_2)\sqrt{EG - F^2}.$$

Таким образом

$$\sin \varphi = \frac{(u_1v_2 - v_1u_2)\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{Eu_1^2 + 2Fu_1v_1 + Gv_1^2}\sqrt{Eu_2^2 + 2Fu_2v_2 + Gv_2^2}}.$$

Контрольный вопрос. Напишите выражение для тангенса угла между кривыми, пересекающимися в данной точке.

9. Ортогональные системы координат

Локальная изометрия с плоскостью. Мы уже упомянули фундаментальный вопрос, можно ли при заданной метрике найти локальную систему координат, в которой эта метрика выражалась бы так же, как стандартная метрика плоскости, т.е. чтобы средний коэффициент был бы тождественно нулевым, а крайние – единичными. Мы можем назвать поверхность в этом случае *локально изометричной плоскости*, т.к. в этом случае диффеоморфизм локальной карты устанавливает соответствие области на поверхности и области на плоскости, при котором соответствующие друг другу кривые будут иметь одинаковые длины.

По внешности эта задача напоминает алгебраическую задачу приведения квадратичной формы к каноническому виду с той разницей, что здесь коэффициенты зависят от точки поверхности.

Однако, дело не только в этом. Операция приведения имеет канонический характер и мы можем проводить ее одновременно во всех точках, сохраняя непрерывную дифференцируемость коэффициентов. Таким образом такое приведение осуществить можно. Но оно не будет связано с введением новой системы координат! Мы в этом случае действовали бы непосредственно в касательных пространствах, строя реперное поле, которое не порождалось бы локальной картой, *не было бы координатным.* Коэффициенты потеряют свой смысл скалярных произведений координатных векторов.

Мы увидим в главе 13, что эта задача разрешима далеко не для всякой метрики. К концу настоящей главы мы опишем класс тех поверхностей, для которых это имеет место, но доказательство, что для других поверхностей это не так, придется отложить до гл.13.

Ортогональность координатных линий. Между классом всех поверхностей и локально изометричных плоскости имеются промежуточные классы. Прежде всего для любой поверхности можно устранить средний коэффициент. Мы видели, что для этого необходимо и достаточно, чтобы координатные кривые образовывали два ортогональных друг другу семейства (т.е. чтобы в каждой точке кривая одного семейства была бы ортогональна кривой другого.) Такие системы координат всегда существуют. Назовем их *ортогональными.*

Построение ортогональной системы координат. Возьмем в любой системе координат одно из двух семейств координатных кривых. В каждой точке возьмем вектор скорости проходящей через нее кривой этого семейства. Получим поле ненулевых векторов. В каждой точке возьмем единичный вектор ортогональный вектору полученного поля и образующий с ним положительный репер. Это также ненулевое поле, интегральные кривые которого будут ортогональны кривым исходного семейства и будут параметризованы натуральным параметром.

Этим построено два ортогональных семейства кривых. Но векторные поля, с помощью которых они построены, вообще говоря, не будут координатными и естественные их параметры нельзя принять за координаты.

Мы можем, однако, ввести локальную систему так, что кривые этого семейства станут (по крайней мере в окрестности данной точки) координатными кривыми. Именно, достаточно взять по кривой из каждого семейства, проходяшие через данную точку A, с их фиксированными регулярными параметризациями и за координаты каждой точки $\mathbf{x}$ в малой окрестности A взять значения параметров точек пересечения этих кривых с кривыми из обоих семейств, проходящих через $\mathbf{x}$.

Контрольный вопрос. Проверьте, что таким образом введена регулярная локальная система координат в окрестности A. Иначе говоря, существует диффеоморфизм окрестности A на область в $\mathbb{R}^2$, при котором введенные координаты точек окрестности становятся стандартными координатами образов этих точек

В построенной системе координат метрика (индуцированная вложением поверхности в $\mathbb{R}^3$) будет иметь вид $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$. Но параметризации координатных кривых будут, очевидно, отличными от введенных вначале. В частности, параметризация кривых не будет натуральной, если только какой-либо из коэффициентов не окажется тождественно единицей.

Оказывается возможным построить ортогональную систему координат так, чтобы по крайней мере кривые одного семейства получили натуральный параметр, так что один из коэффициентов E или G станет равным единице. Однако, это требует использования дополнительной техники и мы вернемся к этому вопросу позже в гл....

Замечание. Убрать средний коэффициент можно было бы и непосредственно, указав требуемое преобразование локальных координат. Запишем $ds^2 = (\sqrt{E}dx + \sqrt{F/2}dy)^2 + (G - \frac{F^2}{4})dy^2$. Нужно найти такую функцию $T(x)$, для которой $\frac{\sqrt{E}dx + \sqrt{F/2}dy}{\sqrt{T}}$ оказалось бы полным дифференциалом dz (так называемый *интегрирующий множитель*). Тогда $ds^2 = Tdz^2 + (G - \frac{F^2}{4})dy^2$. Этот интегрирующий множитель не всегда находится явным образом, хотя наше геометрическое рассуждение показывает, что он существует.

Упражнения. Записать метрику плоскости в полярной системе координат. Записать метрику сферы с центром в O в сферической системе координат.

Записать метрику конуса, метрику цилиндра, метрику поверхности, образованной касательными к данной кривой $\mathbf{r}(l)$ (l – натуральный параметр на кривой).

10. Изотермические метрики и поверхности вращения

Изотермические или конформные метрики. Рассмотрим метрики поверхностей, точнее, локальных карт, в которых не только $F = 0$, но и $E = G$, т.е. форма отличается от евклидовой множителем (зависящим от точки поверхности): $ds^2 = E(du^2 + dv^2)$. Это так называемые *изотермические* метрики или метрики *конформно эквивалентные плоской*. В локальной карте с такой первой квадратичной формой измерение углов совпадает с евклидовым.

Это следует из выведенной выше формулы для косинуса угла. В самом деле, нетрудно видеть, что в этой формуле числитель и знаменатель отличаются от евклидова случая на множитель E^2, который сократится, и тогда останется евклидова формула.

Изотермические координаты существуют для любой метрики, но доказательство в общем случае требует решения достаточно сложного уравнения в частных производных (см. ...). Частным случаем поверхностей, для которых нетрудно построить изотермическую систему координат, служат *поверхности вращения*.

Репер $\{\mathbf{e}, \mathbf{g}\}$. Для параметризации такой поверхности и в других задачах полезно воспользоваться ортом $\mathbf{e}(\varphi)$ луча в плоскости, наклоненного под углом φ к оси абсцисс. Очевидно, $\mathbf{e}(\varphi) = \cos\,\varphi\;\mathbf{i} + \sin\,\varphi\;\mathbf{j}$, где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – стандартный репер в $\mathbb{R}^3$. Обозначим производную $\dot{\mathbf{e}}(\varphi) = -\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j}$ через $\mathbf{g}(\varphi)$. Тогда $\dot{\mathbf{g}}(\varphi) = -\mathbf{e}(\varphi)$.

Поверхность вращения. Зададим в открытой полуплоскости Oxz, $x > 0$ кривую параметрически: $x = \eta(t)$, $z = \zeta(t)$. Эта кривая будет называться образующей. Если орт по оси z обозначить $\mathbf{k}$, то параметрическое задание кривой, полученной из данной вращением ее плоскости вокруг оси Oz на угол φ, будет $\mathbf{r} = \eta(t)\mathbf{e}(\varphi) + \zeta(t)\mathbf{k}$. Совокупность этих кривых образует однопараметрическое семейство, их объединение есть поверхность, параметризованная парой параметров (t, φ).

Легко проверяется, что все точки этой поверхности неособые (нужно учесть, что $\eta > 0$ и $\dot\eta^2 + \dot\zeta^2 > 0$).

Кривые, в которые при вращении полуплоскости последовательно переходит образующая кривая, называются *меридианами*, а окружности, которые описывает при этом каждая ее точка, называются *параллелями* поверхности. Они образуют координатные линии полученного параметрического задания. Первая квадратичная форма есть скалярный квадрат дифференциала радиус-вектора. Она легко находится после дифференцирования и возведения в квадрат

$$\begin{gathered} ds^2 = (d\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = \\ = (\dot\eta(t)\mathbf{e}(\varphi)dt + \eta(t)\mathbf{g}d\varphi + \dot\zeta(t)\mathbf{k}dt, \dot\eta(t)\mathbf{e}(\varphi)dt + \\ + \eta(t)\mathbf{g}d\varphi + \dot\zeta(t)\mathbf{k}dt) = \eta^2 d\varphi^2 + (\dot\eta^2 + \dot\zeta^2)dt^2. \end{gathered}$$

Видно, что меридианы и параллели образуют ортогональную сеть (что, впрочем, ясно и непосредственно, т.к. плоскости, проходящие через ось вращения, являются нормальными плоскостями окружностей-параллелей).

Если l – нормальный параметр на образующей кривой (обозначение s уже занято), то $\eta'^2 + \zeta'^2 = 1$ и $ds^2 = \eta^2 d\varphi^2 + dl^2 = \eta^2(d\varphi^2 + \left(\frac{dl}{\eta}\right)^2)$.

Остается положить $u = \int \frac{dl}{\eta(l)},\; v = \varphi$ и форма приводится к изотермическому виду

$$ds^2 = \eta^2(u)(du^2 + dv^2).$$

11. Измерение площади поверхности

Кроме длин и углов, метрика позволяет вычислять площади. Мы не можем здесь заниматься подробным напоминанием, известным из анализа, теории измерения площади поверхности. Мы не будем говорить и о многомерном обобщении этой теории, т.е. об измерении объемов в многомерных многообразиях. В полном объеме, так сказать, это будет проделано только во втором томе.

Напоминание. Площадь поверхности не может быть разумно определена как предел площадей вписанных многогранников (по прямой аналогии с вписыванием ломаных в дугу кривой.) Известный пример ("сапог Шварца", см....) показывает, что предел может не существовать. Поэтому вместо вписывания многогранников поступают иначе.

Схема определения площади поверхности. Для локальной карты берут разбиение ее прообраза в координатной плоскости сеткой малых квадратов и образ каждого квадрата заменяют параллелограмом с вершиной в образе одной из вершин и со сторонами – касательными векторами, образами при дифференциале сторон квадратика в этой вершине.

Сумма площадей параллелограмов, вычисленная в трехмерном пространстве, и является аппроксимацией площади поверхности, т.к. она имеет предел, не зависящий от локальных координат и от способа подразделения прообраза на квадраты. Это, конечно, только очень грубая картина и мы должны отослать в этом месте за строгим изложением к курсу математического анализа.

Вычисление площади двойным интегралом. Касательные векторы, которые мы приняли за стороны параллелограма в какой-либо из вершин подразделения, это $\mathbf{r}_u du$ и $\mathbf{r}_v dv$. Площадь построенного на них параллелограма есть $|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|dudv$. Видно, что сумма этих выражений по всем квадратам есть интегральная сумма для двойного интеграла, взятого по области, в которой определен диффеоморфизм локальной карты. Итак, площадь области поверхности, покрытой этой картой, есть $S = \iint |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|\, dudv$, или

$$S = \iint \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

Определение площади двойным интегралом. Мы поступим здесь, как и в одномерном случае: примем этот интеграл за определение площади поверхности. Нужно только доказать независимость результата от выбора параметризации.

Доказательство независимости от карты. При переходе к другой координатной системе определитель матрицы формы умножится на квадрат якобиана перехода, а корень из него – на модуль якобиана, который как раз и должен появиться при переходе к новой системе координат по правилу замены переменной в двойном интеграле:

$$S_1 = \iint \sqrt{E_1G_1 - F_1^2}\, du_1dv_1 =$$
$$= \iint \sqrt{EG - F^2}|J|\, du_1dv_1 = \iint \sqrt{EG - F^2}\, dudv = S.$$

Здесь J – якобиан матрицы координатного перехода (производные переменных u_1, v_1 по старым переменным u, v). ■

Площадь большой области. Если нужно подсчитать площадь области, которая не покрывается одной локальной картой, то нужно разбить ее конечным числом гладких дуг на конечное число кусков, каждый из которых покрыт одной картой и воспользоваться свойством аддитивности интеграла, чтобы показать, что результат не будет зависеть от подразделения. Аккуратное проведение этого рассуждения здесь также будет опущено. Главный факт, на который нам нужно обратить внимание: *измерение площади определяется здесь метрикой.*

Метрика и площадь. Хотя мы не останавливаемся на систематическом изложении теории измерения площадей на поверхности, сделаем все же уточняющее замечание о связи метрики и площади. В намеченной нами схеме метрика была нужна для того, чтобы определить площадь параллелограмма. Именно, в области определения локальной карты мы имеем малый квадрат, стороны которого, исходящие из некоторой вершины, рассматриваем как векторы. Дифференциал диффеоморфизма карты переводит эти векторы в векторы в касательной плоскости, взятой в образе этой вершины. Эта пара векторов образует в касательной плоскости репер, и нам нужно взять площадь параллелограмма, для которого векторы репера служат сторонами. В этом месте мы замечаем, что так как параллелограмм лежит в трехмерном пространстве, в котором дана стандартная метрика, площадь этого параллелограмма определена.

Вспомним теперь, что в линейном пространстве любой конечной размерности, если объем какого-то параллелепипеда принят за единичный, а его ориентированные стороны за единичный репер, то объем параллелепипеда, построенного на любом другом репере равен определителю перехода к нему от единичного репера. В таком случае мы имеем возможность определить площади ориентированных областей на поверхности (и в общем случае объемы областей в многомерном многообразии), если нам задано ориентирующее реперное поле и мы принимаем в каждой точке заданный там репер за единичный. Таким образом метрика нам нужна только для того, чтобы определить единичные объемы в касательных плоскостях, но в принципе мы можем задать их и независимо от метрики. В обычных задачах, однако, связь объема и метрики оказывается существенной. Но можно встретиться и с необычной задачей, когда единичные объемы задаются из соображений не связанных с метрикой.

Вычисление площади. Посмотрим теперь, как вычисляется площадь поверхности, по данному определению, при различных способах задания поверхности.

Параметрическое задание. В этом случае $\sqrt{EG - F^2}$ заменяется на $|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|$.

Неявное задание. Если поверхность задана неявным образом с помощью уравнения $F = 0$, причем $F_z \neq 0$, то, используя вычисленные выше значения коэффициентов первой квадратичной формы, получаем для корня из определителя матрицы этой формы значение

$$\sqrt{\frac{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}{F_z^2}} = \frac{|\nabla F|}{|F_z|} \quad \text{и} \quad S = \iint \frac{|\nabla F|}{|F_z|}\, dxdy.$$

Случай графика. Если поверхность представлена графиком функции $z = f(x, y)$, то аналогично получаем для корня из определителя

$$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

12. Тождество Лагранжа.

Утверждение. Пусть даны две пары векторов в $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Тогда

$$([\mathbf{u},\mathbf{v}],\ [\mathbf{a},\mathbf{b}]) = \det\begin{pmatrix} (\mathbf{u},\mathbf{a}) & (\mathbf{u},\mathbf{b}) \\ (\mathbf{v},\mathbf{a}) & (\mathbf{v},\mathbf{b}) \end{pmatrix}$$

[**Доказательство.** Пусть даны две пары векторов в $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Обозначим координаты векторного произведения первой пары m^1, m^2, m^3, второй пары — n^1, n^2, n^3.

(Напомним, что координатами векторного произведения двух векторов служат миноры матрицы, составленной из столюцов координат этих векторов, причем первая координата есть минор, полученный вычеркиванием первой строки, вторая – второй строки и третья – третьей строки.)

Рассмотрим произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} (\mathbf{a},\mathbf{u}) & (\mathbf{a},\mathbf{v}) & (\mathbf{a},\mathbf{m}) \\ (\mathbf{b},\mathbf{u}) & (\mathbf{b},\mathbf{v}) & (\mathbf{b},\mathbf{m}) \\ (\mathbf{n},\mathbf{u}) & (\mathbf{n},\mathbf{v}) & (\mathbf{m},\mathbf{n}) \end{pmatrix}$$

(Значок ^{T} указывает транспонирование матрицы.) Определитель каждой матрицы слева равен скалярному произведению векторных произведений наших пар векторов. (Нужно взять разложение определителя по нижней строке.) Матрица справа есть

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{a},\mathbf{u}) & (\mathbf{a},\mathbf{v}) & 0 \\ (\mathbf{b},\mathbf{u}) & (\mathbf{b},\mathbf{v}) & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{m},\mathbf{n}) \end{pmatrix}$$

Таким образом, беря определители, получаем равенство:

$$(\mathbf{m},\mathbf{n})^2 = \det\begin{pmatrix} (\mathbf{a},\mathbf{u}) & (\mathbf{a},\mathbf{v}) \\ (\mathbf{b},\mathbf{u}) & (\mathbf{b},\mathbf{v}) \end{pmatrix} (\mathbf{m},\mathbf{n}),$$

и сокращая (в предположении, что m и n не ортогональны), получаем требуемое равенство. ■

Контрольный вопрос. Верно ли наше равенство, если m и n ортогональны?]

Б. Огибающие и развертывающиеся поверхности

1. Уравнения в частных производных, огибающие и характеристики

Уравнения в частных производных и огибающие. Системы кривых, зависящие от конечного числа параметров, встречаются чаще всего как интегральные кривые векторных полей или, что то же самое, решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения уравнений в частных производных представляются многомерными поверхностями (графиками функций) и хотя их полная совокупность обычно слишком велика, чтобы представить ее как систему с конечным числом параметров, все же имеется возможность обозреть эту совокупность с помощью конечномерных систем, хотя бы для уравнений первого порядка.

Именно, такая система решений называется *полным интегралом*, если другие решения (в некотором смысле почти все) получаются с помощью специальной конструкции построения огибающих, к изложению которой мы и приступаем. Разумеется, эта конструкция полезна не только в теории уравнений в частных производных, но и в самой дифференциальной геометрии.

Мы ограничимся для простоты системами *поверхностей*, т.е. подмногообразий коразмерности один (задаваемых, как мы помним, каждое одним уравнением, а не системой уравнений). Но мы будем рассматривать поверхности в пространстве $\mathbb{R}^n$ произвольной размерности, т.к. изложение совершенно одинаково для пространств всех размерностей.

Огибающие поверхностей в $\mathbb{R}^n$. Итак, пусть задано уравнение, зависящее от конечного числа k параметров

$$F(x^1, \ldots, x^n, c^1, \ldots, c^k) = 0,$$

где c^i – параметры. Каждому набору параметров (возможно, из некоторой области, скажем, заданной системой неравенств $c_{i1} < c^i < c_{i2}$) отвечает поверхность, которую обозначим $F(c)$.

Назовем поверхность, заданную уравнением $\varphi(x^1, \ldots x^n) = 0$, *огибающей* данного семейства, если в каждой своей точке она касается одной из поверхностей семейства (т.е. ее касательная плоскость совпадает с касательной плоскостью поверхности семейства).

Мы будем также считать, что в каждой точке касание происходит только с одной поверхностью, (касание с каждой поверхностью может происходить по целому подмногообразию меньшей размерности). В таком случае параметры c^i оказываются функциями точки огибающей. Иначе говоря, если мы параметризуем поверхность $\varphi = 0$ посредством $n-1$ параметров t^j, то мы получим, кроме функций $x^i(t^j)$, задающих точки на этой поверхности, еще и функции $c^m(t^j)$, причем если их подставить в функцию F, она обратится в нуль:

$$F(x^1(t^1, \ldots, t^{n-1}), \ldots, x^n(t^1, \ldots, t^{n-1}), c^1(t^1, \ldots, t^{n-1}), \ldots, c^k(t^1, \ldots, t^{n-1})) = 0.$$

Характеристики. Мы предположим, что параметры c^i можно принять за часть локальной координатной системы на огибающей поверхности, т.е. что ранг матрицы Якоби системы функций $c^j(t^m)$ максимален. Отсюда, в частности, следует, что $k \leq n-1$. В таком случае можно ожидать, что касание поверхности семейства с огибающей поверхностью происходит по многообразию размерности $n-1-k$. Наибольший интерес представляет случай касания вдоль кривых (в теории уравнений в частных производных они называются характеристическими кривыми или *характеристиками*). Поэтому мы ограничимся случаем $k = n-2$ (если $n = 3$, то $k = 1$).

2. **Уравнение огибающей**

Вывод уравнения огибающей. Значение дифференциала F при фиксированном наборе параметров c, т.е. для фиксированной поверхности семейства, на касательном векторе к этой поверхности равно нулю. Значит, при фиксированном c для такого вектора, имеющего координаты dx^i:

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} dx^i = 0.$$

Продифференцируем теперь тождество $F = 0$, полученное подстановкой вместо x^i и c^j их выражений через t^m:

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial F}{\partial c^i} dc^i = 0.$$

Здесь дифференциалы dx^i, dc^j следует выразить через dt^m : $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial t^m} dt^m$, $dc^j = \frac{\partial c^j}{\partial t^m} dt^m$.

Первая половина этой суммы равна нулю, т.к. частные производные по каждой переменной берутся при фиксированных значениях других переменных, а вектор dx^i является касательным к огибающей и, значит, к поверхности семейства в данной точке, так что мы можем применить предыдущее равенство. Поэтому получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial c^i} dc^i = 0.$$

Мы допустили, что ранг матрицы Якоби системы функций $c^j(t^m)$ в точке касания огибающей и поверхности семейства максимален. Поэтому можно найти для каждого j вектор (dt^m), который матрица Якоби переведет в вектор dc со всеми нулевыми координатами dc^i, кроме j-ой, dc^j. Поэтому каждая производная в отдельности равна нулю. В результате мы получаем систему из $k+1$ уравнений: начального уравнения $F=0$ и еще k уравнений, приравнивающих нулю производные F по параметрам:

$$\begin{gathered} F(x^1,\dots,x^n,\,c^1,\dots,c^k)=0\\ F_{c^1}(x^1,\dots,x^n,\,c^1,\dots,c^k)=0\\ \dots\\ F_{c^k}(x^1,\dots,x^n,\,c^1,\dots,c^k)=0. \end{gathered} \tag{$*$}$$

Из последних k уравнений этой системы можно получить (вообще говоря) функции, выражающие параметры c^i через координаты. Подставив их в первое уравнение, мы получим уравнение огибающей.

Дискриминантная поверхность. На самом деле решения этого уравнения будут содержать огибающую, если она имеется, но они могут также содержать и другие точки, где поверхности семейства имеют особенности (если мы их допускаем). Поэтому в общем случае получаемое решение этой системы называется *дискриминантной поверхностью.*

Проводя рассуждения в обратном порядке, мы получим, что касание этой поверхности и поверхностей семейства заведомо произойдет в тех точках решения системы, где не обращаются одновременно в нуль все частные производные $\frac{\partial F}{\partial x^i}$, т.е. где поверхности семейства имеют неособые точки.

В самом деле. Возьмем вектор, касательный к дискриминантной поверхности. В силу первого уравнения системы, он приложен к точке на одной из поверхностей семейства. Т.к. он касается дискриминантной поверхности, значение на нем дифференциала левой части этого уравнения в координатах t_i равно нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t^m}dt^m+\frac{\partial F}{\partial c^i}\frac{\partial c^j}{\partial t^m}dt^m=0.$$

Тогда с помощью остальных уравнений системы мы получаем равенство нулю на этом векторе дифференциала левой части, взятого при условии постоянства параметров, т.е. для поверхности семейства. Сделать вывод, что вектор касается этой поверхности, можно, только если не равны нулю все производные $\frac{\partial F}{\partial x^i}$.

Итак, либо точка дискриминантной поверхности лежит на огибающей, либо это – особая точка поверхности семейства, требующая особого анализа.

Определение характеристик. На ту же систему ($*$) можно посмотреть иначе. Если фиксировать в ней значения параметров, то мы получим $k+1=n-1$ поверхностей, пересечение которых, в общем случае (при условии невырожденности соответствующей матрицы Якоби) даст одномерное (почему?!) многообразие, т.е. кривую. Эта кривая будет *характеристикой* – кривой касания поверхности семейства и огибающей. Таким образом мы получаем k-параметрическое семейство характеристик, на которые оказывается расслоенной огибающая.

Упражнение. Характеристикой при данном значении параметра служит предельное положение кривой пересечения поверхности с этим значением параметра и поверхности с близким значением при стремлении последнего к данному значению параметра.

Огибающая поверхность как полный интеграл. Огибающая поверхность имеет в каждой точке A те же первые производные, что и поверхность семейства, проходящая через эту точку. Действительно, уравнение огибающей имеет вид

$$\varphi(x^1,\dots,x^n,\,c^1(x^1,\dots,x^n),\dots,c^k(x^1,\dots,x^n))=0,$$

где функции $c^i(x^1,\dots,x^n)$ получены из системы $F_{c^j}=0$. Но тогда $\varphi_{x^i}=F_{x^i}+\Sigma_j F_{c^j}c^j_{x^i}=F_{x^i}$.

Отсюда следует, что если все функции $F(x,c)$ служат решениями некоторого уравнения в частных производных первого порядка, то и огибающая φ является решением того же уравнения.

Если в такой системе $F(x,c)$ решений дифференциального уравнения первого порядка число параметров c равняется числу n переменных x и ранг $n\times(n+1)$-матрицы $(F_{c^j}\ F_{c^j x^i})$ равен n, то эта система называется *полным интегралом* даного уравнения. Хотя, как мы видели, такая конечномерная система дает бесконечно много новых решений (по одному для каждого подсемейства, которое можно получить, связывая параметры функциональной зависимостью), этот прием не дает, вообще говоря, всех решений. Например, если перемножить левые части двух уравнений, то полный интеграл каждого из них будет полным интегралом нового уравнения, но ни один из них не даст всех решений.

Один важный пример мы рассмотрим в следующем пункте.

3.**Развертывающаяся поверхность как огибающая семейства плоскостей**

Огибающие плоскостей – развертывающиеся поверхности. Рассмотрим в качестве важного для дальнейшего пример, в котором поверхности семейства являются плоскостями в трехмерном пространстве. Огибающая такого семейства называется *развертывающейся* поверхностью. Основание для такого названия выяснится позже.

Итак, пусть нам дано семейство плоскостей, которое мы возьмем в соответствии с предыдущим однопараметрическим. Плоскости возьмем в нормальной форме:

$$(\mathbf{N}(c), \mathbf{r}) + D(c) = 0.$$

Дифференцируя по параметру, получаем второе уравнение:

$$(\dot{\mathbf{N}}(c), \mathbf{r}) + \dot{D}(c) = 0.$$

Уравнение огибающей получается при исключении параметра. Если же фиксировать значение параметра, то получится уравнение характеристики, которая в нашем случае является прямой как пересечение двух плоскостей. Для ее существования, т.е. для того, чтобы плоскости пересекались по прямой, нужно, чтобы их нормальные векторы не были параллельны. (Если они параллельны для целого интервала параметра, то параллельны нормальные векторы огибающей, которая тогда является плоской областью, т.е. частью одной из плоскостей семейства, и тогда эта плоскость огибает сама себя. Но поверхности семейства мы, конечно, не считаем огибающими.)

Итак, огибающая, если она существует, должна состоять из прямых, т.е. быть *линейчатой поверхностью.*

Ребро возврата. Попробуем теперь найти на поверхности кривую, которая является огибающей этого семейства прямых, т.е. это семейство должно состоять из касательных прямых такой кривой. Если нам это удастся, то мы получим удобное описание нашей поверхности как *поверхности касательных*, поверхности, образованной касательными к некоторой кривой. (Можно сказать, что сложность описания нашей поверхности уменьшится на одну размерность.)

Чтобы получить эту огибающую, нужно поступать так же, как выше для поверхностей в пространстве. Допустим, что такая огибающая кривая существует. Продифференцируем в ее точке по ее касательному вектору уравнение $F_c = 0$, где c выражено через координаты точек кривой. Получится уравнение $F_{cx^i}dx^i + F_{cc}dc = 0$. Но в точке касания касательный вектор направлен по характеристике и обращает первую сумму в этом равенстве в нуль, т.к. он касателен к поверхности $F_c = 0$ (содержащей эту характеристику). Это дает третье уравнение $F_{cc} = 0$. Решая систему трех уравнений ($F = F_c = F_{cc} = 0$), получаем кривую, лежащую на огибающей, которая в общем случае может и не существовать. Если она существует, то называется *ребром возврата.*

Ребро возврата развертывающейся поверхности. В нашем случае при каждом значении параметра c точка на ребре возврата является точкой пересечения трех плоскостей, т.е. решением системы трех линейных уравнений. Для однозначной разрешимости ее необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был ненулевым. Этот определитель равен смешанному произведению трех векторов $\Delta = (\mathbf{N}, \dot{\mathbf{N}}, \ddot{\mathbf{N}})$. Решение имеет параметром c, который гладкий, но не обязательно всюду регулярный.

Дифференциальное уравнение развертывающихся поверхностей. Семейство всех плоскостей в $\mathbb{R}^3$ трехпараметрическое $z = c^1x + c^2y + c^3$. Однопараметрические семейства можно образовать, принимая c^1 за параметр c и беря в качестве c^2 и c^3 функции от этого параметра: $z = cx + u(c)y + v(c)$. Дифференцируя по x и y, получаем: $z_x = c,\ z_y = u(c)$ и

$$z_y = u(z_x).$$

– уравнение первого порядка, для которого наше однопараметрическое семейство служит полным интегралом. Это уравнение зависит от произвольной функции u. Мы можем устранить эту функцию, чтобы получить одно уравнение, решениями которого являются все плоскости в $\mathbb{R}^3$, однако оно будет уже уравнением второго порядка. Для этого продифференцируем еще раз по x и по y: $z_{yy} = u'z_{xy},\ z_{xy} = u'z_{xx}$, откуда имеем, исключая u':

$$z_{xy}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0.$$

Мы показали, что этому уравнению удовлетворяют все развертывающиеся поверхности (если они не имеют вертикальных направлений). В п.7 гл.13 мы покажем обратное, что все решения этого уравнения являются развертывающимися поверхностями. Наше рассуждение будет чисто геометрическим.

4. Три типа развертывающихся поверхностей

Поверхности касательных. Рассмотрим сначала случай, когда в данном интервале значений параметра $\Delta \neq 0$ и параметр c регулярный на ребре возврата. Для каждого значения c в этом интервале имеется одна точка ребра возврата. Касательная прямая в этой точке к ребру возврата есть характеристика – в нашем случае пересечение двух плоскостей $(\mathbf{N}, \mathbf{r}) = -D$ и $(\dot{\mathbf{N}}, \mathbf{r}) = -\dot{D}$. Нормальные векторы этих плоскостей ортогональны характеристике и, значит, касательному вектору $\dot{\mathbf{r}}$ ребра возврата: $(\mathbf{N}, \dot{\mathbf{r}}) = 0$ и $(\dot{\mathbf{N}}, \dot{\mathbf{r}}) = 0$.

Из этих равенств вытекает (после дифференцирования первого и учета второго), что $(\mathbf{N}, \ddot{\mathbf{r}}) = 0$, т.е. плоскость семейства касается ребра возврата и содержит вектор второй производной по параметру. Значит, это – соприкасающаяся плоскость.

Итак, ребро возврата в этом случае существует, его касательные совпадают с характеристиками данного семейства, а соприкасающиеся плоскости – с самими плоскостями. Иными словами, в невырожденном (т.е.

общем) случае, когда $\Delta \neq 0$ и параметр c регулярен, наше семейство есть семейство соприкасающихся плоскостей некоторой пространственной кривой, а огибающая поверхность образована касательными к этой кривой.

Конические поверхности. Второй случай также относится к случаю необращения в нуль определителя Δ. Это случай, когда при всех значениях параметра в некотором интервале, мы получаем одну и ту же точку в пространстве. Тогда все характеристики проходят через эту точку и мы получаем *коническую поверхность*. Таким образом в этом случае поверхности семейства состоят из касательных плоскостей к некоторой конической поверхности, касание проходит по образующим этой конической поверхности, ребро возврата вырождается в вершину конуса.

Цилиндрические поверхности. Наконец, рассмотрим случай, когда определитель обращается в нуль в некотором интервале значений параметра. Здесь $\ddot{\mathbf{N}}$ линейно выражается при каждом значении параметра через $\mathbf{N}$ и $\dot{\mathbf{N}}$. Это – условие параллельности вектора $\mathbf{N}$ постоянной двумерной плоскости (гл.5, п.8), так что плоскость семейства остается перпендикулярной этой постоянной плоскости.

Но той же плоскости будет перпендикулярна и плоскость с нормальным вектором $\dot{\mathbf{N}}$. Значит, то же верно и для характеристик, которые являются пересечением этих двух плоскостей при каждом значении параметра. Отсюда следует, что огибающая состоит из прямых параллельных одной и той же прямой, т.е. является *цилиндрической поверхностью.*

Итак, имеется *три типа развертывающихся поверхностей*:

1) поверхности касательных,
2) конические и
3) цилиндрические.

Пересечением этих классов служит класс плоскостей.

Для задания каждой такой поверхности достаточно указать кривую, а для цилиндрических или конических еще дополнительно направление образующих или вершину соответственно.

В следующем пункте мы покажем, обратно, что *поверхности всех этих трех типов – развертывающиеся.*

Заметим, что любая поверхность является огибающей семейства плоскостей – ее касательных плоскостей. Однако это семейство, как правило, двупараметрическое, оно параметризовано координатами точек на поверхности. Развертывающиеся поверхности выделяются тем, что их касательные плоскости образуют однопараметричекое семейство. Дело в том, что *касательная плоскость не меняется вдоль характеристики.*

Чтобы аккуратно доказать эти утверждения, запишем естественные параметризации поверхностей всех трех типов.

5. Параметризация и метрика развертывающихся поверхностей

Параметрическое задание конической поверхности возьмем в форме $\mathbf{r} = \rho_0 + v\mathbf{m}(u)$, где ρ_0 – радиус-вектор вершины, а $\mathbf{m}(u)$ – направляющий орт образующей, данный в зависимости от параметра u, и v – параметр вдоль образующей. В каждой точке имеем $\mathbf{r}_u = v\mathbf{m}_u$, $\mathbf{r}_v = \mathbf{m}$. Нормальный вектор можно взять в форме векторного произведения $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = [\mathbf{m}_u, \mathbf{m}]v$. Направление этого вектора не зависит от v и поэтому одно и то же вдоль характеристики. Значит, касательная плоскость не меняется вдоль образующей, идущей через данную точку, т.е. поверхность является огибающей однопараметрического семейства плоскостей.

Метрика в этом случае имеет вид (поскольку $(\mathbf{m}, \mathbf{m}_u) = 0$),

$$ds^2 = (d\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = |\mathbf{m}_u|^2 v^2 du^2 + dv^2.$$

Изменяя, если нужно, параметризацию направляющей кривой, добьемся, чтобы вектор $|\mathbf{m}_u|$ оказался единичным. Тогда можно заметить (это важно!), что метрика конуса имеет ту же форму, что и метрика плоскости в полярных координатах. Мы можем сказать, что между плоскостью (с выкинутым началом) и конической поверхностью (без вершины) можно установить диффеоморфное (покоординатное) соответствие в малом, при котором длины соответствующих кривых будут равны. Обратите внимание на то, что утверждение верно только в малом. Окружности одного радиуса с центром в особой точке конуса и в начале координат плоскости имеют разную длину!

Параметризация цилиндрических поверхностей. Она имеет вид $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}(u) + v\mathbf{m}$ с постоянным направляющим ортом $\mathbf{m}$ образующих. Нормальный вектор есть $[\dot{\boldsymbol{\rho}}, \mathbf{m}]$, он снова не зависит от v и, значит, и в этом случае касательная плоскость не поворачивается вдоль образующей.

Метрике цилиндра нетрудно придать евклидову форму: $du^2 + dv^2$, для чего нужно в качестве параметра u взять натуральный параметр на кривой, а кривую взять ортогональной семейству образующих. Здесь изометрия также локальная.

Контрольный вопрос. Покажите, что "круглые" (с окружностью в качестве направляющей) коническая и цилиндрическая поверхности не изометричны никакой области в $\mathbb{R}^2$, но гомеоморфны областям в $\mathbb{R}^2$.

Наконец, более сложный случай:

Поверхность касательных. Естественно исходить из параметрического задания $\boldsymbol{\rho}(u)$ кривой, касательные к которой образуют поверхность и которая служит для нее ребром возврата. Пусть u – натуральный параметр на этой кривой. Вспомним формулы Френе.

Пусть $\mathbf{r}(u,v) = \boldsymbol{\rho}(u) + v\mathbf{m}(u)$ – параметризация нашей поверхности, где смысл параметров и векторов тот же, что и раньше, и $\mathbf{m} = \boldsymbol{\tau}$, т.е. параметризация натуральная. Тогда $\mathbf{r}_u = \boldsymbol{\tau} + vk\boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{r}_v = \boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{r} = (\boldsymbol{\tau} + vk\boldsymbol{\nu})du + \boldsymbol{\tau}\,dv$, и нормальный вектор $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = -kv\boldsymbol{\beta}$. Значит, касательная плоскость вдоль образующей снова сохраняется, причем она оказывается соприкасающейся плоскостью исходной кривой, как и должно быть для ребра возврата.

Метрика в этом случае, как оказывается, не зависит от кручения исходной кривой:

$$ds^2 = (1 + k^2v^2)du^2 + 2dudv + dv^2. \qquad (**)$$

Но так же выглядит метрика плоскости в подходящим образом выбранной системе координат! Действительно:

Теорема. Развертывающаяся поверхность локально изометрична плоскости.

Доказательство. Случаи цилиндра и конуса разобраны выше. Рассмотрим поверхность касательных к пространственной кривой γ. Существует плоская кривая l, функция кривизны которой совпадает с функцией кривизны ребра возврата γ данной развертывающейся поверхности. (Ведь мы доказывали, что функции кривизны и кручения можно выбрать произвольно и независимо друг от друга, и если кручение взять нулевым, то кривая будет плоской.) Возьмем на плоскости нелинейную систему координат (s,t), где $s = u$ – натуральный параметр на кривой l, а $t = v$ – расстояние по ее касательной от точки касания. (Мы ниже выясним, когда это возможно.) Этим будет задана параметризация плоской области вне кривой l как поверхности касательных. Значит метрика плоской области вне l в этих координатах имеет тот же вид $(**)$, что и полученный выше для области в даной поверхности вне γ.

Таким образом в точках с одинаковыми координатами наша поверхность и плоскость имеют одинаковые метрические формы. Значит, получен локальный диффеоморфизм поверхности с плоскостью (это соответствие будет локальным диффеоморфизмом вне точек ребра возврата), сохраняющий метрику. В частности, локальные длины соответствующих друг другу кривых равны.

Теперь рассмотрим возможность введения указанной системы координат. Пусть $\mathbf{r}(s)$ – параметрическое задание построенной плоской кривой в натуральном параметре. Пусть $(x(s),\, y(s))$ – канонические координаты точки на кривой. Тогда $(x(s) + vx(s)',\ y(s) + vy(s)')$ – канонические координаты точки плоскости, имеющей нелинейные координаты (s,v), которые мы ввели выше. Матрица Якоби получает вид:

$$\begin{pmatrix} x'(s) + vx''(s) & x'(s) \\ y'(s) + vy''(s) & y'(s) \end{pmatrix}$$

Якобиан равен $v(x''y' - x'y'')$; при $v \neq 0$ и при условии, что кривая не вырождается в точку он обращается в нуль в точности тогда, когда $(x'/y')' = 0$ (или $(y'/x')' = 0$), т.е. когда кривая оказывается отрезком прямой линии. ■

Доказанное объясняет название развертывающихся поверхностей – они *развертываются* на плоскость с сохранением длин (во всяком случае локально.)

О линейчатых поверхностях. Параметризация всех трех типов развертывающихся поверхностей имеет одинаковый вид. Вообще, поверхности, покрытые однопараметрическим семейством прямых, очевидно, имеют параметризацию такого же вида: $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}(u) + v\mathbf{m}(u)$. Это так называемые *линейчатые* поверхности. К ним, в частности, относится однополостный гиперболоид. Другим примером служит *геликоид* или спиральная поверхность (поверхность штопора или винтовой лестницы), поверхность, полученная вращением горизонтального луча, конец которого равномерно поднимается по вертикальной оси.

Однако, развертывающиеся поверхности выделяются среди линейчатых тем, что для них совпадают касательные плоскости вдоль каждой прямой покрывающего семейства (и, значит, такая поверхность действительно является огибающей однопараметрического семейства плоскостей).

Контрольный вопрос. Чему равен определитель первой квадратичной формы поверхности касательных с данным ребром возврата?

Упражнение. Напишите метрику произвольной линейчатой поверхности, покажите, что развертывающиеся поверхности выделяются равенством нулю смешанного произведения $(\mathbf{m},\, \mathbf{m}_u,\, \dot{\boldsymbol{\rho}})$.

Напишите, в частности, метрику геликоида.

Упражнение. Какие поверхности являются одновременно и линейчатыми и поверхностями вращения? развертывающимися и поверхностями вращения?

Глава 12. Вторая квадратичная форма. Главные кривизны

Основной вопрос – кривизна поверхности. Основным вопросом в *локальной* теории поверхностей является искривленность поверхности, т.е. характер отличия ее от плоскости. Оказывается, ответ на этот вопрос разбивается на две части: внутренний, касающийся геометрии самой поверхности и выраженный в терминах ее метрики, т.е. первой квадратичной формы, и внешний, касающийся ее расположения в пространстве, которое задается еще одной дифференциальной формой. Ею мы будем заниматься в этой главе.

Выше в главе 9 мы говорили о форме фигур в пространстве как об относительном понятии, связанном с выбором группы преобразований пространства. При этом в качестве основной группы, связанной с формой, мы приняли группу движений аффиного пространства с метрикой “по Пифагору”.

Однако такая точка зрения выражает не столько представление о форме самой фигуры, сколько о форме ее расположения в пространстве. Различие между этими двумя точками зрения видно, например, при сравнении окружности и заузленной кривой в $\mathbb{R}^3$.

Сейчас нас интересуют поверхности, лежащие в $\mathbb{R}^3$. Не обсуждая детально вопрос о форме, имеющий в значительной мере философский характер, мы примем, что “собственная” форма поверхности определяется измерениями длин кривых, лежащих на ней, и углов между ними, а форма расположения – измерениями расстояний между ее точками в $\mathbb{R}^3$. По Гауссу (которого привели к его геометрическим исследованиям занятия геодезией – измерениями на земной поверхности) изучение “собственной” формы поверхности называется “внутренней геометрией”. Так как измерение длин, углов, площадей на поверхности выражается через первую квадратичную форму, внутренняя геометрия поверхности совпадает с изучением первой квадратичной формы.

Форма поверхности прежде всего связана, как сказано, с ее искривленностью. Замечательное открытие Гаусса состояло в обнаружении характеристики кривизны, названной им мерой кривизны, которая выражается (довольно сложным образом) через коэффициенты первой квадратичной формы и, следовательно, не меняется при перемещениях поверхности в пространстве с сохранением ее метрики и, в частности, с сохранением длин кривых (в малом). Теперь эту характеристику называют полной и также гауссовой кривизной.

Например, для любой цилиндрической или конической поверхности, которые локально легко разворачиваются на плоскость без растяжений или сжатий, эта величина равняется нулю. Более того, мы видели, что любая *развертывающаяся* поверхность может быть отображена на плоскость (локально диффеоморфно) так, что первая квадратичная форма сохранится, т.е. она та же, что у плоскости в надлежащей криволинейной системе координат. В силу этого можно сразу сказать, что гауссова кривизна этой поверхности нулевая.

Кривизна сферы во всех точках обратна квадрату ее радиуса и она не изометрична с плоской областью даже локально. (Кусок резинового мяча нельзя уложить на плоскость без растяжений.) Вообще, в точках, где поверхность выпукла, кривизна положительна. В седловых точках (как у гиперболического параболоида) она отрицательна и это означает, что ни при каких изгибаниях поверхности, сохраняющих ее локальную метрику, нельзя добиться, чтобы окрестность такой точки стала выпуклой.

Кривизна внутренняя и кривизна расположения. Мы знаем, что коэффициенты первой квадратичной формы выражаются через первые производные ее радиус-вектора. Оказывается, что изгиб, связанный с ее расположением в пространстве, выражается через вторые частные производные. (Например, изгиб цилиндра.) Это выражение получить легче, чем теорему Гаусса, и мы начинаем с его изучения, оставляя теорему Гаусса до следующей главы.

А. Вторая квадратичная форма

1. Определение второй квадратичной формы

Второй дифференциал. Начнем с разложения Тейлора радиус-вектора поверхности в специальной системе координат. Пусть дана поверхность $M \subset \mathbb{R}^3$ и точка в M. Совместим начало O с данной точкой и координатную плоскость стадартной координатной системы пространства с касательной плоскостью к M в этой точке. Тогда поверхность станет графиком функции $z = f(x, y)$, у которой значение в O и производные первого порядка равны нулю, т.е. разложение Тейлора начнется со второго дифференциала.

О неинвариантности второго дифференциала. Сделаем теперь отступление о теореме анализа, утверждающей “неинвариантность второго дифференциала”. Ограничимся для простоты одной переменной. При нелинейной замене $x = x(\bar{x})$ первый дифференциал функции $f(x)$ инвариантен в следующем смысле: $f'_{\bar{x}}(\bar{x})d\bar{x} = f'_x \cdot x'(\bar{x}) \cdot d\bar{x} = f'_x dx$, т.е. коэффициент линейной формы умножается на производную замены (матрицу Якоби!) и благодаря этому форма дифференциала сохраняется: производная функции умножается на дифференциал переменной. Второй дифференциал $d^2 f$ функции $f(x)$, выраженный в новых координатах $\bar{x}$, будет связан с его выражением в старых координатах x формулой

$$f''_{\bar{x}\bar{x}}(x(\bar{x}_0))d\bar{x}^2 = (f''_{xx}(x_0)x'^2(\bar{x}_0) + f'_x(x_0)x''(\bar{x}_0))d\bar{x}^2 = f''_{xx}(x_0)dx^2 + f'_x(x_0)x''(\bar{x}_0)(x'(x_0))^{-2}dx^2,$$

которая включает первые производные функции f, вторые производные замены координат и первые производные обратной замены. Здесь только первое слагаемое имеет “правильный” вид квадратичной формы преобразованной по известному правилу с помощью матрицы Якоби. Таким образом, второй дифференциал не имеет независимого правила замены в отличие от первого дифференциала. (Точнее говоря, правило его замены не такое, как у квадратичной формы, и оно включает в свое выражение вторые производные замены, а не только матрицу Якоби.)

Упражнение. Запишите преобразование второго дифференциала функции в случае двух переменных.

Если первый дифференциал функции равен нулю, то замена d^2f идет по обычному закону преобразования квадратичной формы. Таким образом, *в особой точке* второй дифференциал *является* инвариантным, он преобразуется как квадратичная форма с матрицей Якоби в качестве матрицы замены.

В общем же случае определенное правило изменения имеет сумма первых двух дифференциалов, как и вообще многочлены Тейлора любого порядка.

Задача. Напишите правило преобразования многочлена Тейлора 2-го порядка, т.е. $df + \frac{1}{2}d^2f$.

Обозначения Монжа. Мы будем дальше использовать принятые (со времен Гаспара Монжа, около 1800 года) обозначения p, q, r, s, t частных производных функции f:

$$p = f_x,\ q = f_y, \quad r = f_{xx},\ s = f_{xy},\ t = f_{yy}.$$

Тогда наша квадратичная форма имеет запись $\frac{rdx^2+2sdx\,dy+tdy^2}{2}$. В системе координат, в которой касательная плоскость в данной точке принята за координатную, т.е. точка особая, эта форма выражает отклонение поверхности-графика от касательной плоскости с точностью до бесконечно малых третьего порядка. Это выражение удобно и мы будем им дальше пользоваться в конкретных ситуациях. Однако, оно слишком приспособлено к "касательной" системе координат.

В другой системе координат второй дифференциал перестанет быть квадратичной формой. Между тем, определив нашу форму в одной системе координат (касательной), мы можем определить ее в других системах по правилу изменения коэффициентов квадратичной формы и тогда мы получим имеющую инвариантное значение квадратичную форму, которая, как оказывается, дает вместе с метрикой полное описание характера расположения поверхности в пространстве. Поэтому мы заново определим ее более инвариантным (и более геометричным) образом.

Инвариантное определение второй квадратичной формы. На поверхности M рассмотрим локальную параметризацию (u, v) в окрестности ее точки A и пусть $\mathbf{r}(s)$ – гладкая кривая в M, параметризованная длиной дуги ($s = 0$ в точке A). Ее касательный орт в точке $\mathbf{r}(s)$ обозначим $\boldsymbol{\tau}(s) = \mathbf{r}'(s)$. Рассмотрим вдоль этой кривой поле единичных векторов нормальных к поверхности: $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}$. При каждом s имеем: $(\boldsymbol{\tau}(s), \mathbf{n}(s)) = 0$.

Дифференцируя, получим: $(k\boldsymbol{\nu},\, \mathbf{n}) + (\mathbf{r}',\, \mathbf{n}') = 0$ (с помощью первой формулы Френе, k – кривизна, $\boldsymbol{\nu}$ – орт главной нормали кривой); $k(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{n}) = -\frac{(\mathbf{r}',\, \mathbf{n}')\, ds^2}{ds^2} = -\frac{(d\mathbf{r},\, d\mathbf{n})}{ds^2}$. Скалярное произведение единичных векторов равно косинусу угла между векторами. Обозначим угол между нормалью к поверхности и главной нормалью кривой в точке A через φ и заменим кривизну k на радиус кривизны $R = 1/k$. Мы получаем

$$\frac{\cos\varphi}{R} = -\frac{(d\mathbf{r}, d\mathbf{n})}{ds^2}. \tag{$*$}$$

В этой формуле $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u\, du + \mathbf{r}_v\, dv$. Поскольку $\mathbf{n}(s)$ – поле единичных векторов, его производная ему ортогональна и, значит, лежит в касательной плоскости в точке A. По правилу сложного дифференцирования $\mathbf{n}' = \mathbf{n}_u\, \frac{du}{ds} + \mathbf{n}_v\, \frac{dv}{ds}$, значит, $d\mathbf{n} = \mathbf{n}'\, ds = \mathbf{n}_u\, du + \mathbf{n}_v\, dv$.

В таком случае скалярное произведение представляет квадратичную форму в касательной плоскости:

$$\begin{gathered}(d\mathbf{r}, d\mathbf{n}) = ((\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv), (\mathbf{n}_u du + \mathbf{n}_v dv)) = \\ = (\mathbf{r}_u, \mathbf{n}_u)du^2 + ((\mathbf{r}_u, \mathbf{n}_v) + (\mathbf{r}_v, \mathbf{n}_u))du\, dv + (\mathbf{r}_v, \mathbf{n}_v)dv^2.\end{gathered}$$

В этой формуле (du, dv) – координаты произвольного касательного вектора поверхности в даной точке. Мы, таким образом, получили поле квадратичных форм на поверхности. Заметим, что ее коэффициентами служат функции, полученные из производных радиус-вектора и нормального вектора поверхности в данной точке. Инвариантность этой формы следует из ее выражения скалярным произведением $(d\mathbf{r},\, d\mathbf{n})$, поскольку оба первых дифференциала являются линейными формами и их коэффициенты при замене локальной карты изменяются с помощью матрицы Якоби замены.

(На самом деле эти формы представляют собой тройки форм – по одной для каждой координаты, или же – *формы с векторными значениями*, но после умножения мы получаем билинейную форму со скалярными коэффициентами, т.е. билинейную функцию от пары векторов в касательной плоскости.)

В формуле $(*)$ в качестве $(du,\, dv)$ мы взяли вектор касательный к данной кривой на поверхности. Обратим внимание на то, что левая часть при этом зависит от кривизны кривой (от радиуса кривизны) и от направления ее главной нормали, а правая зависит только от направления касательной.

Полученная форма, *взятая с минусом*, и есть требуемая вторая квадратичная форма, которую мы сейчас несколько преобразуем и проинтерпретируем.

2. Формулы.

Прежде всего заметим, что два слагаемых в среднем члене совпадают: оба они равны $(\mathbf{r}_{uv},\mathbf{n}) = (\mathbf{r}_{vu},\mathbf{n})$. Это вместе с другими соотношениями следует из дифференцирования тождеств

$$(\mathbf{r}_u,\mathbf{n}) = 0 = (\mathbf{r}_v,\mathbf{n}),$$

означающих, что вектор $\mathbf{n}$ ортогонален поверхности:

$$\begin{array}{rcccl}(\mathbf{r}_{uu},\mathbf{n}) + (\mathbf{r}_u,\mathbf{n}_u) & = & 0 & = & (\mathbf{r}_{uv},\mathbf{n}) + (\mathbf{r}_u,\mathbf{n}_v)\\ (\mathbf{r}_{vu},\mathbf{n}) + (\mathbf{r}_v,\mathbf{n}_u) & = & 0 & = & (\mathbf{r}_{vv},\mathbf{n}) + (\mathbf{r}_v,\mathbf{n}_v).\end{array}$$

Из этого следует другое выражение 2-ой формы: $(\ddot{\mathbf{r}},\mathbf{n}) = ((\mathbf{r}_{uu}\,\ddot{u}+2\mathbf{r}_{uv}\,\dot{u}\,\dot{v}+\mathbf{r}_{vv}\,\ddot{v}),\ \mathbf{n})$. (Здесь дифференцирование ведется по параметру кривой.)

Обозначим коэффициенты второй квадратичной формы через L, M и N и запишем ее как $L(u,v)du^2 + 2M(u,v)du\,dv + N(u,v)dv^2$.

Выразим коэффициенты, используя формулу $\frac{[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]}{\sqrt{EG-F^2}}$ для орта нормали к поверхности:

$$\begin{array}{lllll} L & = -(\mathbf{r}_u,\mathbf{n}_u) = & (\mathbf{r}_{uu},\mathbf{n}) = & \frac{(\mathbf{r}_{uu},\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}} & \\ M & = -(\mathbf{r}_u,\mathbf{n}_v) = & -(\mathbf{r}_v,\mathbf{n}_u) = & (\mathbf{r}_{uv},\mathbf{n}) = & \frac{(\mathbf{r}_{uv},\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}} \\ N & = -(\mathbf{r}_v,\mathbf{n}_v) = & (\mathbf{r}_{vv},\mathbf{n}) = & \frac{(\mathbf{r}_{vv},\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}. & \end{array}$$

Случай графика. Если поверхность задана графиком функции $z = f(x,y)$, то в введенных выше обозначениях Монжа имеем прежде всего для коэффициентов первой формы: $E = 1+p^2$, $F = pq$, $G = 1+q^2$ и $EG-F^2 = 1+p^2+q^2$.

Коэффициенты второй формы получают тогда выражения:

$$L = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad M = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad N = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Если точка (x,y) – особая точка функции f, т.е. касательная плоскость к графику в этой точке горизонтальна, то $p = q = 0$ и определитель $EG-F^2 = 1$. Поэтому $L = r$, $M = s$, $N = t$, как и утверждалось в начале главы.

Замечание. Коэффициенты второй квадратичной формы обозначают также b_{ij} – что удобно для обобщения на многомерный случай. Сама форма приобретает вид $b_{ij}du^i\,du^j$.

Удобно также обозначать первую форму римской цифрой I, а вторую II: ($\mathrm{I}{=}E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$; $\mathrm{II} = L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2$), так что $k\cos\varphi = \frac{II}{I}$.

Упражнение. Напишите коэффициенты второй квадратичной формы для неявного задания поверхности уравнением $F(x,y,z) = 0$.

[Ответ (в предположении, что $F_z \neq 0$):

$$L = \frac{-F_z^2F_{xx} + 2F_xF_zF_{xz} - F_x^2F_{zz}}{F_z^2\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}$$

$$M = \frac{-F_z^2F_{xy} + F_xF_zF_{yz} + F_yF_zF_{xz} - F_xF_yF_{zz}}{2F_z^2\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}$$

$$N = \frac{-F_z^2F_{yy} + 2F_yF_zF_{yz} - F_y^2F_{zz}}{F_z^2\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}]$$

Упражнение. Напишите вторую квадратичную форму развертывающейся поверхности с данным ребром возврата.

3. Кривизна кривых на поверхности, имеющих данное направление

Теперь вернемся к формуле для косинуса угла между нормалью к поверхности и главной нормалью к кривой на поверхности.

$$k\cos\varphi = \frac{\cos\varphi}{R} = \frac{II}{I} = \frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}.$$

Правая часть этого равенства содержит коэффициенты, которые являются функциями координат точки, и координаты du, dv касательного вектора. На самом деле правая часть зависит только от отношения этих координат, т.к. числитель и знаменатель являются однородными второй степени по паре du, dv. Это значит, что левая часть в каждой точке зависит только от направления касательного вектора, т.е. от отношения $\frac{du}{dv}$ (или $\frac{dv}{du}$). Отсюда вытекает:

Утверждение. Радиусы кривизны кривых, проведенных через данную точку на поверхности и имеющих общую касательную и общую главную нормаль, совпадают в этой точке. ■

Заданные касательная прямая и главная нормаль определяют единственную плоскость. Она является соприкасающейся для всех кривых, проходящих по поверхности в данном направлении и имеющих данную главную нормаль. Все они имеют одну и ту же кривизну в данной точке.

Нормальные сечения. Среди плоских кривых с данным направлением касательной ("плоских сечений") имеется ровно одна, главная нормаль которой совпадает с нормалью к поверхности. Все эти "нормальные сечения" получаются как пересечения поверхности нормальными плоскостями, т.е. проходящими через нормаль к поверхности. Для нормальных сечений косинус в нашей формуле равен ± 1 и мы получаем важный результат:

Кривизна нормального сечения в данной точке и для данного направления равна отношению значений второй и первой квадратичных форм в этой точке для данного направления.

Замечание. Радиус положителен, но кривизна берется со знаком, совпадающим со знаком косинуса. Он зависит от ориентации поверхности, т.е. от направления ее нормали. Значит,
знак нормальной кривизны совпадает со знаком второй формы.

Отсюда же получается, что радиус кривизны любой (гладкой) кривой относится к радиусу кривизны R_n нормального сечения того же направления как косинус угла между главной нормалью кривой и нормалью к поверхности с точностью до знака. Геометрически это означает, что центр кривизны данной кривой получается из центра кривизны нормального сечения проекцией на нормаль кривой. Этим доказана

Теорема Менье. Центры кривизны всех кривых данного направления в данной точке лежат на одной окружности в нормальной плоскости к этому направлению, имеющей в качестве диаметра радиус кривизны нормального сечения. ■

Контрольный вопрос. Что есть геометрическое место концов векторов кривизны ($\mathbf{r}''(s)$) кривых данного направления в данной точке?

Обратим внимание на то, что кривизна нормального сечения минимальна среди кривых с данным направлением. (А каков максимум? Рассмотрите поверхности $z = x^2 \pm y^2$ в начале.)

Нормальная кривизна. Кривизна нормального сечения называется *нормальной кривизной* каждой кривой с данным направлением. Или, согласно сказанному:

нормальная кривизна $k_n = k_n(u, v, du, dv)$ данной кривой в данной точке равна длине проекции вектора кривизны на нормаль поверхности в этой точке.

Проекция вектора кривизны на касательную плоскость. Геодезическая кривизна.
Естественно рассмотреть проекцию вектора кривизны на касательную плоскость. Эта проекция играет важную роль. Она называется вектором геодезической кривизны, а длина ее – *геодезической кривизной*.

Роль геодезической кривизны состоит в том, что это есть кривизна кривой относительно внутренней геометрии поверхности, т.е. выражается только в терминах первой квадратичной формы, как мы увидим позже. В частности, она не меняется при изгибаниях поверхности (деформациях, не меняющих локально длины кривых). Например, геодезическая кривизна кривых, нарисованных на цилиндре или конусе (или вообще на развертывающихся поверхностях), совпадает после наложения этих поверхностей на плоскость с обычной кривизной.

5. Индикатриса Дюпена

Вторая квадратичная форма и квадратичная аппроксимация поверхности. Рассмотрим снова специальную систему координат, когда поверхность представляется графиком функции $z = f(x, y)$, а координатная плоскость $z = 0$ является касательной плоскостью в данной точке, совмещенной с началом координат.

Вторая квадратичная форма представляется в этом случае, как мы знаем, в виде $rdx^2 + 2sdx\,dy + tdy^2$ и совпадает с (удвоенным) многочленом Тейлора, взятым с точностью до третьего порядка. Нетрудно видеть, что у этой поверхности второго порядка (которая совпадает с графиком своей собственной второй квадратичной формы) все нормальные кривизны в начале будут те же, что и у данной поверхности. В самом деле, нормальная кривизна есть отношение значений двух квадратичных форм, а обе формы у этих поверхностей в начальной точке совпадают.

Индикатриса Дюпена. Поведение функции, графиком которой служит поверхность второго порядка, мы можем охарактеризовать в данной точке с помощью кривой второго порядка. Именно, возьмем сечения графика уровнями $z = \pm 1$ и спроектируем их на плоскость $z = 0$. Мы получим в случае неособой точки поверхности (а не функции!) центральную кривую: эллипс или пару гипербол с общими асимптотами или пару параллельных прямых.

Такая кривая, в нашем случае построенная с помощью аппроксимирующей поверхности второго порядка, носит название *индикатриса Дюпена* (данной поверхности в данной точке).

Инвариантное определение индикатрисы и ее уравнение. Заметим прежде всего, что индикатриса есть кривая в касательной плоскости. Посмотрим, чему равна длина касательного вектора с концом в данной точке индикатрисы, т.е. чему равно расстояние этой точки от начала в касательной плоскости. В нашей специальной системе координат во взятой точке вторая квадратичная форма, рассматриваемая как функция на касательной плоскости, равна по модулю 1. Из основной формулы вытекает, что в таком случае радиус нормального сечения равен квадрату длины этого вектора.

Таким образом, расстояние точки индикатрисы от начала есть корень из радиуса кривизны нормального сечения, проходящего через эту точку. Это определение не зависит от выбора координатной системы в объемлющем пространстве. Итак,

Определение. Индикатриса Дюпена в касательной плоскости точки данной поверхности – это кривая, в точках которой выполнены два эквивалентных условия: 1) значение второй квадратичной формы равно по модулю единице, 2) длина радиус-вектора точки этой кривой равна квадратному корню из радиуса кривизны нормального сечения в направлении, указанном этим вектором.

Доказательство эквивалентности этих условий вытекает из формулы $\pm 1/R_n = \frac{II(\xi,\eta)}{I(\xi,\eta)}$. ■

Уравнением индикатрисы служит равенство $II(\xi,\eta) = \pm 1$ или $L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 = \pm 1$. Здесь ξ, η – координаты касательного вектора, отвечающие данной карте.

(Слово "*индикатриса*" означает указатель, с ее помощью видно, как меняется кривизна нормального сечения при повороте направления касательной в данной точке поверхности.)

6. Главные кривизны и формула Эйлера

Главные направления. Вспомним известные факты аналитической геометрии о центральных кривых второго порядка. Эти кривые обладают *главными направлениями*. В невырожденном случае, т.е. когда определитель $LN - M^2$ отличен от нуля, имеется два главных направления, которые ортогональны. Если мы выберем главные направления за оси координат, то мы приведем форму к каноническому виду, в котором исчезнет ее второй член, и уравнение индикатрисы получит выражение $L_0\xi^2 + N_0\eta^2 = \pm 1$.

На нормальном сечении, отвечающем одному из этих координатных направлений, мы имеем $\xi_0^2 = 1/|L_0|$ или $\eta_0^2 = 1/|N_0|$ соответственно. Это значит, что радиусы кривизны в главных направлениях равны $1/|L_0|$ и $1/|N_0|$, а кривизны, соответственно, равны: $k_1 = L_0$ и $k_2 = N_0$. Таким образом в этой системе координат уравнение индикатрисы запишется в виде $k_1\xi^2 + k_2\eta^2 = \pm 1$.

Формула Эйлера. Наконец, если обозначить через θ полярный угол в касательной плоскости, отсчитываемый от одного из главных направлений, то для точки на индикатрисе с координатами ξ, η имеем $\xi = \sqrt{R_n}\cos\theta$, $\eta = \sqrt{R_n}\sin\theta$. Подставляя в предыдущее уравнение, получим *формулу Эйлера*:

$$k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta = k_\theta,$$

где через k_θ обозначена нормальная кривизна в направлении полярного угла θ.

Утверждение. Главные кривизны имеют экстремальные значения; k меняется на отрезке $[k_1, k_2]$.

Доказательство. Приравнивая нулю производную формулы Эйлера, получаем, что либо $k_1 = k_2$, либо $\sin 2\theta = 0$. В первом случае кривизна постоянна (такая точка называется *омбилической*), во втором получается, что экстремальные направления совпадают с главными направлениями индикатрисы: $\theta = 0$ и $\pi/2$. ■

7. Сопряженность направлений в касательной плоскости

Напоминание из аналитической геометрии. Два диаметра центральной кривой 2-го порядка называются в аналитической геометрии *сопряженными*, если каждый из них делит пополам хорды, параллельные другому. Их направления также называются сопряженными.

Сопряженные направления "ортогональны" относительно скалярного произведения, заданного уравнением кривой: если $b_{ij}x^iy^j = 1$ – уравнение кривой и (x^1, x^2), (y^1, y^2) – векторы этих направлений, то для сопряженных направлений $b_{11}x^1y^1 + b_{12}(x^1y^2 + x^2y^1) + b_{22}x^2y^2 = 0$. (Аффинное преобразование, переводящее окружность в эллипс сохраняет равенство нулю соответствующей билинейной формы, и также параллельность и деление пополам отрезка. Таким образом, ортогональные направления перейдут в сопряженные. То же для преобразования, переводящего пару равнобочных гипербол $x^2 - y^2 = \pm 1$ в данную пару.)

Определение. На поверхности направления в касательной плоскости в данной точке *сопряжены*, если они сопряжены относительно индикатрисы Дюпена, т.е. в качестве b_{ij} берутся коэффициенты 2-ой квадратичной формы:

$$b_{11} = L = (\mathbf{n}_u, \mathbf{r}_u),\ b_{12} = M = (\mathbf{n}_u, \mathbf{r}_v) = (\mathbf{n}_v, \mathbf{r}_v),\ b_{22} = N = (\mathbf{n}_v, \mathbf{r}_v).$$

Если (du, dv) и $(\delta u, \delta v)$ – два вектора в касательной плоскости, условие сопряженности их направлений записывается уравнением $L\, du\delta u + M\,(du\delta v + dv\delta u) + N\, dv\delta v = 0$, или, короче, $(d\mathbf{n},\, \delta\mathbf{r}) = 0$, где $d\mathbf{n} = \mathbf{n}_u\, du + \mathbf{n}_v\, dv$ и $\delta r = \mathbf{r}_u\, \delta u + \mathbf{t}_v \delta v$.

Таким образом, сопряженность двух направлений означает, что одно направление ортогонально (в обычном смысле) дифференциалу орта нормали для другого направления.

Рассмотрим на поверхности кривую γ, проходящую через точку A в направлении вектора (du, dv), и дифференциал $d\mathbf{n}$ нормального орта при движении по этой кривой. Пусть $\mathbf{m} = \delta r$ орт сопряженного направления $\delta u, \delta v$. Этот вектор удовлетворяет двум условиям: $(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = 0$ и $(\mathbf{m}, \dot{\mathbf{n}}) = 0$ (дифференцирование по параметру кривой γ). Вместе эти два равенства означают, что вектор $\mathbf{m}$ направлен по характеристике огибающей однопараметрического семейства плоскостей касательных к поверхности в точках кривой γ. Верно и обратное: для вектора, лежащего на характеристике огибающей этого семейства, выполнены эти два условия.

Таким образом, доказано

Утверждение. Семейство прямых, касательных к поверхности в точках данной кривой тогда и только тогда служит характеристиками развертывающейся поверхности, огибающей семейство плоскостей касательных к поверхности вдоль данной кривой, когда направления этих прямых сопряжены направлениям касательных к кривой. ■

Угловые коэффициенты двух взаимно сопряженных направлений $q_1 = \frac{dv}{du}$ и $q_2 = \frac{\delta v}{\delta u}$ удовлетворяют уравнению

$$L + M(q_1 + q_2) + Nq_1q_2 = 0.$$

Определение. Если в области на поверхности даны два семейства линий так, что через каждую точку области проходит по одной линии из каждого семейства и их направления сопряжены, то такая пара семейств называется *сопряженной сетью.*

Контрольный вопрос. На развертывающейся поверхности в каждой точке имеется направление, сопряженное любому другому направлению. Какое?

В этом случае кривая Дюпена параболическая, т.е. пара параллельных прямых. Значит, кривизна поверхности $K = 0$ во всех точках (что мы выводили ранее из изометричности этих поверхностей с плоскостью.)

8. Асимптотические направления и асимптотические кривые.

Асимптотическим называется самосопряженное направление, т.е. направление, угловой коэффициент которого удовлетворяет уравнению

$$L + 2Mq + Nq^2 = 0$$

. Для такого направления 2-я квадратичная форма и с ней нормальная кривизна равны нулю. Возможны три случая в зависимости от знака дискриминанта $\Delta = M^2 - LN$:

1. Если $\Delta < 0$, таких направлений нет – это случай эллиптической кривой Дюпена (для всех направлений кривизна сохраняет знак).

2. Если $\Delta = 0$, это параболический случай двух параллельных прямых, одна из главных кривизн равна нулю. Соответствующее направление тривиальным образом сопряжено со всяким другим, в том числе и самосопряжено.

3. Если $\Delta > 0$, имеются два асимптотических направления. Это направления асимптот гиперболы Дюпена (откуда и их название).

Определение. Кривая, в каждой точке которой ее касательная имеет асимптотическое направление называется *асимптотической линией.*

Касательная плоскость в каждой точке асимптотической линии оказывается, очевидно, для этой линии соприкасающейся (нормальная кривизна равна нулю). Таким образом, она служит ребром возврата для развертывающейся поверхности огибающей семейства касательных плоскостей в ее точках. Ее касательные служат характеристиками этого семейства.

Если область на поверхности состоит из гиперболических точек, то она имеет асимптотическую сеть, т.е. два семейства, каждое состоящее из асимптотических линий. Кривые из разных семейств пересекаются под ненулевыми углами. Поэтому эти семейства можно принять за координатные. В этом случае вторая квадратичная форма принимает вид $2M du\, dv$.

Контрольный вопрос. Асимптотическая кривая ортогональна в данной точке своему сферическому образу.

9. Линии кривизны

Два главных направления центральной невырожденной кривой 2-го порядка сопряжены. Это следует и из геометрического определения сопряженности через диаметры, и также из канонического уравнения кривой.

Линией кривизны называется кривая на поверхности, направление которой в каждой точке совпадает с одним из главных направлений в этой точке (и, значит, сопряженное направление ортогонально).

Таким образом, как в области эллиптических, так и в области гиперболических точек имеется сопряженная сеть линий кривизны, образованная ортогональными семействами.

В силу доказанного выше утверждения характеристики семейства касательных плоскостей поверхности в точках линии кривизны ортогональны кривой и, направлены по сопряженным главным направлениям в этих точках.

Если касательную плоскость поверхности в каждой точке линии кривизны повернуть на 90° вокруг касательной к этой линии, возникнет семейство плоскостей, характеристики которого будут ортогональны прежним характеристикам и в то же время будут лежать в нормальных плоскостях кривой. Это значит, что эти характеристики будут образовывать семейство нормалей к поверхности в точках кривой. Следовательно, нормали поверхности в точках линии кривизны образуют развертывающуюся поверхность.

Пусть обратно, нормали к поверхности M в точках некоторой лежащей на ней кривой γ образуют развертывающуюся поверхность S. Касательные к S плоскости содержат прямые касательные к γ. Повернем на 90° вокруг касательной к кривой γ в некоторой точке, плоскость касающуюся S в этой точке вдоль нормали к M. Получится однопараметрическое семейство плоскостей, характеристики которого будут нормальными к γ и касательными к M. Плоскости окажутся касательными к M, т.к. содержат в каждой точке γ касательную к γ и повернутую нормаль. Огибающая этого семейства будет развертывающейся поверхностью, касающейся M в точках γ. Таким образом, направление ортогональное касательному направлению кривой оказывается сопряженным с ним. Это значит, что направление кривой в каждой ее точке является главным направлением.

Итак, мы доказали

Утверждение. Кривая на поверхности является линией кривизны (т.е. ее направление в каждой точке главное) тогда и только тогда, когда нормали к поверхности в точках кривой образуют развертывающуюся поверхность.

(Эта характеристика линий кривизны иногда принимается за их определение.)

Контрольные вопросы. Доказать, что все кривые на сфере являются линиями кривизны. Доказать, что параллели и меридианы поверхности вращения являются линиями кривизны.

Доказать, что если кординатная сеть состоит из линий кривизны, то в обеих формах отсутствует средний член.

Задача (Теорема Иоахимсталя). Если две поверхности пересекаются по кривой, которая на одной из них является линией кривизны, то на другой она будет линией кривизны, если и только если угол пересечения поверхностей постоянен.

10. Разворачивание кривой

Б. Пара форм и полная кривизна

1. Пара квадратичных форм

Формы для поверхности в $\mathbb{R}^n$. Итак, в каждой точке поверхности мы имеем две квадратичные (или билинейные) формы, одна из которых положительно определенная, т.е. имеем два поля форм.

Заметим, что определения обеих форм сохраняют силу для поверхностей в любой размерности. Под поверхностью мы понимаем тут подмногообразие коразмерности 1, т.е. локально задаваемое одним невырожденным уравнением. Вектор $\mathbf{n}$ — нормальный орт, т.е. вектор единичной длины и ортогональный касательной плоскости: $(\mathbf{r}_{u_i}, \mathbf{n}) = 0$, где u_i — координаты в касательной плоскости.

Действительно, для первой формы оно и было дано сразу в полной общности как метрика индуцированная на подмногообразии из стандартной ("пифагоровой") метрики в $\mathbb{R}^n$. Вторая форма имеет инвариантное определение $(\ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{n})$, которое также без изменения переносится в $\mathbb{R}^n$ при любом n.

Определение второй формы для поверхности в $\mathbb{R}^n$. Повторим еще раз это определение для любого n. Нам нужно показать, что $(\ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{n})$ есть квадратичная функция от касательного вектора $\mathbf{a}$ к поверхности M в данной точке $P = \mathbf{r}(0)$. Возьмем для этого произвольную гладкую параметризованную кривую $\mathbf{r}(t)$ с вектором скорости $\mathbf{a}(t)$, целиком лежащую в M. В данной локальной карте с координатами u^i обозначим координаты вектора $\mathbf{a} = \mathbf{a}(0)$ через $a^i = \frac{du^i}{dt}|_{t=0}$. Тогда

$$\ddot{\mathbf{r}}(0) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}\frac{du^i}{dt}\right)\Big|_{t=0} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^j \partial u^i}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\Big|_{t=0} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}\frac{d^2 u^i}{dt^2}\Big|_{t=0} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^j \partial u^i}a^i a^j + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}\frac{d^2 u^i}{dt^2}\Big|_{t=0}.$$

При скалярном умножении на вектор $\mathbf{n}$ второе слагаемое исчезнет, т.к. векторы $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$ лежат в касательной плоскости и ортогональны $\mathbf{n}$. В то же время первое слагаемое действительно оказывается квадратичной функцией от координат $\mathbf{a}$ с коэффициентами $(\mathbf{r}_{u^i u^j}, \mathbf{n})$.

Задача приведения пары форм. Мы находимся в хорошо известной из высшей алгебры ситуации задачи одновременного приведения пары форм $\mathbf{G}, \mathbf{Q}$, одна из которых положительная, к каноническому виду. Нам нужно найти подходящую систему координат в касательной плоскости, причем эта новая система должна быть по-прежнему индуцированной какой-либо локальной картой.

Но любое *линейное* преобразование в касательной плоскости может быть получено некоторым преобразованием локальных координат в окрестности данной точки подмногообразия (нужно подвергнуть соответствующему линейному преобразованию прообраз данной карты). Поэтому мы можем забыть пока о локальных координатах и говорить только о линейных преобразованиях самого касательного пространства.

Квадратичные формы в любом базисе записываются с помощью симметрической матрицы. Допустим, что в исходном базисе (в нашем случае это базис $\mathbf{r}_{u^i}$ в касательной плоскости) положительная (первая) форма имеет матрицу G, а вторая – матрицу Q. Приведение этой пары проходит в два шага. Вначале строится преобразование, которое приводит положительную форму к сумме квадратов координат. При этом мы переходим к базису, который является ортонормированным для нашей положительной формы $\mathbf{G}$.

Если A – матрица перехода, то (обозначая штрихом переход к новым координатам) имеем: $E = G' = A^{-1T}GA^{-1}$ ($\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$), так что $G = A^TA$, и $Q' = A^{-1T}QA^{-1}$ – новая (по-прежнему симметричная) матрица второй формы уже в ортонормированном базисе. (E – единичная матрица.)

На втором шаге показывается, что существует *ортогональное* преобразование, которое приводит Q' к диагональному виду с вещественными числами λ_i по диагонали, а форму к виду $\lambda_i(a^i)^2$.

2. Вычисление собственных чисел и векторов в данной координатной системе.

Собственные числа пары форм. Коэффициенты λ_i в приведенном виде квадратичной формы являются по определению собственными числами симметрической матрицы Q' (поэтому они вещественны) и они называются также собственными числами пары форм $\mathbf{G}, \mathbf{Q}$.

Как известно, числа λ_i определяются как корни характеристического многочлена $\det(Q' - \lambda E)$. Оказывается, эти же числа являются корнями и многочлена $\det(Q - \lambda G)$, построенного для матриц форм в исходном базисе, ибо эти два многочлена различаются только скалярным ненулевым множителем.

Действительно, пусть $C = AB$ – матрица перехода к результирующему базису. (A – матрица перехода к ортонормированному базису, а B – ортогональная матрица.) Тогда

$$Q' - \lambda E = C^TQC - \lambda C^TGC = C^T(Q - \lambda G)C$$

и $\det(Q' - \lambda E) = 0$ тогда и только тогда, когда $\det(Q - \lambda G) = 0$, т.к. $\det C \neq 0$.

Таким образом, мы можем определить собственные числа, оставаясь в данном базисе. После деления на старший коэффициент совпадут и сами многочлены $\det(Q' - \lambda E)$ и $\det(Q - \lambda G)$.

Собственные векторы. Собственному числу λ_i формы Q' отвечает ее собственный вектор $\boldsymbol{\xi}_i$, для которого $Q'\xi_i = \lambda_i \xi_i$ и, значит, $\xi_i^T Q' \xi_i = \lambda_i \xi_i^T \xi_i = \lambda_i |\boldsymbol{\xi}_i|^2$. ($\xi$ есть матрица-столбец коэффициентов вектора $\boldsymbol{\xi}$.)

Но выражение $\xi_i^T Q \xi_i$ есть инвариант, т.е. оно не меняется при заменах координат ($\xi'^T Q' \xi' = \xi^T C^T Q' C \xi = \xi^T Q \xi$), как и $|\boldsymbol{\xi}_i|$. Поэтому можно дать такое

Определение. Вектор $\boldsymbol{\xi}_i$ есть собственный вектор пары $\mathbf{G}, \mathbf{Q}$, отвечающий собственному числу λ_i, если $\xi_i^T Q \xi_i$ есть умноженный на λ_i квадрат нормы вектора $\boldsymbol{\xi}_i$ в метрике G:

$$\xi_i^T Q \xi_i = \lambda_i |\boldsymbol{\xi}_i|_G^2 \ (= \lambda_i \xi_i^T G \xi_i).$$

Тогда

$$\xi^T Q \xi - \lambda \xi^T G \xi = \xi'^T Q' \xi' - \lambda \xi'^T \xi' = \xi'^T (Q' - \lambda E) \xi' = 0,$$

т.е. вектор $\boldsymbol{\xi}$ является собственным вектором пары $\mathbf{G}, \mathbf{Q}$, отвечающим собственному числу λ тогда и только тогда, когда он является собственным вектором симметрической матрицы Q', отвечающим тому же собственному числу, в обычной ("пифагоровой") метрике.

Нахождение собственных векторов. Из высшей алгебры известно, что симметрическая матрица в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ имеет ортонормированный базис из собственных векторов, определенный однозначно, если она имеет n различных собственных значений. (Если собственные значения имеют кратности, то однозначно выделяются отвечающие им собственные подпространства, размерности которых равны кратностям собственных чисел, а в них ортонормированные базисы можно выбирать произвольно.) Собственные векторы являются решениями однородных уравнений $(Q' - \lambda_i E)\xi' = 0$.

Но $(Q' - \lambda E)\xi' = (C^{-1T} Q C^{-1} - \lambda C^{-1T} G C^{-1}) C \xi = C^{-1T} (Q - \lambda G) \xi$.

Значит, вектор есть решение уравнения $(Q' - \lambda_i E)\xi' = 0$ в результирующей ортонормированной системе координат тогда и только тогда, когда он же является решением уравнения $(Q - \lambda G)\xi = 0$ в исходной системе координат.

Итак,

Утверждение. Мы можем найти собственные числа и собственные векторы пары форм (G, Q) в данной точке в данной локальной системе координат, решая сначала уравнение $\det(Q - \lambda G) = 0$ и затем уравнения $(Q - \lambda_i G)\xi = 0$.

3. Вычисления в $\mathbb{R}^3$. Полная кривизна и средняя кривизна.

Для поверхности в $\mathbb{R}^3$ мы должны решить уравнение $\det \begin{pmatrix} L-\lambda E & M-\lambda F \\ M-\lambda F & N-\lambda G \end{pmatrix} = 0$.

Левая часть представляет собой многочлен, корнями которого служат главные кривизны поверхности k_1 и k_2. Его записывают в виде

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K,$$

где $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$ называется *средней кривизной*, а $K = k_1 k_2$ — *полной кривизной* (или просто *кривизной*) поверхности в данной точке. Раскрывая определитель, мы получим:

$$2H = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}, \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Упражнение. Напишите выражение главных кривых для параметрического задания поверхности и задания графиком.

Рассмотрим простейший случай: поверхность задана графиком функции $z = f(x, y)$ в ортогональной системе координат, причем координатная плоскость Oxy в точке O является касательной плоскостью к поверхности. В этой точке первая форма имеет вид $x^2 + y^2$, а вторая удвоенным вторым дифференциалом: $f_{xx}\, x^2 + 2 f_{xy} dx\, dy + f_{yy} dy^2$. Таким образом, кривизна нашей поверхности есть определитель $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$.

Например, кривизна поверхности $z = x^2 \pm y^2$ в точке O есть ± 4.

Контрольный вопрос. Докажите, что кривизна сферы радиуса 1 равна 1 в каждой точке. Чему равна кривизна сферы радиуса r?

Упражнение. Найти полную и среднюю кривизну развертывающейся поверхности с данным ребром возврата и ее главные кривизны.

4. Роль полной кривизны. Локальный анализ формы поверхности

Полная кривизна и теорема Гаусса. Теорема Гаусса, о которой мы упоминали в начале этой главы и которую докажем в следующей главе, состоит в том, что полная кривизна имеет выражение через первую квадратичную форму, т.е. ее коэффициенты и их производные. Из приведенного выше выражения видно, что для этого нам предстоит выразить через коэффициенты E, F, G первой формы определитель второй формы. На самом деле теорему Гаусса можно доказывать, идя разными путями, в том числе и указанным. Но можно дать и доказательства, основанные не на вычислении K, а на прояснении ее геометрического смысла. Мы познакомимся с обоими этими путями.

Роль знака полной кривизны. Особое значение имеет знак полной кривизны $K = k_1 k_2$. Если $K > 0$, то знаки k_1 и k_2 совпадают, если $K < 0$, то знаки k_1 и k_2 противоположны, если $K = 0$, то хотя бы одна из главных кривизн нулевая. Как мы сейчас увидим, этого достаточно, чтобы в первом приближении охарактеризовать форму поверхности в окрестности данной точки. В частности, эта характеризация зависит только от метрики. Сами знаки главных кривизн несущественны, т.к. мы можем поменять их, просто изменив ориентацию поверхности.

Индикатриса Дюпена в основных случаях. Указанные три возможности различаются типом индикатрисы Дюпена как кривой второго порядка: она будет эллипсом в случае $K > 0$, парой гипербол в случае $K < 0$ и парой прямых в случае $K = 0$, $H \neq 0$.

Уравнения в нормальной системе координат соответственно будут: $k_1\xi^2+k_2\eta^2 = \pm 1$, $k_1\xi^2-k_2\eta^2 = \pm 1$, $k_1\xi^2 = \pm 1$. (Случай *точки уплощения*, когда обе главные кривизны и, значит, все нормальные кривизны равны нулю, мы оставим в стороне.)

В *эллиптической точке*, где $K > 0$, знак нормальных кривизн постоянен и все нормальные сечения лежат по одну сторону касательной плоскости, т.е. поверхность имеет окрестность данной точки, лежащую целиком по одну сторону от касательной плоскости в этой точке. Это значит, что поверхность *выпукла* в данной точке.

(Имеется два подхода к определению выпуклости: через отрезки, соединяющие точки множества, и локальный – через касательные "опорные" плоскости. Естественно, оба определения эквивалентны, но мы не задерживаемся здесь на анализе этого важного понятия, см... .)

Если обе главные кривизны равны, то индикатриса Дюпена будет окружностью. Такая точка называется *омбилической*.

Упражнения. Покажите, что в омбилической точке коэффициенты обеих форм пропорциональны, а $H^2 = 4K$.

Замечание. Поверхность, целиком состоящая из омбилических точек, есть сфера. Доказательство этого факта требует дополнительных соображений (см. Норден, стр. 198-199).

В *гиперболической точке*, где $K < 0$, индикатриса Дюпена состоит из двух гипербол. Две общие асимптоты этих гипербол разбивают касательную плоскость в окрестности начала на четыре угла, так что знак нормальных кривизн для нормальных сечений, проведенных через одну пару противоположных углов, положительный, а через другую – отрицательный. Значит, поверхность в окрестности данной точки изогнута в одну сторону от касательной плоскости в углах одной пары и в другую сторону в углах другой пары. Это строение окрестности описывают названием *седловая точка.* Заметьте, что модули главных кривизн совпадают в точности в тех точках поверхности, где $H = 0$. Индикатриса Дюпена в этих точках состоит из равнобочных гипербол, в частности, для них направления асимптот ортогональны.

В *параболической точке*, где $K = 0$, $k_1 \neq 0$, индикатриса Дюпена состоит из двух несовпадающих параллельных прямых. В направлении этих прямых (асимптотическом) нормальная кривизна нулевая, она достигает максимума в ортогональном направлении, между этими направлениями изменяется монотонно, в частности, сохраняет знак.

Поэтому все нормальные сечения, исключая асимптотическое, имеют направление выпуклости в одну сторону нормали, но сечение асимптотического направления может иметь сложное строение, требующее особого анализа. В простейшем случае оно имеет в данной точке точку перегиба и тогда поверхность в ее окрестности имеет *полуседло.*

Мы оставляем в стороне анализ особого случая *точки уплощения*, в которых обе главные кривизны и, значит, все нормальные кривизны равны нулю. Ограничимся примером "обезьяньего седла", заданного с помощью комплексного переменного уравнением $f(x, y) = \Re(x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2$. График этой функции имеет в начале индикатрису с тремя прямыми в качестве асимптот. Поэтому график имеет три вдавленности вниз (для ног и хвоста) и три других – вверх.

Взгляд на поверхность в целом. Если теперь от локального рассмотрения строения поверхности в одной точке обратиться ко всей поверхности, то можно заметить, что эллиптические и гиперболические точки образуют области (т.к. выделяются строгими неравенствами), а параболические точки, вообще говоря, образуют линии, как правило, разделяющие эти области. Уравнением такой линии служит условие $K = 0$, которое эквивалентно равенству $LN - M^2 = 0$.

Упражнение. Найдите линии $K = 0$ на торе, образованном вращением окружности вокруг вертикальной оси.

[Воспользуйтесь, например, теоремой Менье.]

5. Частные случаи. Развертывающиеся поверхности, минимальные поверхности и поверхности вращения.

Случай развертывающихся поверхностей. Конечно, поверхность может иметь и области, целиком состоящие из параболических точек. Для такой поверхности мы имеем $rt - s^2 = 0$ в обозначениях Монжа. Мы уже видели в п.3 гл.11 Б, что этому дифференциальному уравнению в частных производных удовлетворяют все развертывающиеся поверхности, исключая те, которые неудачно расположены по отношению к системе координат: имеют направления, параллельные оси аппликат.

Теперь мы видим, что для решений этого уравнения $K = 0$. Как мы увидим в следующей главе, условие $K = 0$ характеризует развертывающиеся поверхности.

Упражнение. Покажите, что если развертывающаяся поверхность имеет ребро возврата с кривизной k и кручением $\varkappa$, то $2H = -\frac{\varkappa}{vk} = k_1$ (v – параметр вдоль касательной к ребру возврата, k_1 – ненулевая главная кривизна поверхности).

Средняя кривизна, оператор Лапласа и минимальные поверхности.

В ортогональной системе координат (с ортогональной координатной сеткой) удвоенная средняя кривизна оказывается равной $r + t = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \Delta f$, т.е. значению оператора Лапласа для функции f.

Отсюда получаем, что поверхности, целиком состоящие из точек с нулевой средней кривизной, служат графиками решений уравнения Лапласа $\Delta f = 0$, т.е. гармонических функций. Условие равенства нулю средней кривизны имеет вариационное значение: при заданном граничном контуре это поверхности с минимальной площадью (во всяком случае относительно их малых деформаций). Физически такие поверхности представляются мыльными пленками, которые стремятся уменьшить свою площадь из-за сил поверхностного натяжения.

(Понятно, что для равновесия сил две главные кривизны должны быть равны по модулю и противоположны по знаку.)

Соответствие между минимальностью поверхности и гармоничностью задающей ее векторной функции неинвариантно. Можно утверждать его справедливость только в изотермических координатах на поверхности.

Поверхности вращения.

Ясно, что направление меридиана в каждой точке, не лежащей на оси вращения, есть одно из двух главных направлений: меридиан лежит в плоскости, проходящей через ось, значит, в плоскости симметрии поверхности, а тогда и симметрии индикатрисы Дюпена.

Главные направления это как раз направления симметрии индикатрисы. Второе направление ортогонально первому, т.е. меридиану, и это есть направление параллели. Но сама параллель, как правило, не является нормальным сечением. Однако, ее центр кривизны лежит на оси вращения, которая ортогональна ее нормали, и, значит, там же лежит и центр кривизны нормального сечения, проектирующийся, по теореме Менье, в центр этой окружности. Значит один радиус кривизны есть отрезок нормали до оси вращения.

Вторым радиусом кривизны служит радиус кривизны меридиана.

Задача. Рассмотрим тор, полученный вращением вокруг оси Oz окружности, лежащей в плоскости Oxz с центром в точке $x = 2$ оси Ox и радиусом 1. Найти кривизну тора в точке указанной окружности с радиусом, наклоненным под углом φ к оси Oz.

Задача. Найдите главные кривизны поверхности, полученной вращением трактрисы вокруг оси Ox (в левой полуплоскости). Она называется *псевдосферой*. Используя геометрические свойства этой кривой, покажите, что гауссова кривизна псевдосферы постоянна и отрицательна (она локально изометрична плоскости Лобачевского.)

6. Сферическое отображение и полная кривизна как его якобиан.

Геометрический смысл полной кривизны удобно выясняется с помощью простой геометрической операции – сферического отображения – впервые введенной еще Гауссом.

Сферическое отображение. Если нормальный орт $\mathbf{n}(u, v)$, взятый в каждой точке поверхности M^2, отложить от начала координат в $\mathbb{R}^3$, то конец орта будет лежать на единичной сфере S^2 и возникнет отображение $n : M^2 \to S^2$. Оно и называется *сферическим отображением* поверхности.

О классе гладкости сферического отображения. Для поверхности, локально заданной уравнением $F(x^1, x^2, x^3) = 0$ с непрерывно дифференцируемой функцией F, координаты нормального вектора аналитически выражаются через производные F. Поэтому класс гладкости отображения n на единицу меньше, чем класс гладкости поверхности (такой же, как класс гладкости производных F). Чтобы обеспечить непрерывную дифференцируемость сферического отображения, нам поэтому нужно потребовать по крайней мере непрерывность вторых производных F, т.е. принадлежность поверхности к классу гладкости C^2, что будем считать выполненным.

Полная кривизна как якобиан.

Для понимания этой темы поможет, возможно, аналогия с определением кривизны кривой. Напомним, что кривизна кривой это скорость поворота касательной (или нормали) по отношению к натуральному параметру, т.е. предел отношения угла между касательными ортами в близких точках к длине дуги между ними. На плоскости удобно было перенести орты в начало, представляя угол между ними дугой единичной окружности между их концами.

Теперь мы поступаем аналогичным образом, но вместо длины нам нужно будет говорить о площади и о пределе отношения площадей.

Теорема. *Полная кривизна есть якобиан сферического отображения.*

Доказательство. *Случай неособой точки.* Рассмотрим сначала основной случай неособой для отображения n точки $P \in M^2$, в которой якобиан этого отображения не нуль. В таком случае по теореме об обратном отображении мы можем считать, что в некоторой окрестности нашей точки n является диффеоморфизмом.

(Теорему об обратном отображении мы применяем к локальному представителю сферического отображения, т.е. к двум плоским областям, на которых заданы локальные карты в окрестности точки P и в окрестности $n(P)$ в сфере.)

Локальные карты. В таком случае, для параметризации окрестности точки $n(P)$ в сфере, мы можем воспользоваться теми же параметрами u, v, которые составляют локальную координатную систему поверхности в окрестности P. Иначе говоря, мы возьмем одну и ту же координатную область для поверхности и для сферы и примем, что координаты u, v точек из окрестности P и их образов совпадают. Мы можем записать наше отображение в векторной форме в виде $n(\mathbf{r}(u,v)) = \mathbf{n}(u,v)$ (орт нормали в точке поверхности совпадает с радиус-вектором соответствующей точки сферы).

Напоминание о геометрическом смысле якобиана. Вспомним теперь (см. п...), что геометрический смысл якобиана отображения в точке P для областей одной размерности состоит в том, что он равен пределу отношения площади (объема) образа малой области, содержащей P, к площади (объему) самой этой области.

Якобиан сферического отображения. Поэтому мы должны подсчитать площади соответствующих друг другу областей на сфере и на поверхности, взять их отношение и перейти к пределу при сжимании области к точке.

Если область U поверхности параметризована плоской областью W, то ее площадь выражается, как мы знаем, интегралом

$$S = \iint\limits_W |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|\, du\, dv,$$

распространенным по W. На сфере радиус-вектором служит нормальный орт к поверхности M^2 в соответствующей точке. Поэтому на сфере площадь образа нашей окрестности выражается интегралом

$$S_0 = \iint\limits_W |[\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v]|\, du\, dv,$$

распространенным по той же области параметров.

Векторные произведения в обоих интегралах коллинеарны, т.к. они идут по нормалям к поверхности и сфере в соответствующих точках, а эти нормали параллельны по определению отображения n. Подсчитаем коэффициент пропорциональности.

Напомним тождество Лагранжа (см. п.12 глава 11 А):

Скалярное произведение двух векторных произведений равно определителю, составленному из скалярных произведений векторов первой пары на векторы второй пары.

Умножим скалярно на $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ условие $[\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v] = \lambda[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ и заменим, согласно упомянутому тождеству, скалярные произведения векторных произведений детерминантами:

$$\det \begin{pmatrix} (\mathbf{n}_u, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{n}_u, \mathbf{r}_v) \\ (\mathbf{n}_v, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{n}_v, \mathbf{r}_v) \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \\ (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v) \end{pmatrix}.$$

Но все скалярные произведения, входящие в это выражение, оказываются коэффициентами наших квадратичных форм, так что слева стоит детерминант $\Delta = LN - M^2$, а справа – $\lambda g = \lambda(EG - F^2)$. В результате мы получаем, что коэффициент пропорциональности λ это как раз полная кривизна K.

Внося его в выражение площади области на сфере, получим, что отношение площадей наших областей равно:

$$\frac{\iint |K||[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|\, du\, dv}{S}.$$

Переходя к пределу, мы можем по теореме о среднем вынести в числителе кривизну за знак интеграла и получить, что это отношение стремится к значению кривизны K в точке P.

Случай особой точки. Рассмотрим теперь сферическое отображение в окрестности особой точки, в которой матрица Якоби вырождена и, значит, векторы $\mathbf{n}_u$ и $\mathbf{n}_v$ пропорциональны, а их векторное произведение равно нулю. Тогда равен нулю, согласно предыдущему, и определитель второй квадратичной формы, т.е. и K. Значит, и в этом случае K совпадает с (нулевым) якобианом. ■

7. Особые точки сферического отображения

Посмотрим, что из себя представляет поверхность, для которой *все* точки сферического отображения особые. Сначала коснемся одного общего результата.

Лемма. Если ранг матрицы Якоби равен 1, то образ – кривая.

Задача. Если во всех точках области матрица Якоби гладкого ображения $f : M^m \to N^n$ вырождена, *но ранг k ее постоянен*, то образом служит подмногообразие меньшей размерности (*какой?!*) (см. Фихтенгольц, т.1, п.216, изд.7, 1969 г., Зорич, т.1..., и также часть 1, глава 1, задача в п.10).

[*Указание.* Считая, что $N = \mathbb{R}^n$, покажите, что проекция образа $f(M)$ на некоторую плоскость в $\mathbb{R}^n$ является графиком в окрестности образа $f(x_0)$ данной точки $x_0 \in M$. Полезно использовать компактность конечномерной сферы.]

Мы докажем это утверждение только в нашем случае отображения поверхности в поверхность.

Переходя к локальным координатам, допустим, что отображение записано в виде системы двух функций $x = f(u,v),\ y = g(u,v)$, причем $\frac{\partial f}{\partial u} \neq 0$. По теореме о неявной функции мы можем написать $u = \varphi(x,v)$. Принимая за переменные x, v, продифференцируем тождество $f(\varphi(x,v),v) - x = 0$ по v. Мы получим: $\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v} = 0$. Но, по условию, производные f пропорциональны производным g и поэтому это же тождество сохраняет силу, если в нем f заменить на g. Значит, полная производная по v функции, полученной из g подстановкой $\varphi(x,v)$ вместо u, равна нулю, т.е. эта функция на самом деле не зависит от v. Это значит, что y есть функция от x. Следовательно, образ нашего отображения есть кривая. ■

Вернемся к особым точкам сферического отображения.

Случай 1. Ранг матрицы Якоби равен единице. В случае сферического отображения, мы получаем следующий результат. Если в целой области поверхности полная кривизна равна нулю, то якобиан тождественный нуль, и если ранг матрицы Якоби не нуль, то он равен единице. Тогда образ сферического отображения есть кривая (и отображение на эту кривую невырождено). Прообраз каждой точки этой кривой есть кривая, в точках которой нормаль к поверхности постоянна и, значит, касательная плоскость в них одна и та же (в силу теоремы Лагранжа о конечном приращении). Вводя параметр на кривой-образе, мы получаем в прообразе однопараметрическое семейство кривых (прообразов точек), вдоль каждой из которых поверхность касается некоторой плоскости. Это значит, что наша поверхность (в данной области) является огибающей однопараметрического семейства плоскостей, т.е. *является развертывающейся поверхностью.* Итак,

Теорема. *Если полная кривизна поверхности равна нулю во всех точках, то это развертывающаяся поверхность.* ■

Обратное было доказано выше, см. гл. 11 Б, п.3. и гл.12 А п.9.

Случай 2. Ранг матрицы Якоби равен нулю. Если ранг матрицы Якоби равен нулю в целой области, т.е. все частные производные равны нулю, то координаты образа постоянны, значит, образ есть одна точка и, значит, во всех точках поверхности касательные плоскости параллельны, т.е. совпадают. Значит, наша область – *плоская.* ■

Интегральная кривизна. Заметим в заключение этого раздела, что площадь сферического образа данной области оказывается поверхностным интегралом от кривизны, распространенным по этой области. Этот интеграл называется *интегральной кривизной* области. Это понятие было введено Гауссом под названием curvatura integra, что иногда переводилось как “полная кривизна”. Кривизну K, называемую теперь полной или гауссовой, сам Гаусс называл “мерой кривизны”. С интегральной кривизной мы еще встретимся дальше в конце следующей главы.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ дана поверхность M, для которой $n : M \to S^2$ оказывается диффеоморфизмом (тогда M выпукла). Используя этот диффеоморфизм для установления соответствия между локальными координатами, мы получим, что интегральная кривизна всей поверхности равна площади сферы, т.е. равна 4π. Для произвольной компактной поверхности мы укажем, чему равна ее интегральная кривизна, ниже. Важно то, что она не зависит, как мы увидим, от расположения поверхности в пространстве и даже от метрики, и определяется ее топологическим строением. В частности, для любого гладкого (класса $\mathcal{C}^2$) вложения сферы она равна 4π.

Глава 13. Деривационные уравнения и теорема Гаусса

Мы приступаем к центральной теме — знаменитой теореме Гаусса, сформулировавшего и доказавшего ее в основополагающем мемуаре “Общие исследования о кривых поверхностях” (латинское название “Disquisitiones generales circa supercifies curvas”) в 1828 году. Гаусс подчеркнул важность этой теоремы словами “блистательная теорема” – *theorema egregium*. Этот латинский эпитет закрепился как ее название. В ней утверждается, что *полную кривизну можно выразить в терминах первой квадратичной формы.* Более точно:

Теорема Гаусса. *Полная кривизна поверхности в R^3 выражается в каждой карте через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности и их частные производные.*

Выражение, данное Гауссом в общем виде, очень сложно и позже были придуманы различные другие более (и менее) простые. Мы приведем ниже вывод двух таких выражений, одного в общей форме и другого самого простого (упрощенного за счет использования ортогональной координатной системы) и постараемся прояснить геометрический смысл этой замечательной теоремы. Но чтобы получить эти выражения, нам нужно научиться дифференцировать касательные векторные поля на поверхности инвариантным (не зависящим от локальной карты) способом. С этого мы начнем.

Во втором томе мы познакомимся с тем далеким обобщением подхода Гаусса, который был начат в 1854 году Риманом в его знаменитой лекции “О гипотезах, лежащих в основании геометрии” и затем развит многими геометрами, став в конце концов естественным языком физической теории – общей теории относительности.

Сейчас будем рассматривать только случай поверхностей в трехмерном пространстве. В частности, это означает, что на поверхности рассматривается риманова метрика, индуцированная стандартной “пифагоровой” метрикой объемлющего пространства $\mathbb{R}^3$.

1. Метод подвижного репера.

Мы будем действовать отчасти по аналогии с методом Френе: рассмотрим поле реперов, приспособленных к поверхности в каждой точке, выразим производную этого поля в нем самом, и получим дифференциальные уравнения, *определяющие нашу поверхность.* В отличие от теории Френе это будут уравнения в частных производных, для которых теорема существования и единственности требует выполнения некоторых условий — так называемых условий интегрируемости (происходящих, грубо говоря, из-за симметрии последовательного дифференцирования функций по каждой паре переменных). С другой стороны, условие ортонормированности реперов, которое играло в случае кривых очень важную роль, здесь имеет меньшее значение и даже затемняет принципиальную сторону вопроса, хотя и упрощает вычислительные формулы.

Имеется еще одна дифференциально геометрическая задача, кроме задачи описания поверхности с помощью дифференциальных уравнений, — научиться дифференцировать векторные поля на поверхности, т.е поля, составленные из касательных векторов (и обобщения этой задачи). Прямое использование карт нам не поможет, т.к. при вычислении производных приходится *вычитать значения дифференцируемого векторного поля в двух близких, но разных точках*, а эта операция не определена инвариантно (если использовать координаты карты, то при переходе от одной карты к другой получатся существенно разные результаты). Мы воспользуемся покоординатным дифференцированием векторных полей в объемлющем трехмерном линейном пространстве, для которого эта задача легко решается с помощью параллельного переноса. Но при этом производными касательного к поверхности поля будут *векторы объемлющего пространства,* которые, вообще говоря, не будут касательными векторами поверхности. Посмотрим, как обойти эту трудность.

Мы начнем с локального поля реперов, построенного, как и раньше, по некоторой карте данной поверхности $M^2 \subset \mathbb{R}^3$. Мы обозначаем карту $\varphi : V \to U \subset M^2$, где, как обычно, V — область в плоскости $\mathbb{R}^2$ со стандартными координатами $(u,\, v)$, а U — открытое подмножество M^2, т.е. пересечение M^2 с открытым подмножеством W в $\mathbb{R}^3$. Координаты в $\mathbb{R}^3$ обозначаются $(x,\, y,\, z)$, и диффеоморфизм φ параметрически выражается векторной функцией $\mathbf{r}(u, v)$. Таким образом, мы получаем в каждой точке $A \in M^2$ репер $(\mathbf{r}_u,\, \mathbf{r}_v,\, \mathbf{n})$, где $\mathbf{n}$ — орт, ортогональный к M^2 (т.е. к касательной плоскости $\tau_A M^2$), но векторы $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ не будут предполагаться ортонормированными, они, как обычно, являются образами стандартного репера $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ координатной плоскости при линейном отображении (дифференциале $d\varphi$) плоскости $\mathbb{R}^2$ на $\tau_A M^2$. Напомним, что орт $\mathbf{n}$ выражается через $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ по формуле $\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_u,\, \mathbf{r}_v]}{|[\mathbf{r}_u,\, \mathbf{r}_v]|}$ и он ортогонален векторам $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$.

Запишем теперь основные уравнения, которые называются *деривационными*, смысл которых в том, чтобы выразить в указанном базисе производные элементов базиса в базисных направлениях $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$. Их можно рассматривать как аналоги для поверхности уравнений Френе, но это — уравнения в частных производных. Их коэффициенты будут играть важную роль и их обозначения общеприняты. Мы отметим дальше некоторые соотношения между коэффициентами.

Имеются две системы — дифференцирования по первой координате u и по второй координате v. Под дифференцированием понимается покоординатное дифференцирование в $\mathbb{R}^3$. Дифференцирование по первой координате мы обозначаем индексом 1, по второй индексом 2, в частности, $\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_{uu} = \mathbf{r}_{11}$ и т.д.:

$$\begin{array}{rlrl}
\mathbf{r}_{11} = & \Gamma^1_{11}\mathbf{r}_1 + \Gamma^2_{11}\mathbf{r}_2 + b_{11}\mathbf{n} & \qquad \mathbf{r}_{12} = & \Gamma^1_{12}\mathbf{r}_1 + \Gamma^2_{12}\mathbf{r}_2 + b_{12}\mathbf{n} \\
\mathbf{r}_{21} = & \Gamma^1_{21}\mathbf{r}_1 + \Gamma^2_{21}\mathbf{r}_2 + b_{21}\mathbf{n} & \qquad \mathbf{r}_{22} = & \Gamma^1_{22}\mathbf{r}_1 + \Gamma^2_{22}\mathbf{r}_2 + b_{22}\mathbf{n} \\
\mathbf{n}_1 = & -b^1_1\mathbf{r}_1 - \ b^2_1\mathbf{r}_2 & \qquad \mathbf{n}_2 = & -b^1_2\mathbf{r}_1 - \ b^2_2\mathbf{r}_2
\end{array} \qquad (\times)$$

Производная единичного вектора $\mathbf{n}$ ортогональна ему, значит, лежит в касательной плоскости, и поэтому, в третьих равенствах равны нулю коэффициенты при $\mathbf{n}$.

Важное замечание. Так как $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_{12}$, мы имеем *соотношения симметрии*: $\Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{12}$, $\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12}$ и также $b_{12} = b_{21}$.

Мы можем сразу увидеть, чему равны коэффициенты b_{ij}: умножим скалярно первые и вторые равенства на $\mathbf{n}$ и получим

$$(\mathbf{r}_{ij},\, \mathbf{n}) = b_{ij}.$$

Слева стоят коэффициенты второй квадратичной формы. Таким образом, $b_{11} = L$, $b_{12} = b_{21} = M$, $b_{22} = N$.

Выясним теперь, чему равны коэффициенты b^i_j. Умножая скалярно на $\mathbf{r}_i$, получим: $(\mathbf{n}_j,\, \mathbf{r}_i) = -b^1_j(\mathbf{r}_1,\, \mathbf{r}_i) - b^2_j(\mathbf{r}_2,\, \mathbf{r}_i)$. Слева, как мы знаем, снова стоят коэффициенты второй формы (с минусом): $(\mathbf{n}_j,\, \mathbf{r}_i) = -(\mathbf{r}_{ij},\, \mathbf{n}) = -b_{ij}$. С другой стороны, скалярные произведения $(\mathbf{r}_i,\, \mathbf{r}_j)$ это коэффициенты первой квадратичной формы, которые мы обозначим теперь g_{ij}, и мы получаем систему линейных уравнений относительно b^i_j:

$$b_{ij} = b^1_j g_{1i} + b^2_j g_{2i}.$$

В сокращенной форме эту систему можно записать в виде $b_{ij} = b^k_j g_{ki}$. Определитель этой системы это определитель g коэффициентов первой квадратичной формы, который отличен от нуля. Обозначим через g^{ij} элементы матрицы обратной к матрице этой формы. Мы получим выражения для коэффициентов b^i_j с помощью этой обратной матрицы: $b^i_j = g^{ki} b_{kj}$.

Матрица Якоби сферического отображения. Заметим, что пара $\mathbf{n}_u$, $\mathbf{n}_v$ это базисные векторы карты на единичной сфере в координатах u, v, определенной сферическим отображением. Его матрица Якоби есть матрица (b^i_j), равная, согласно нашему вычислению, произведению матриц g^{ki} и b_{kj}, а определитель этой матрицы, т.е. якобиан сферического отображения, равен $\frac{1}{g}\det(b_{kj})$, т.е. K. Мы доказывали это выше (п.6 гл.12Б) с помощью геометрических соображений.

2. Символы Кристоффеля и дифференцирование векторных полей на поверхности.

Нам осталось найти коэффициенты Γ^k_{ij}. Они называются *символами Кристоффеля* (или “кристоффелями”) и играют особую роль.

Именно, с помощью деривационных уравнений мы введем сейчас операцию дифференцирования векторных полей на M^2 вдоль кривых на M^2. Это должна быть операция, которая касательному векторному полю сопоставляет в каждой точке гладкой кривой вектор, касательный к поверхности и выражающий изменение поля вдоль кривой в этой точке. Она должна иметь свойства линейности и удовлетворять закону Лейбница относительно разных произведений.

Если (в пределах карты) задано векторное поле $\mathbf{m}(u,\, v)$ касательных векторов, мы можем разложить его по координатным полям:

$$\mathbf{m}(u,\, v) = m^1(u,\, v)\mathbf{r}_1 + m^2(u,\, v)\mathbf{r}_2$$

(m^1 и m^2 – координаты $\mathbf{m}$ в репере $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$). Если теперь дана кривая $\gamma \subset M^2$ с параметризацией $\mathbf{r}(u(t),\, v(t))$, то мы можем написать, по закону дифференцирования сложной функции, производную этого векторного поля вдоль кривой γ (*используя покоординатное дифференцирование в объемлющем пространстве* $\mathbb{R}^3$):

$$\frac{d\,\mathbf{m}}{d\,t} = \mathbf{m}_1\dot{u} + \mathbf{m}_2\dot{v}, \tag{+}$$

здесь производные $\mathbf{m}_1 = \frac{\partial\,\mathbf{m}}{\partial\,u}$ и $\mathbf{m}_2 = \frac{\partial\,\mathbf{m}}{\partial\,v}$ получаются по обычному правилу дифференцирования:

$$\mathbf{m}_j = m^1_j\mathbf{r}_1 + m^1\mathbf{r}_{1j} + m^2_j\mathbf{r}_2 + m^2\mathbf{r}_{2j}, \tag{++}$$

где m^1_j и m^2_j — производные коэффициентов m^1 и m^2. Сокращенно $\mathbf{m}_j = m^i_j\mathbf{r}_i + m^i\mathbf{r}_{ij}$.

Нам остается подставить выражения $\mathbf{r}_{1j}$ и $\mathbf{r}_{2j}$ через векторы репера $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{n}$ из деривационных уравнений.

Это дифференцирование законно, но, как говорилось, его недостаток тот, что результат не принадлежит поверхности, т.е. не является ее касательным вектором. В самом деле, остается нормальная составляющая.

Естественно возникает предложение (высказанное впервые в самом начале XX века Лѐви-Чивѝта) отбросить эту составляющую, т.е. спроектировать ортогонально результат на касательную плоскость.

Таким образом мы приходим к внутренней операции дифференцирования касательных векторных полей на M^2, которая заключается в обычном (внешнем для M^2) дифференцировании в пространстве $\mathbb{R}^3$ с последующим проектированием результата на касательную плоскость. Она называется *ковариантным дифференцированием*, и обладает необходимыми свойствами, которые мы изучим позже. Сейчас же отметим, что эта операция целиком определена символами Кристоффеля, т.е. правыми частями двух первых уравнений в каждой системе $(\times)$ с отброшенными третьими слагаемыми, которые содержат нормаль $\mathbf{n}$:

$$\begin{array}{ll} \Gamma^1_{11}\mathbf{r}_1 + \Gamma^2_{11}\mathbf{r}_2 & \qquad \Gamma^1_{12}\mathbf{r}_1 + \Gamma^2_{12}\mathbf{r}_2 \\ \Gamma^1_{21}\mathbf{r}_1 + \Gamma^2_{21}\mathbf{r}_2 & \qquad \Gamma^1_{22}\mathbf{r}_1 + \Gamma^2_{22}\mathbf{r}_2 \end{array}\;. \tag{$\times\times$}$$

Чтобы уточнить формальную сторону дела, нам прежде всего удобно перейти от обозначения координат u, v к обозначению x^1, x^2 в соответствии с обозначением координат $\mathbf{m}$ через m^i. Мы можем записать правые части деривационных уравнений *на поверхности*, т.е. после ортогонального проектирования, в виде $\Gamma^k_{ij}\mathbf{r}_k$. Далее, заметим, что для определения дифференцирования по параметру t в формуле (+) нам вовсе не требуется знать всю кривую γ. Если мы хотим знать производную векторного поля в данной точке кривой, нам достаточно знать координаты $\dot{x}^1$, $\dot{x}^2$ вектора скорости этой кривой в данной точке.

Чтобы отличить новую операцию, которую мы вводим, от обычного дифференцирования в объемлющем пространстве, введем обозначение $\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{m}(u, v)$ (читается: "набла" от m по w). Мы назвали ее ковариантным дифференцированием (касательного) векторного поля $\mathbf{m}(x^i)$ по (касательному) вектору $\mathbf{w}(x^i)$ в данной точке $A \in M^2$. Дифференцирование по вектору скорости $\dot{\gamma}$ данной кривой γ будем обозначать также $\nabla_t\mathbf{m} = \nabla_{\dot{\gamma}}\mathbf{m}$, а дифференцирование по i-ой координате, т.е. по вектору $\mathbf{r}_i$, через $\nabla_i\mathbf{m}$.

Таким образом, мы можем определить, как и в обычном анализе, производную $\nabla_t\mathbf{m}$ векторного поля $\mathbf{m}$ по вектору $(\dot{x}^i) = \dot{\gamma}$ по аналогии с формулой (+), т.е. $\nabla_t\mathbf{m} = \nabla_i\mathbf{m}\,\dot{x}^i$. При этом частные ковариантные производные $\nabla_i\mathbf{m}$ также определяются обычным вычислением по формуле (++), но производные $\mathbf{r}_{ij}$ мы заменяем "укороченными" выражениями $\Gamma^k_{ij}\mathbf{r}_k$.

Повторим определение ковариантной производной в обратном порядке: сперва мы определяем ковариантные производные $\nabla_j\mathbf{r}_i = \nabla_{\mathbf{r}_j}\mathbf{r}_i$ — производные координатного вектора $\mathbf{r}_i(x)$ по координатному вектору $\mathbf{r}_j$ в данной точке. При этом мы используем выражения ($\times\times$):

$$\nabla_j\mathbf{r}_i = \Gamma^k_{ij}\mathbf{r}_k, \qquad (\times\times\times)$$

т.е., берется покоординатное дифференцирование в $\mathbb{R}^3$ с последующей проекцией на касательную плоскость. Кристоффели являются координатами производной в данном репере. *Их заданием определяется операция.* Далее мы можем определить частные ковариантные производные $\nabla_j\mathbf{m}$ от каждого векторного поля в данной карте с помощью правила Лейбница, т.е. по формуле (++), но с использованием ($\times\times\times$) вместо ($\times$) для дифференцирования координатных полей (и обычного дифференцирования для скалярных коэффициентов):

$$\nabla_j\mathbf{m}(x) = \nabla_j(m^i\mathbf{r}_i) = \frac{\partial m^i}{\partial x^j}\mathbf{r}_i + m^k\nabla_j\mathbf{r}_k = (m^i_j + m^k\Gamma^i_{kj})\mathbf{r}_i.$$

(Мы поменяли индекс суммирования, чтобы вынести $\mathbf{r}_i$ за общую скобку.)

Наконец, мы можем определить ковариантную производную векторного поля $\mathbf{m}(u, v)$ по вектору $\mathbf{w}$ с координатами w^i в данной точке формулой аналогичной обычной:

$$\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{m} = \nabla_j\mathbf{m}\,w^j.$$

В частности, производная $\nabla_{\dot{\gamma}}\mathbf{m}$ по вектору скорости $\dot{\gamma}$ параметризованной кривой γ есть $\nabla_1\mathbf{m}(x(t))\,\dot{u}(t) + \nabla_2\mathbf{m}(x(t)\,\dot{v}(t))$. Ее обозначают также $\nabla_t\mathbf{m}$ или еще $\frac{\mathcal{D}\,m}{d\,t}$ (чтобы отличить от дифференцирования по параметру кривой в $\mathbb{R}^3$).

Теперь соберем это определение дифференцирования в одну формулу

$$\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{m} = \nabla_{w^j\mathbf{r}_j}(m^i\mathbf{r}_i) = \nabla_j(m^i\mathbf{r}_i)w^j = (m^i_j + m^k\Gamma^i_{kj})\mathbf{r}_i w^j.$$

Выражение в скобках естественно назвать частной ковариантной производной векторного поля по i-ой координате.

Мы не будем во всех деталях доказывать свойства построенной операции. Ее линейность очевидна. Правило Лейбница для произведения скалярной функции на векторное поле выполнено фактически в силу определения: $\nabla_{\mathbf{w}}(f\mathbf{m}) = \nabla_{\mathbf{w}}(f)m + f\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{m}$, где $\nabla_{\mathbf{w}}f = \frac{\partial f}{\partial x^i}w^i$.

Утверждение 1. Правило Лейбница для дифференцирования скалярного произведения векторных полей выполнено в следующей ковариантной форме: $\frac{d\,(\mathbf{a},\,\mathbf{b})}{d\,\mathbf{w}} = (\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{a},\,\mathbf{b}) + (\mathbf{a},\,\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{b})$.

Доказательство. Навенство справедливо для обычных покоординатных производных в $\mathbb{R}^3$, но скалярное произведение вектора $\mathbf{u}$ на вектор $\mathbf{v}$, лежащий в данной плоскости, равно скалярному произведению с $\mathbf{v}$ проекции $\mathbf{u}$ на эту плоскость. ■

Это дает нашей операции право на название дифференцирования.

Замечание. Мы принимаем, что действие оператора $\nabla_{\mathbf{w}}$ на функции совпадает с дифференцированием функции по вектору. В самом деле, в этом случае не имеет значения, рассматриваем ли мы дифференцирование функции только на поверхности или в трехмерном пространстве.

Для нас важны два свойства этой операции. Одно из них очевидно по определению, т.к. проекция вектора есть вектор:

Утверждение 2. Ковариантная производная векторного поля по вектору в данной точке является вектором. ■

(Иными словами, при переходе от одной карты к другой координаты производной заменяются с помощью матрицы Якоби.)

Второе свойство введенной операции особенно важно. Мы сейчас покажем, что коэффициенты Кристоффеля полностью определены первой квадратичной формой. Это значит, что если две карты φ_i двух поверхностей M_1^2 и M_2^2 параметризованы точками одной и той же плоской области V и во всех соответствующих точках (т.е. с теми же значениями параметров) коэффициенты первых квадратичных форм совпадают, то совпадают и символы Кристоффеля в соответствующих точках. Иначе говоря, символы Кристоффеля сохраняются, когда одна поверхность получается из другой (в пределах данных карт) с помощью *изгибания* (т.е. с сохранением длин кривых, без растяжений, сжатий или разрывов).

Утверждение 3. Символы Кристоффеля выражаются через коэффициенты первой квадратичной формы и их первые производные. Именно, обозначая через (g^{lk}) матрицу обратную к матрице (g_{ij}) $(g^{lk}g_{kj} = \delta^l_j)$, имеем

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial\, g_{jl}}{\partial\, x^i} + \frac{\partial\, g_{il}}{\partial\, x^j} - \frac{\partial\, g_{ij}}{\partial\, x^l} \right). \tag{!}$$

(Первый нижний индекс i кристоффеля соответствует номеру дифференцируемого базисного вектора, второй нижний индекс j – переменной, по которой производится дифференцирование, верхний индекс – номеру базисного вектора в разложении правой части в $(\times\times\times)$.) Переменные x^1 и x^2 в правой части соответственно совпадают с координатами u и v.

Доказательство. Возьмем уравнения $(\times)$, выражающие производные базисных векторов $\mathbf{r}_j$ в сокращенной форме $\mathbf{r}_{ji} = \Gamma^s_{ji}\mathbf{r}_s$. Умножим скалярно это равенство на $\mathbf{r}_l$. Мы получим $(\mathbf{r}_{ji}, \mathbf{r}_l) = \Gamma^s_{ji} g_{ls}$. Но

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} = \frac{\partial(\mathbf{r}_j,\, \mathbf{r}_l)}{\partial x^i} = (\mathbf{r}_{ji}, \mathbf{r}_l) + (\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_{li}) = \Gamma^s_{ji} g_{ls} + \Gamma^s_{li} g_{js}.$$

Беря полусумму трех таких слагаемых, два с плюсом и одно с минусом, получаем, используя симметрию кристоффелей по нижним индексам, *тождества Кристоффеля 1-го рода*:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\, g_{jl}}{\partial\, x^i} + \frac{\partial\, g_{il}}{\partial\, x^j} - \frac{\partial\, g_{ij}}{\partial\, x^l} \right) = g_{ls}\Gamma^s_{ij}.$$

Умножим это матричное равенство (при каждой паре i, j) на обратную матрицу (g^{lk}) (т.е. умножим на g^{lk} и просуммируем по l). Справа мы получим произведение $\delta^k_s \Gamma^s_{ij}$. Здесь δ^k_s – единичная матрица, и это произведение означает просто, что мы можем поменять индекс s на k (при $s \neq k$ получается нуль). Мы пришли к требуемому равенству, которое называют *тождествами Кристоффеля 2-го рода.* ■

Мы говорили, что Гаусс назвал свойства, зависящие только от первой квадратичной формы, *внутренними* (принадлежащими внутренней геометрии поверхности), т.е. не зависящиими от расположения этой поверхности во внешнем пространстве. Поэтому, хотя наше определение дифференцирования на поверхности использовало дифференцирование в объемлющем пространстве, оно принадлежит внутренней геометрии поверхности и не зависит от ее расположения в пространстве. Конечно, в нашем случае берется метрика, которая индуцирована из стандартной метрики пространства, но любая риманова метрика задает по полученным формулам свои символы Кристоффеля, и, значит, свою операцию дифференцирования векторных полей по вектору, которая будет иметь такие же формальные свойства, даже если метрика была введена на поверхности независимо от ее вложения в $\mathbb{R}^3$.

Итак, мы решили важную задачу — построено дифференцирование векторных полей на поверхности в трехмерном пространстве, которое не зависит от вложения этой поверхности в пространство. Это значит, что диффеоморфизм между двумя поверхностями, который сохраняет риманову метрику (первую квадратичную форму), будет переводить (ковариантную) производную векторного поля в ковариантную производную его образа.

Замечание. В наших рассуждениях о символах Кристоффеля мы перешли от обозначения переменных u, v к индексным обозначениям. Это удобно хотя бы потому, что записи становятся компактнее. Например, четверка деривационных уравнений (в ковариантной форме $(\times\times\times)$) записывается равенством:

$$\nabla_{\mathbf{r}_i} \mathbf{r}_j = \Gamma^k_{ji} \mathbf{r}_k. \tag{$*$}$$

Однако, польза от такой записи не ограничивается удобством. Важно, что позволяяя индексам меняться от 1 до какого-нибудь заданного m, мы автоматически перенесем наши результаты на случай m-мерной поверхности (подмногообразия) в пространстве $\mathbb{R}^n$, заданной, например, параметрически векторной функцией $\mathbf{r}(u_1, \ldots, u_m)$.

Действительно, по стандартной метрике в $\mathbb{R}^n$ мы определяем метрику $g_{ij} = (\mathbf{r}_i,\, \mathbf{r}_j)$ на поверхности, по метрике уравнениями (!) определяем кристоффели, а с помощью $(*)$ — ковариантное дифференцирование базисных координатных полей, которое дальше распространяется на все поля по линейности и с помощью правила Лейбница.

Для подмногообразия коразмерности 1 (т.е. $m = n-1$) мы можем также определить вторую квадратичную форму той же формулой $(\mathbf{r}_{ij},\, \mathbf{n}) = b_{ij}$ и отождествить с ее помощью окаймляющие элементы деривационных уравнений. Ситуация в общем случае, конечно, сложнее трехмерной (характеристический многочлен пары форм имеет много корней !), и мы не будем ее обсуждать (см. Громов...)

Подробное изучение ковариантного дифференцирования в многомерном случае мы оставляем до второго тома, теперь же вернемся к случаю поверхностей в $\mathbb{R}^3$.

3. Теорема Гаусса. Первое доказательство.

Мы докажем теперь теорему Гаусса, сформулированную выше, выразив кривизну поверхности через символы Кристоффеля и их производные, используя утверждение предыдущего пункта.

Точнее говоря, нам достаточно выразить через кристоффели определитель второй квадратичной формы, т.к. кривизна, как мы знаем из п.7 гл.12, есть отношение определителей второй и первой квадратичных форм.

Но этот определитель легко выделяется с помощью деривационных уравнений (в исходной форме $(\times)$). Выразим двумя способами $(\mathbf{r}_{11},\, \mathbf{r}_{22}) - (\mathbf{r}_{12},\, \mathbf{r}_{12})$. Во-первых:

$$(\mathbf{r}_{11},\, \mathbf{r}_{22}) - (\mathbf{r}_{12},\, \mathbf{r}_{12}) = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 + \Gamma_{11}^k\Gamma_{22}^l g_{kl} - \Gamma_{12}^k\Gamma_{12}^l g_{kl}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k\, \partial x^l} = \frac{\partial^2 (\mathbf{r}_i,\, \mathbf{r}_j)}{\partial x^k\, \partial x^l} = (\mathbf{r}_{ik},\, \mathbf{r}_{jl}) + (\mathbf{r}_{il},\, \mathbf{r}_{jk}) + (\mathbf{r}_i,\, \mathbf{r}_{jkl}) + (\mathbf{r}_{ikl},\, \mathbf{r}_j),$$

откуда легко подсчитать, что

$$\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1\, \partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2\, \partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1\, \partial x^1} = (\mathbf{r}_{11},\, \mathbf{r}_{22}) - (\mathbf{r}_{12},\, \mathbf{r}_{12}).$$

В результате мы получаем требуемое выражение кривизны K поверхности в данной точке:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1\, \partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2\, \partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1\, \partial x^1} - g_{kl}\left(\Gamma_{11}^k\Gamma_{22}^l - \Gamma_{12}^k\Gamma_{12}^l\right)\right).$$

В этом выражении K все величины выражаются через элементы матрицы первой квадратичной формы и ее производные до второго порядка включительно (см. (!)). ■

Это доказательство достаточно прозрачно, хотя требует некоторых вычислений, а само выражение кривизны мало удобно. Мы ниже дадим более простое выражение и, кроме того, дадим еще два доказательства этой важной теоремы на основе геометрических соображений.

Как мы говорили, имеется еще один важный повод для введения деривационных уравнений — представление поверхности решением дифференциального уравнения в частных проиводных. Мы не будем заниматься здесь этой задачей (см....), но немного позже сделаем несколько замечаний для ориентации читателя.

Чтобы получить более удобную для вычислений формулу кривизны, рассмотрим доказательство теоремы Гаусса, выбрав карту с ортогональными координатными линиями.

4. Теорема Гаусса в ортогональном репере.

Ортогональные координаты. Начнем с напоминания (см. гл. 9 п.7) возможности ввести в окрестности каждой точки A поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$ ортогональную систему координат (u, v), т.е. такую, что в каждой точке окрестности координатные линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ ортогональны (т.е. ортогональны их касательные векторы).

Упражнение. Вспомните, как строится ортогональная система координат.

Метрика в ортогональной системе. Если координатные линии данной локальной координатной системы ортогональны в каждой точке, то второй коэффициент $F = (\mathbf{r}_u,\, \mathbf{r}_v)$ первой квадратичной формы равен нулю, и метрика имеет вид

$$ds^2 = A(u,v)^2du^2 + B(u,v)^2dv^2$$

(коэффициенты положительны, они выражают квадраты длин координатных векторов в касательной плоскости и поэтому их можно представить квадратами.)

Итак, допустим, что в данной локальной карте $\varphi : W \to U \subset M^2 \subset \mathbb{R}^3$ $(W \subset R^2)$ метрика имеет указанный вид. Обозначим, как обычно, радиус-вектор точки поверхности через $\mathbf{r}(u, v)$. Тогда: $|\mathbf{r}_u| = A$, $|\mathbf{r}_v| = B$.

Введем специальные ортонормированные реперы в точках окрестности U. Орты $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$ реперов возьмем касательными к координатным кривым. Тогда $\mathbf{h}_1 = \frac{\mathbf{r}_u}{A}$ и $\mathbf{h}_2 = \frac{\mathbf{r}_v}{B}$. Третий орт $\mathbf{n}$ возьмем по нормали к поверхности так, чтобы тройка $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{n}$ оказалась положительной.

Построенные специальные реперы назовем *нормальными.* (Их можно было бы назвать реперами Дарбу по аналогии с реперами Френе для кривых, поскольку впервые систематически такое поле реперов рассматривал Дарбу (а неявно еще Эйлер).

Замечание. Репер $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$ *не является координатным* для данной системы кординат, т.е. эти векторы не являются векторами скорости координатных кривых в их естественной параметризации. Более того, вообще говоря, он не является координатным ни для какой системы координат, поскольку скобка Ли этих векторов не обязательно нулевая.

Задача. Скобка Ли этих векторов нулевая, только если A и B постоянны вдоль соответствующих (каких?) координатных кривых. (Посчитайте координаты скобки Ли. Что можно сказать о метрике в этом случае?)

Деривационные уравнения. Напишем теперь деривационные уравнения в этой координатной системе. При перемещении точки по гладкой кривой на поверхности возникает кривая в пространстве реперов и постольку, поскольку мы построили *ортонормированные* реперы, их производные будут выражаться кососимметрическими матрицами, если производные выражать в самом репере в данной точке. Поэтому можно сразу написать:

$$\left(\begin{array}{rcccccc} \mathbf{h}_{1u} = & 0 & + & p\,\mathbf{h}_2 & + & b_1\mathbf{n} \\ \mathbf{h}_{2u} = & -p\,\mathbf{h}_1 & + & 0 & + & b_2\mathbf{n} \\ \mathbf{n}_u = & -b_1\mathbf{h}_1 & - & b_2\mathbf{h}_2 & + & 0 \\[2mm] \mathbf{h}_{1v} = & 0 & + & q\,\mathbf{h}_2 & + & c_1\mathbf{n} \\ \mathbf{h}_{2v} = & -q\,\mathbf{h}_1 & + & 0 & + & c_2\mathbf{n} \\ \mathbf{n}_v = & -c_1\mathbf{h}_1 & - & c_2\mathbf{h}_2 & + & 0 \end{array}\right)$$

Выражение коэффициентов. Наша первая задача, как и ранее, — выразить коэффициенты этих уравнений через коэффициенты двух квадратичных форм и их производные.

Очевидно, $p = (\mathbf{h}_{1u}, \mathbf{h}_2) = -(\mathbf{h}_{2u}, \mathbf{h}_1)$ и аналогично $q = (\mathbf{h}_{1v}, \mathbf{h}_2) = -(\mathbf{h}_{2v}, \mathbf{h}_1)$.

Но $\mathbf{h}_{2u} = (\frac{\mathbf{r}_v}{B})_u = \frac{\mathbf{r}_{uv}}{B} + (\frac{1}{B})_u \mathbf{r}_v$ и, значит, $-(\mathbf{h}_{2u}, \mathbf{h}_1) = -\frac{(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u)}{AB} = -\frac{(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u)_v}{2AB} = -\frac{(A^2)_v}{2AB} = -\frac{2AA_v}{2AB} = -\frac{A_v}{B}$.

В результате $p = -\frac{A_v}{B}$ и аналогично $q = \frac{B_u}{A}$.

Далее: $b_1 = (\mathbf{h}_{1u}, \mathbf{n})$ и $b_2 = (\mathbf{h}_{2u}, \mathbf{n})$ и, также, $c_1 = (\mathbf{h}_{1v}, \mathbf{n})$ и $c_2 = (\mathbf{h}_{2v}, \mathbf{n})$.

Аналогично предыдущему: $\mathbf{h}_{1u} = (\frac{\mathbf{r}_u}{A})_u = \frac{\mathbf{r}_{uu}}{A} + (\frac{1}{A})_u \mathbf{r}_u$, $\mathbf{h}_{2u} = \frac{\mathbf{r}_{vu}}{B} + (\frac{1}{B})_u \mathbf{r}_v$, откуда $b_1 = \frac{L}{A}$, $b_2 = \frac{M}{B}$ и также $c_1 = \frac{M}{A}$, $c_2 = \frac{N}{B}$. Итак,

$$\begin{array}{ll} \mathbf{h}_{1u} = -\frac{A_v}{B}\mathbf{h}_2 + \frac{L}{A}\mathbf{n} & \mathbf{h}_{1v} = \frac{B_u}{A}\mathbf{h}_2 + \frac{M}{A}\mathbf{n} \\ \mathbf{h}_{2u} = \frac{A_v}{B}\mathbf{h}_1 + \frac{M}{B}\mathbf{n} & \mathbf{h}_{2v} = -\frac{B_u}{A}\mathbf{h}_1 + \frac{N}{B}\mathbf{n}. \end{array} \tag{$*$}$$

Разумеется, этот результат можно получить и с помощью кристоффелей. Например:

$$\mathbf{r}_{uu} = \Gamma^u_{uu}\mathbf{r}_u + \Gamma^v_{uu}\mathbf{r}_v; \quad \Gamma^u_{uu} = \frac{1}{2A^2}\left(\frac{\partial A^2}{\partial u}\right) = \frac{A_u}{A},\ \Gamma^v_{uu} = \frac{1}{2B^2}\left(-\frac{\partial A^2}{\partial v}\right) = -\frac{AA_v}{B^2}.$$

$$\left(\frac{\mathbf{r}_u}{A}\right)_u = \frac{\mathbf{r}_{uu}}{A} - \frac{A_u\mathbf{r}_u}{A^2} = \frac{\Gamma^u_{uu}\mathbf{r}_u + \Gamma^v_{uu}\mathbf{r}_v}{A} - \frac{A_u\mathbf{r}_u}{A^2} = \left(\frac{\Gamma^u_{uu}}{A} - \frac{A_u}{A^2}\right)\mathbf{r}_u + \frac{\Gamma^v_{uu}B}{A}\frac{\mathbf{r}_v}{B}.$$

Первая скобка равна нулю. Мы видим, что $p = \frac{\Gamma^v_{uu}B}{A} = -\frac{A_v}{B}$, как и должно быть, согласно предыдущему.

Доказательство теоремы Гаусса в ортогональном репере. Наша задача, как мы помним, — выразить детерминант $\Delta = LN - M^2$ через коэффициенты E, F, G и их производные. Из полученных выражений $(*)$ видно, что детерминант Δ выделится, если взять, так сказать, скалярный детерминант $(\mathbf{h}_{1u}, \mathbf{h}_{2v}) - (\mathbf{h}_{1v}, \mathbf{h}_{2u})$ этих векторов. Эта разность равняется $\frac{\Delta}{AB}$. Вспомним, что гауссова кривизна K равняется отношению двух определителей $K = \frac{\Delta}{g}$. В нашем случае определитель $g = EG - F^2$ равен A^2B^2. Таким образом, получаем $KAB = \frac{\Delta}{AB}$.

Но, возвращаясь к выражению для Δ, имеем

$$\begin{array}{ll} (\mathbf{h}_{1u}, \mathbf{h}_{2v}) & = (\mathbf{h}_{1u}, \mathbf{h}_2)_v - (\mathbf{h}_{1uv}, \mathbf{h}_2) = p_v - (\mathbf{h}_{1uv}, \mathbf{h}_2) \\ (\mathbf{h}_{2u}, \mathbf{h}_{1v}) & = (\mathbf{h}_{1v}, \mathbf{h}_2)_u - (\mathbf{h}_{1uv}, \mathbf{h}_2) = q_u - (\mathbf{h}_{1uv}, \mathbf{h}_2). \end{array}$$

Отсюда $KAB = \frac{\Delta}{AB} = (\mathbf{h}_{1u}, \mathbf{h}_{2v}) - (\mathbf{h}_{2u}, \mathbf{h}_{1v}) = \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial u}$ и, окончательно,

$$K = \frac{p_v - q_u}{AB} = -\frac{(\frac{B_u}{A})_u + (\frac{A_v}{B})_v}{AB}. \tag{$**$}$$

Это доказывает теорему Гаусса. ■

Упражнение. Как выражается коэффициент q через символы Кристоффеля в данной ортогональной карте и символы Кристоффеля через p и q?

Другие формулы для кривизны. Хотя смысл теоремы Гаусса понятен, приведенное доказательство не слишком удовлетворительно (хотя и достаточное для ответа на экзамене). Мы ниже дадим другие доказательства, которые геометрически более содержательны. Приведем еще пару формул, выражающих кривизну в терминах первой квадратичной формы.

Формула, которую вывел Гаусс в своем мемуаре ($g = EG - F^2$):

$$\begin{aligned}4g^2K = \quad & E(E_vG_v - 2F_uG_u + G^2)+\\ & +F(E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v + 4F_uF_v - 2F_uG_u)+\\ & +G(E_uG_u - 2E_uF_v + E_v^2) - 2g(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}).\end{aligned}$$

Иногда приводят формулу Фробениуса:

$$K = -\frac{1}{4g^2}\begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v. \end{vmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{F_v - G_u}{\sqrt{g}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{F_u - E_v}{\sqrt{g}}\right)$$

(иррациональность уничтожается после проведения всех операций).

5. Метрика и ее кривизна.

Мы знаем, что если можно одновременно параметризовать две поверхности так, что в точках, отвечающих той же самой координатной паре параметров, соответствующие коэффициенты первой квадратичной формы будут совпадать, то длины соответствующих дуг в этих картах будут равными и также будут совпадать углы, площади и все, что принадлежит *внутренней геометрии этих поверхностей.* К ней принадлежит, согласно теореме Гаусса, также полная кривизна K.

Это значит, в частности, что мы не сможем так “расправить” кусок сферы, не допуская растяжений и сжатий, чтобы он стал плоским. Ибо полная кривизна плоскости во всех точках нуль, а у сферы радиуса R во всех точках $1/R^2$.

С другой стороны развертывающиеся поверхности можно изометрически отобразить на плоскость и это еще раз доказывает, что кривизна таких поверхностей нулевая.

Терминология. Отображение поверхности на поверхность с сохранением длин кривых, т.е. с совпадением первых квадратичных форм в согласованных параметризациях, сам Гаусс называл *развертыванием поверхности на поверхность*, считая это обобщением развертывания на плоскость поверхностей, которые сейчас и называют развертывающимися. Теперь такие отображения называют *изгибанием или наложением* или просто изометрией.

Теорема Гаусса дает необходимое условие возможности изгибания для двух поверхностей, основанное на определении кривизны через метрику. В обратную сторону вопрос более сложный. На всякой поверхности можно ввести локальные изотермические координаты, в которых первая квадратичная форма будет иметь вид $ds^2 = C(u,v)\,(du^2 + dv^2)$. В этой метрике $g = C^2$ и кривизна, согласно выведенной нами формуле, оказывается равной

$$K = -\frac{(\ln C)_{uu} + (\ln C)_{vv}}{2\,C} = -\frac{1}{2\sqrt{g}}\Delta(\ln\sqrt{g}),$$

здесь Δ – оператор Лапласа.

Мы видим, что по функции кривизны функция g, задающая в изотермических координатах метрику, определяется как решение дифференциального уравнения в частных производных, т.е., неоднозначно, вообще говоря. Но, кроме того, требуется исследование, для каких решений возможны *в трехмерном пространстве* поверхности с соответствующей метрикой. Это значит, что определив по заданной функции кривизны метрику, мы должны выяснить, можно ли получившееся риманово многообразие вложить в трехмерное пространство так, чтобы эта метрика индуцировалась стандартной метрикой в $\mathbb{R}^3$.

6. Две квадратичные формы поверхности и ее геометрическая форма.

Теперь снова обратимся к полученным выше производным векторов репера и поставим вопрос, аналогичный тому, ответ на который был получен для формул Френе. В какой мере две квадратичные формы *вместе* определяют форму поверхности в $\mathbb{R}^3$, т.е. ее расположение с точностью до движений?

Однозначность задания поверхности двумя квадратичными формами. Оказывается ответ здесь такой же: определяют однозначно. Две поверхности, имеющие общие параметризации, для которых значения форм в соответствующих точках совпадают, переводятся друг в друга движением $\mathbb{R}^3$. (Точнее говоря: отображение, переводящее каждую точку одной поверхности в точку с теми же параметрами другой, получается движением пространства $\mathbb{R}^3$.)

Взаимозависимость квадратичных форм. Однако, в то время как для кривой ее набор кривизн может быть задан произвольно, задание второй квадратичной формы подчинено некоторым условиям. Это показывает уже теорема Гаусса: определитель второй формы определенным образом выражается через коэффициенты первой формы.

Этим дело не ограничивается, имеются дополнительные ограничения, которые мы сформулируем позже. Сейчас докажем однозначность поверхности с заданными двумя формами.

Теорема однозначности. *Пусть две поверхности M_1, M_2 в $\mathbb{R}^3$ имеют локальные параметризации $\varphi_1 : W \to U_1$ и $\varphi_2 : W \to U_2$ с общими параметрами (u,v). Допустим, что для каждой пары точек $A_1(u,v) \in$*

U_1 и $A_2(u,v) \in U_2$, отвечающих одной паре (u,v), значения коэффициентов обеих форм совпадают. Тогда существует движение $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, при котором $Q(\varphi_1(\mathbf{x})) = \varphi_2(\mathbf{x})$ для всех точек $\mathbf{x} \in W$.

Будем для простоты считать, что в каждой точке поверхности обе главные кривизны отличны от нуля и друг от друга. (Это исключит особые случаи, например, когда поверхность состоит из двух кусков, пересекающихся по прямой и касающихся в точках этой прямой плоскости, содержащей прямую — мы можем в этом случае заменить один кусок его отражением в этой плоскости и оставить другой неподвижным.)

Ясно, что движение Q определено однозначно касательным репером в любой точке поверхности. Поэтому, если имеются две пересекающиеся карты и для одной определено движение Q, то оно сохранится и при переходе ко второй карте, если для нее также выполнены условия теоремы.

Поэтому мы проведем рассуждение для одной пары соответствующих локальных карт.

Доказательство теоремы. Для параметризаций наших поверхностей с общей областью определения возьмем реперы Дарбу в точках, имеющих одинаковые координаты: $\mathbf{h}_1(u,v)$, $\mathbf{h}_2(u,v)$, $\mathbf{n}(u,v)$ для U_1 и $\mathbf{h}_1'(u,v)$, $\mathbf{h}_2'(u,v)$, $\mathbf{n}'(u,v)$ для U_2.

Совместим реперы в одной паре соответствующих точек движением пространства, которое определено ими однозначно. Поэтому дальше можно считать, что уже данные поверхности таковы, что они имеют одну общую точку, в которой нормальные реперы совпадают.

Мы можем также считать, что область W, на которой заданы обе карты, является внутренностью круга. Рассмотрим семейство ее радиусов и для каждого радиуса ρ покажем, что его два образа в двух картах совпадают в $\mathbb{R}^3$. Ясно, что в результате мы получим совпадение окрестностей U_i.

Если принять за параметр t на радиусе ρ расстояние точки на радиусе от начала, то так же, как в случае уравнений Френе, на выражения для производных векторов репера можно смотреть как на систему обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра t. Эти системы (т.е. их коэффициенты) совпадают, т.к. они выражаются через первую и вторую квадаратичные формы.

Поскольку начальные данные для обеих локальных карт совпадают, поле реперов вдоль обоих образов радиуса $\varphi_i(\rho)$ будет, по теореме единственности, тем же самым. Но совпадение двух первых пар векторов (касательных) этих реперов (т.е. $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_1'$, $\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_2'$) означает, в частности, совпадение в каждой точке радиуса дифференциала отображения, задающего локальную карту. Тогда будут совпадать и образы ортов, идущих по направлению радиуса, т.е. векторы-скорости обоих кривых, служащих образами радиуса. Но поскольку начальные точки этих кривых совпадают, кривые тогда будут совпадать во всех своих соответствующих точках, что получается интегрированием векторной производной. ■

Замечание о теореме Петерсона–Кодацци. Дополнением к теореме Гаусса служит теорема Петерсона – Майнарди – Кодацци. Вместе эти теоремы дают условия на две формы с тем, чтобы *нашлась* в $\mathbb{R}^3$ поверхность, в некоторой локальной системе координат которой эти формы оказались бы ее первой и второй квадратичными формами.

Эти теоремы дают *условия интегрируемости* дифференциальных уравнений в частных производных, которые выражают производные нормального репера в нем самом. (В отличие от уравнений Френе для кривой, которые являются системой обыкновенных дифференциальных уравнений, интегрируемость уравнений репера поверхности – системы уравнений *в частных производных* – возможна не всегда, а только при выполнении определенных условий, связанных с теоремой Фробениуса.)

Эти условия вытекают из симметрии частных производных. Именно, если записать деривационные уравнения в матричной форме

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\\ \mathbf{n}\end{pmatrix} = A_j\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\\ \mathbf{n}\end{pmatrix},$$

где A_j — две матрицы коэффициентов, то условие равенства смешанных производных

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\\ \mathbf{n}\end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x^1}\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\\ \mathbf{n}\end{pmatrix}$$

сведется к матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x^1}A_2 - \frac{\partial}{\partial x^2}A_1 = A_1A_2 - A_2A_1,$$

которое и выражает условия Петерсона - Мейнарда - Кодацци. (Немного подробнее см. Тайманов «Лекции по диф.геом.»)

Приведем также соответствующие формулы в ортогональной системе координат.

$$\begin{aligned} L_v - M_u &= (\ln A)_v L + (\ln \tfrac{A}{B})_u M + \tfrac{A^2}{B^2}(\ln A)_v N \\ M_v - N_u &= -\tfrac{B^2}{A^2}(\ln B)_u L - (\ln \tfrac{B}{A})_v M - (\ln B)_u N. \end{aligned}$$

Глава 14. Параллельный перенос, геодезические и второе доказательство теоремы Гаусса

1. Параллельный перенос.

Теперь вернемся к деривационным уравнениям. Попробуем понять первое уравнение $\nabla_1\mathbf{r}_1 = \Gamma^1_{11}\mathbf{r}_1 + \Gamma^2_{11}\mathbf{r}_2$ с точки зрения плоской области $W \subset \mathbb{R}^2$ параметров u, v, т.е. переноса происходящее на поверхности M в $\mathbb{R}^3$ на координатную плоскость $\mathbb{R}^2$ с помощью диффеоморфизма $\varphi : W \to U \subset M$ локальной карты и его дифференциала $d\varphi$. Мы знаем, что мы можем изучать метрику поверхности M и связанную с метрикой внутреннюю геометрию поверхности, оставаясь в плоской координатной области, но перенеся в ее точки скалярное произведение, определяющее метрику поверхности. Теперь мы хотим рассмотреть векторное дифференцирование на поверхности в трехмерном пространстве с точки зрения координатной двумерной плоскости.

Вектор $\mathbf{r}_1$, который мы дифференцируем, является базисным касательным вектором к поверхности в $\mathbb{R}^3$, направленным по координатной линии. Вектор $\mathbf{e}_1$ на плоскости, который переводится дифференциалом в $\mathbf{r}_1$, базисный в координатной плоскости, он направлен по координатной оси $v = 0$ и имеет длину 1. Если мы продифференцируем этот вектор обычным образом "с точки зрения плоскости", то получим нулевой вектор.

Несогласованность дифференцирований в $\mathbb{R}^3$ и в плоскости координат. Между тем по нашей формуле производная, вообще говоря, не нуль и зависит от метрики. Это естественно, т.к. дифференциал карты меняется от точки к точке. Но введение дифференцирования векторных полей на поверхности позволяет определить параллельность векторов на поверхности, но не "в целом", т.е. сразу в любой паре точек, а "инфинизимально", т.е. при малых смещениях в каждом направлении. Именно: смещение векторов будет параллельным, если ковариантная производная такого смещения равна нулю. Таким образом, параллельное смещение $\mathbf{e}_1$ вдоль своей оси в координатной плоскости не будет параллельным "с точки зрения поверхности". Это выглядит очевидным, если поверхность изогнута *в пространстве*, но нас интересует сейчас "внутренняя точка зрения" поверхности.

Ковариантную производную мы определили вдоль кривых, поэтому и параллельное смещение векторов мы также можем определить вдоль кривых. Такое смещение мы назовем *параллельным переносом.* Но при этом, как правило, окажется, что для двух кривых, соединяющих две точки перенос вектора вдоль каждой из них приведет к различным результатам. Поэтому мы не сможем сказать для двух векторов, касательных в двух различных точках поверхности параллельны они или нет. Мы сможем только сказать, будут ли они получаться параллельным переносом один из другого вдоль данной кривой, соединяющей эти точки. Введем основное определение.

Определение. Пусть в некоторой окрестности кривой γ на поверхности $M^2 \subset \mathbb{R}^2$ задано гладкое векторное поле $\mathbf{v}(x)$. Мы скажем, что это поле параллельно вдоль кривой γ, если ковариантная производная $\nabla_{\dot\gamma}\mathbf{v}$ равна нулю в каждой точке кривой. Если какие-то две точки кривой x и y выделены, то мы можем сказать также, что поле $\mathbf{v}(x)$, рассматриваемое только в точках кривой, является параллельным перенесением вектора $\mathbf{v}(x)$ в вектор $\mathbf{v}(y)$ вдоль кривой γ.

Замечание. Мы потребовали, чтобы поле было определено в окрестности кривой, а не только в точках самой кривой, чтобы иметь возможность говорить о гладкости поля. Как мы сейчас увидим, параллельность поля вдоль кривой зависит только от значений его в точках самой кривой: при любом продолжении его на окрестность оно останется параллельным, если оно параллельно при каком-либо одном продолжении.

Уравнение параллельности. По определению, поле $\mathbf{v}(x)$ параллельно, если $\nabla_{\dot\gamma}\mathbf{v} = 0$. Распишем это уравнение в координатах:

$$(\nabla_{\dot\gamma}\mathbf{v})^i = \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + v^k\Gamma^i_{kj}\right)\dot x^j = \frac{d\,v^i}{d\,t} + v^k\Gamma^i_{kj}\dot x^j = 0. \tag{§}$$

Это линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных функций. Мы записали его в двух формах. Заметим, что хотя в первой форме левая часть требует, чтобы наше векторное поле было определено в окрестности кривой γ (чтобы иметь возможность брать частные призводные), во второй форме нам нужно только знать производные координат векторов по параметру t, т.е наше решение не будет зависеть от того, какие значения имеют кристоффели вне точек кривой.

В силу теоремы существования и единственности мы получаем такое

Утверждение 1. *Для заданного в некоторой точке гладкой кривой γ вектора $\mathbf{v}_0$ символы Кристоффеля, определенные в точках γ, однозначно определяют параллельный перенос вектора вдоль этой кривой.* ■

В силу того, что система уравнений параллельного переноса линейна, мы получаем, что параллельный перенос определяет линейные изоморфизмы касательного пространства в исходной точке $x_0 = x(t_0)$ на касательные плоскости во всех остальных точках кривой. Более того, так как дифференцирование ∇ удовлетворяет правилу Лейбница, мы получаем:

Утверждение 2. *Параллельный перенос сохраняет скалярное произведение.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\frac{d\,(\mathbf{v},\,\mathbf{u})}{d\,t} = 0$. Но

$$\frac{d\,(\mathbf{v},\ \mathbf{u})}{d\,t} = (\nabla_t\mathbf{v},\ \mathbf{u}) + (\mathbf{v},\ \nabla_t\mathbf{v}) = 0.$$ ■

Наконец, в силу того, что коэффициентами уравнения служат кристоффели, которые выражаются через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные, мы получаем, что это уравнение принадлежит внутренней геометрии поверхности. Иными словами,

Утверждение 3. *При изометрическом отображении одной поверхности на другую параллельный перенос векторов переходит в параллельный перенос их образов.* ■

Важный пример. Параллельный перенос на развертывающейся поверхности можно получить, развернув ее на плоскость и взяв там обычный параллельный перенос на плоскости.

Контрольный вопрос. Рассмотрим круглый конус с углом разворота (угол между осью и образующей) α. Рассмотрим вектор, который в некоторой точке образующей отличной от вершины направлен по ней. На какой угол повернется этот вектор после параллельного переноса по окружности, плоскость которой ортогональна оси?

Заметьте, что при параллельном переносе вектора на плоскости по любой кривой он, очевидно, должен вернуться в исходное положение. Противоречие с ответом на приведенный вопрос разрешается тем, что конус является развертывающейся (локально) поверхностью в окрестности любой своей точки, кроме вершины, а в нашем случае окружность как раз обходит вокруг вершины.

Утверждение 4. *Если две поверхности касаются друг друга в точках некоторой кривой, то параллельные переносы векторов вдоль этой кривой на обеих поверхностях совпадают.*

Доказательство. Поверхности касаются в общей для них точке, если их касательные плоскости в этой точке совпадают. Поэтому вектор, касательный к одной из них в этой точке будет касательным и к другой. Ковариантная производная векторного поля вдоль кривой получается, как мы знаем, в два шага: сначала берется обычная производная в объемлющем трехмерном пространстве и затем результат проектируется на касательную плоскость. Но обе эти операции совпадают, если касательные плоскости наших поверхностей совпадают.

Доказательство также следует из второй формы уравнения (§) параллельнного переноса. ■

Это утверждение также выглядит с первого взгляда противоречивым, так как параллельный перенос определяется кристоффелями, а кристоффели выражаются через производные метрической формы, причем производные берутся в картах разных поверхностей и не обязаны совпадать.

Упражнение. Найти, на какой угол повернется вектор касательный к единичной сфере в точке с долготой α и направленный по меридиану к северному полюсу после параллельного переноса по окружности, плоскость которой ортогональна оси север - юг. [Воспользоваться утверждением 4.]

2. Геодезические.

Геодезические это самые важные кривые на поверхности. Они являются аналогами прямых линий на поскости в том смысле, что определяются теми же свойствами, что и прямые (соответственно обобщенными.) Основными являются два свойства: геодезические являются (локально) *кратчайшими* и с другой стороны *прямейшими.* Первое свойство означает, что длина этих кривых наименьшая среди всех кривых соединяющих данные две точки. Это условие должно быть выполнено локально, т.е. для кривых, соединяющих точки отстоящие друг от друга не более, чем на некоторое ϵ (многообразие является метрическим пространством). (Экватор сферы, конечно, надо считать геодезической – прямой на сфере, но кратчайшим его обход между близкими точками будет в одну сторону и не будет в другую.)

Второе условие означает, что геодезическая не искривлена с точки зрения внутренней геометрии поверхности. Мы должны будем уточнить это важное понятие.

Первое свойство мы выясним позже. Его решение состоит в том, что уравнение геодезической является условием минимума функционала длины — эти вопросы изучаются в функциональном анализе, но мы постараемся обойтись более элементарными средствами.

Обратимся ко второму свойству.

Пусть дана кривая γ на поверхности M^2. Напомним, что кривизна этой кривой в $\mathbb{R}^3$ это модуль производной ее вектора скорости по натуральному параметру. Сам этот вектор называется вектором кривизны в данной точке и мы будем называть его еще абсолютным вектором кривизны.

Проекция этого вектора на касательную плоскость, как мы знаем, есть ковариантная производная векторного поля вдоль кривой, состоящего из векторов скорости (касательных ортов), а проекция на нормальный вектор к поверхности называется вектором нормальной кривизны, длина его есть нормальная кривизна.

Заметим, что поскольку проекция на касательную плоскость есть ковариантная производная, эта проекция принадлежит внутренней геометрии поверхности. В частности, ее длина не меняется при изгибаниях (изометриях) поверхности.

Определение. *Вектором геодезической кривизны* кривой $\gamma \subset M^2$ в данной точке x называется проекция (абсолютного) вектора кривизны этой кривой в точке x, а *геодезической кривизной* длина этого вектора.

(Это название, введенное Гауссом, связано с проводившимися этим великим математиком геодезическими работами по измерениям земной поверхности. В этом случае поверхность Земли рассматривалась безотносительно к ее вложению в трехмерное пространство. И кривизна кривых не связывалась с искривлением поверхности в пространстве, а рассматривалась как величина, которую можно измерить непосредственно измерениями на поверхности.)

Вспомним, что прямые на плоскости выделяются тем, что их кривизна в каждой точке равна нулю.

Определение. Геодезической кривой на поверхности или просто *геодезической* называется кривая, геодезическая кривизна которой равна нулю в каждой точке.

Исходя из сказанного, мы сразу заключаем, что

Утверждение 1. *Главная нормаль геодезической совпадает с нормалью к поверхности в каждой ее точке.* ■

Уравнение геодезических.

Условие равенства нулю геодезической кривизны, и значит вектора геодезической кривизны, означает, что ковариантная производная поля касательных ортов равна нулю в каждой точке. Это условие записывается уравнением

$$\frac{d\,\dot{x}^i}{d\,t} + \dot{x}^k \Gamma^i_{kj} \dot{x}^j = 0,$$

которое получено, очевидно, из уравнения параллельного переноса подстановкой вместо вектора $\mathbf{v}$ касательного орта $\boldsymbol{\tau} = (\dot{x}^i)$. Параметром служит нормальный параметр кривой. Каноническая запись этого уравнения:

$$\frac{d^2\,x^i}{d\,t^2} + \Gamma^i_{kj} \dot{x}^k \dot{x}^j = 0. \qquad (\S\S)$$

Это уравнение (точнее, система), во-первых, имеет второй порядок и, во-вторых, не линейное. (Некоторой аналогией тут служит то, как из би*линейной* формы от двух переменных в алгебре получается *квадратичная* форма от одного переменного.)

Тот факт, что геодезические служат решениями обыкновенного дифференциального уравнения, дает сразу несколько результатов.

Утверждение 2. *Если вектор скорости кривой с произвольным параметром удовлетворяет уравнению геодезической, то ее параметр пропорционален натуральному и она геодезическая.*

Доказательство. Мы предполагаем, что $\nabla_t \mathbf{v}(t) = 0$, где $\mathbf{v}(t)$ – вектор скорости. Но тогда $(\mathbf{v}, \mathbf{v})^{\cdot} = \nabla_t(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 2(\nabla_t \mathbf{v}(t), \mathbf{v}) = 0$, т.е. длина вектора скорости постоянна, т.е. $\frac{d\,s}{d\,t} = |\mathbf{v}| = \mathrm{const}$ и $t = cs + d$ (где c и d константы). Если же в уравнении геодезической сделать линейную замену параметра, то уравнение не изменится и, значит, кривая будет геодезической. ■

Дальше воспользуемся теоремой существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений. Из нее следует, что через каждую точку поверхности в каждом направлении проходит в точности одна геодезическая. Но уравнение геодезической есть на самом деле система двух уравнений второго порядка относительно двух неизвестных функций. Решения такой системы образуют четырехпараметрическое семейство. В нашем случае три параметра очевидны: точка на поверхности, отвечающая нулевому значению t дает (локально) два параметра и еще один параметр — это наклон орта в этой точке. Четвертый параметр дается предыдущим утверждением.

Геодезические на сфере

Мы отмечали, что экватор сферы "очевидно" нужно считать аналогом прямой на сфере, т.е. геодезической. Мы теперь можем это установить, не решая уравнения.

Задача. Написать и решить уравнение геодезической для единичной сферы.

Для любого большого круга на сфере вектор кривизны направлен к центру и его направление совпадает с направлением нормали к сфере. Значит, геодезическая кривизна равна нулю и большой круг является геодезической. Других геодезических нет, т.к. через каждую точку в каждом направлении можно провести большой круг.

С другой стороны мы можем рассуждать иначе.

Геодезические переходят в геодезические при изометриях, т.к. они принадлежат внутренней геометрии поверхности. В частности, это так при симметриях поверхности. Но каждый большой круг определяет отражение сферы в плоскости этого круга. Если бы в направлении круга проходила через данную точку геодезическая отличная от круга, то при этом отражении она перешла бы в отличную от нее геодезическую с тем же направлением, чего быть не может по теореме единственности.

Геодезические поверхностей вращения. Это же рассуждение показывает, что меридианы поверхности вращения являются геодезическими.

Контрольный вопрос. Когда окружность, ортогональная оси, будет геодезической?

Вообще, для геодезических кривых поверхности вращения справедлива

Теорема Клеро. Для точек геодезической на поверхности вращения произведение расстояния от точки до оси вращения на синус угла кривой с меридианом постоянно.

Доказательство. Рассмотрим, вообще, поверхность, метрика которой может быть приведена к виду $ds^2 = du^2+g(u)dv^2$. В нашем случае поверхности вращения $g = \eta(u)$ есть квадрат расстояния ρ от точки кривой до оси вращения (см.п.11 гл.11A). Заметим, что для кривых $v = const$ параметр u нормальный. Подсчитаем символы Кристоффеля по известной формуле. Мы получим, что ненулевыми являются только символы $\Gamma^1_{22} = -gg'$ и $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2g}g'$, причем $g' = \frac{dg}{du}$.

Запишем уравнения геодезических:

$$\begin{array}{l}\ddot{u} = -\Gamma^1_{22}\dot{v}^2 = gg'\dot{v}^2\\ \ddot{v} = -\Gamma^2_{12}\dot{u}\dot{v} - \Gamma^2_{21}\dot{v}\dot{u} = -\frac{1}{g}g'\dot{u}\dot{v} = -\frac{1}{g}\dot{g}\dot{v}.\end{array}$$

Нам удобнее считать косинус, а не синус. Поэтому введем угол φ между направлением геодезической и параллелью. Координаты направляющего вектора параллели $(0, 1)$, а его длина $\sqrt{g}$, координаты направляющего вектора геодезической – $(\dot{u}, \dot{v})$, длина равна 1, т.к. параметр геодезической нормальный. Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{g\dot{v}}{\sqrt{g}} = \sqrt{g}\,\dot{v}$$

и

$$(\rho\cos\varphi)^{\cdot} = (\sqrt{g}\cos\varphi)^{\cdot} = (g\dot{v})^{\cdot} = \dot{g}\dot{v} + g\ddot{v},$$

что равно нулю, благодаря второму уравнению геодезических. ■

Контрольный вопрос. Верно ли обратное?

3. Полугеодезические координаты. Геодезические как кратчайшие.

Мы теперь должны выяснить второе основное свойство геодезических — показать, что это *кратчайшие* кривые. Иными словами, эти кривые минимизируют функционал длины, т.е. служат точками минимума для функции длины на бесконечномерном пространстве кривых, соединяющих две данные точки. Естественный подход к доказательству этого факта лежит через вариационное исчисление — уравнение геодезической служит уравнением Эйлера - Лагранжа для функционала длины (это уравнение в функциональном анализе является аналогом условия равенства нулю производной в стационарных точках для обычных функций). Однако в рамках дифференциальной геометрии предпочитают обходиться своими средствами, не прибегая к бесконечномерному анализу. Так мы и поступим. Но для этого нам нужно ввести и рассмотреть специальный тип координат.

Как мы знаем, система координат, в которой средний коэффициент $g_{12} = F$ первой квадратичной формы обращается в нуль, имеет важное свойство: координатные линии ортогональны.

Мы встречались также с так называемыми конформными координатами, в которых, кроме этого условия, выполнено также условие $g_{11} = g_{22}$ $(E = G)$. В этом случае углы между кривыми на поверхности те же, что и у их прообраза в координатной плоскости.

Теперь мы введем еще один интересный пример ортогональной системы координат, в которой $g_{11} = 1$.

Определение. *Полугеодезической* называется система координат, в которой метрика имеет вид

$$ds^2 = du^2 + g_{22}(u, v)\,dv^2.$$

Частным случаем является метрика, которая была введена для поверхностей вращения. В ней g_{22} не зависит от v.

Задача. Подсчитать символы Кристоффеля в полугеодезической системе.

[**Решение.** (Обозначим элемент $g_{22} = G$ здесь через b^2 (т.е. $b = |\mathbf{r}_v||$), чтобы не путать его с обычным обозначением самой матрицы первой формы.) Заметим, во-первых, что обратная матрица к матрице метрики будет $\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & b^{-2}\end{pmatrix}$. Из частных производных от g_{ij}, через которые выражаются кристоффели, остаются только $\frac{\partial b^2}{\partial x^i}$, где x^i есть u или v. В выражении для Γ^1_{ij} оба индекса могут быть только 2 и остается только $-\frac{\partial b^2}{\partial u}$. Таким образом, $\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}\frac{\partial b^2}{\partial u}$. В выражении для Γ^2_{ij} отпадает случай $i = j = 1$. Если оба индекса равны 2, то мы получаем $\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2b^2}\frac{\partial b^2}{\partial v} = \frac{\partial \ln b}{\partial v}$. Если индексы различны, то $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2b^2}\frac{\partial b^2}{\partial u} = \frac{\partial \ln b}{\partial u}$.]

Задача. Показать, что гауссова кривизна поверхности в полугеодезической системе равна $K = -\frac{\partial^2 b}{\partial v^2}/b$. (См.п.4, гл.13.)

Легко получается следующее свойство полугеодезической системы координат:

Утверждение 1. *В полугеодезической системе координат (u, v) длины дуг координатных линий $v = \mathrm{const}$ между любой парой координатных линий $u = u_1$ и $u = u_2 > u_1$ все равны $u_2 - u_1$.*

Доказательство. Действительно, на координатной линии $v = \mathrm{const}$ мы имеем $dv = 0$ и $ds = du$. Иными словами, u является натуральным параметром на каждой кривой $v = \mathrm{const}$. ■

Возьмем какую-либо кривую $u = \mathrm{const} = u_0$ в качестве начальной и заменим переменные: $(u,\, v) \mapsto (u - u_0,\, v)$. Очевидно, мы не изменим при этом вид метрики и координатные линии, а точки на начальной линии будут иметь первую координату $u = 0$. В таком случае для любой точки $(u,\, v)$ в области нашей координатной системы первая координата будет выражать длину дуги координатной линии $v = \mathrm{const}$ от этой точки до начальной кривой.

Второе свойство полугеодезических координат состоит в том, что дуги кривых $v = \mathrm{const}$ имеют следующее свойство минимальности. Грубо говоря, длина дуги такой кривой меньше длины любой другой кривой, соединяющей ее концы. Однако, тут имеется небольшая тонкость, которую мы проясним позже, из-за которой нам приходится ввести дополнительное требование на малость такой дуги.

Утверждение 2. *Пусть имеется область U на поверхности, в которой введены полугеодезические координаты $(u,\, v)$. Пусть λ – отрезок кривой $v = \mathrm{const} = v_0$, длина которого меньше расстояния от λ до границы U. (Имеется в виду расстояние в римановом многообразии, как оно было определено в п.5 главы 11А.)*

Тогда длина λ меньше длины любой другой дуги, соединяющей ее концы.

Доказательство. Пусть μ дуга, соединяющая концы p и q дуги λ. Если μ выходит за пределы U, то ее длина больше длины λ. Пусть она целиком лежит в U. Тогда ее длина, согласно нашему условию на вид метрики есть

$$\int_p^q \sqrt{1 + g_{22}\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\, du.$$

Ясно, что поскольку $g_{22} > 0$, это выражение не меньше, чем $\int_p^q du$, т.е. длина λ. При этом равенство возможно, если и только если $\frac{dv}{du} = 0$, т.е. $v = \mathrm{const}$. ■

Теперь мы объясним, почему система координат с таким свойством называется полугеодезической. Дело в том, что кривые $v = \mathrm{const}$ на самом деле являются геодезическими:

Утверждение 3. *В полугеодезической системе координат с метрикой $ds^2 = du^2 + g_{22}\, dv^2$ координатные кривые $v = \mathrm{const}$ являются геодезическими.*

Доказательство. Мы видели, что параметр u является натуральным на кривых $v = \mathrm{const}$. Поэтому орт касательной к координатной кривой $v = \mathrm{const}$ является также ее вектором скорости $\boldsymbol{\tau}(u)$ с координатами $(1, 0)$. Нам надо показать, что эти кривые удовлетворяют уравнению геодезической $\frac{d\boldsymbol{\tau}^i}{du} + \boldsymbol{\tau}^k \Gamma^i_{kj} \boldsymbol{\tau}^j = 0$.

Выше (в решении задачи) мы подсчитали символы Кристоффеля в полугеодезической системе и убедились, что отличные от нуля символы имеют хотя бы один нижний индекс 2. Таким образом левая часть уравнения равна нулю: первое слагаемое – поскольку координаты $\boldsymbol{\tau}$ постоянны, а остальные слагаемые, т.к. ненулевые кристоффели умножаются на нулевую координату $\boldsymbol{\tau}$. ■

Замечание. Пример большого круга на сфере показывает необходимость введения условия того типа, которое мы приняли в утверждении 2. Если для точки на этом круге взять маленькую окрестность, то в остальной части сферы можно ввести карту, в которой дуга круга не будет иметь минимальную длину среди кривых, которые соединяют ее концы и лежат в дополнении к выбранной малой окрестности.

Итак, полугеодезическая система координат определена однопараметрическим семейством геодезических, второе семейство координатных кривых определено как семейство ортогональных кривых к первому. Обратно, такая пара семейств кривых определяет полугеодезическую систему координат, если на геодезических в качестве координатного параметра выбрать натуральный параметр. На самом деле для второго семейства достаточно потребовать, чтобы только одна его кривая была ортогональна семейству геодезических. Тогда это будет верно и для остальных:

Утверждение 4. *Пусть в данной системе локальных координат $(u,\, v)$ семейство кривых $v = \mathrm{const}$ состоит из геодезических, причем натуральным параметром для них служит u. Пусть также координатная кривая $u = 0$ ортогональна геодезическому семейству. В таком случае это — полугеодезическая система координат.*

Доказательство. Ясно, что $g_{11} = 1$, поскольку параметр u натуральный и, значит, вектор скорости вдоль координатных кривых $v = \mathrm{const}$ является ортом. Нужно показать, что $g_{12} = 0$, т.е., что все кривые $u = \mathrm{const}$ ортогональны геодезическому семейству. Из условия, что кривая $u = 0$ ортогональна геодезическому семейству, следует, что в точках этой кривой $g_{12} = 0$.

Т.к. g_{11} постоянно, непосредственно видно, что $\Gamma^1_{11} = g^{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial u}$.

По условию, линии $v = \mathrm{const}$ геодезические, т.е. $\nabla_{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{\tau} = 0$. По определению кристоффелей Γ^1_{11} есть первая координата этого вектора. Таким образом, $g^{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial u} = 0$.

Но $g^{12} = \frac{g_{12}}{g}$, где g – детерминант матрицы первой формы. Значит, либо $g_{12} = 0$ (что и требуется), либо g_{12} постоянно. Однако в точках начальной кривой $g_{12} = 0$ и утверждение доказано. ■

Построение полугеодезической системы координат. Мы показали, что координатные кривые полугеодезической системы образуют два семейства, одно из которых состоит из геодезических, причем их натуральный параметр является координатой, а другое состоит из кривых ортогональных кривым первого семейства. И обратно, если для данной системы координат одно семейство координатных кривых состоит из геодезических, натуральный параметр которых служит координатой, причем хотя бы одна кривая второго семейства ортогональна кривым первого, то тогда все кривые второго семейства будут ортогональны кривым первого, а система координат будет полугеодезической.

Отсюда видно, как построить полугеодезическую систему координат в окрестности данной точки $A \in M^2$. Нужно провести через эту точку дугу λ регулярной кривой, и взять на ней произвольный (регулярный) параметр v. Затем через каждую точку λ нужно провести геодезическую γ в направлении ортогональном λ. На каждой построенной геодезической γ_v, отвечающей какому-либо значению v, возьмем натуральный параметр u в качестве координаты, считая, что в точке пересечения γ_v с λ он равен нулю. Тогда пары $(u,\, v)$ будут служить регулярными координатами в малой окрестности A (т.к. в точках λ кривые ортогональны), причем кривые $u = \mathrm{const}$ будут ортогональны построенному семейству геодезических во всех своих точках и наша система координат будет полугеодезической, т.е. первая квадратичная форма будет иметь требуемый вид.

Геодезические как кратчайшие. Теперь мы можем обосновать второе основое свойство геодезических. Любую геодезическую γ, проходящую через точку A, мы можем включить в координатное семейство полугеодезической системы координат. Нужно только в описанном только что построении начать с регулярной кривой, ортогональной γ в точке A. Отсюда и из утверждения 2 следует:

Утверждение 5. Для некоторой окрестности A дуга геодезической, соединяющая A с любой другой точкой B этой окрестности, имеет длину меньшую, чем длина любой другой дуги, соединяющей A и B. ■

Мы однако еще не доказали, что точку A можно соединить с любой точкой из некоторой ее окрестности геодезической дугой. Для этого нам нужно рассмотреть еще одну конструкцию.

4. Экспоненциальное отображение.

Мы знаем, что в каждом направлении через данную точку может быть проведена ровно одна геодезическая, натуральный параметр которой имеет в данной точке значение нуль.

Придадим этому утверждению более формальный и более полный характер. Нам дана поверхность M^2 с римановой метрикой $(g_{ij}):\ ds^2 = g_{11}\,du^2 + 2\,g_{12}\,du\,dv + g_{22}\,dv^2$.

Утверждение 1. *Рассмотрим касательную плоскость $\tau_A M^2$ в точке A поверхности M^2. Для каждого орта $\mathbf{e}$ в $\tau_A M^2$ обозначим через $\gamma_{\mathbf{e}}$ геодезическую, проходящую через A так, что в точке A натуральный параметр есть 0 и вектор скорости в натуральной параметризации есть $\mathbf{e}$. Отобразим прямую $t\mathbf{e} \in \tau_A$ на $\gamma_{\mathbf{e}}$, сопоставив точке $x = t\mathbf{e}$ этой прямой точку $y \in \gamma_{\mathbf{e}}$ с натуральным параметром t.*

Мы получим диффеоморфное отображение $\exp\colon U \to V \subset M^2$ *некоторой окрестности U точки A в $\tau_A M^2$ на окрестность V этой точки в M^2.*

Доказательство. Теорема о гладкой зависимости решения обыкновенного дифференциального уравнения от начальных данных говорит в нашем случае, что мы имеем гладкое отображение прямого произведения трех окрестностей — окрестности точки A в поверхности M^2, окрестности A в касательной плоскости $\tau_A M^2$ и окрестности нуля в числовой прямой — в окрестность точки A в M^2. Напомним, что касательное расслоение τM^2 само является многообразием, и координаты в касательной плоскости τ_A служат также координатами в касательных плоскостях близких точек. Таким образом, тройке $(x,\, \mathbf{v},\, t)$ ставится в соответствие точка, лежащая на геодезической, выходящей из точки x с вектором скорости $\mathbf{v}$ и имеющая на геодезической нормальный параметр t. Это отображение определено и гладко, если указанные окрестности выбраны достаточно малыми.

Это отображение называется *экспоненциальным* (оно в случае групп Ли совпадает с отображением, рассматривавшимся в п.8 гл.8Б часть 2, отсюда и название).

Сейчас мы рассматриваем ограничение этого отображения на касательную плоскость $\tau_A M^2$ для малого $t \neq 0$. Для удобства можно считать, что $t = 1$, что не ограничивает общности результата. Это ограничение, конечно, также гладко. Заметим, что его дифференциал в точке A есть тождественное отображение.

Это утверждение требует такого пояснения. Хотя в образе и прообразе мы рассматриваем разные многообразия, но сейчас у нас в прообразе линейное пространство $\tau_A M^2$, а для линейного пространства его касательное пространство в каждой точке и, в частности, в начале, естественным образом отождествляется с ним самим. Поэтому дифференциал в точке A нашего отображения действует из $\tau_A M^2$ в $\tau_A M^2$ и утверждение, что он есть тождественное отображение имеет смысл.

Чтобы проверить это утверждение, удобно рассматривать векторы как векторы скорости кривых, и нам нужно показать, что кривая в $\tau_A M^2$ с вектором скорости $\mathbf{v}$ переходит в кривую в M^2 также с вектором скорости $\mathbf{v}$. Но в качестве кривой в $\tau_A M^2$ мы можем взять прямую $t\mathbf{v}$, а ее образ по определению есть геодезическая кривая с вектором скорости $\mathbf{v}$.

Итак, наше отображение переводит окрестность A в касательной плоскости в многообразие M^2 с тождественным дифференциалом в точке A. По теореме об обратном отображении эта окрестность диффеоморфно отображается на некоторую окрестность A в M^2.

Теперь усилим наш результат.

Утверждение 2. *Для любой окрестности V точки $A \in M^2$ имеется окрестность U такая, что* ***любые*** *две ее точки соединимы единственной геодезической, лежащей в V.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой о неявной функции в усиленной форме. Она утверждает, что если нам дано отображение прямого произведения $\mathbf{z} = F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, где $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ — точки многомерных пространств, причем матрица Якоби $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}$ квадратная и невырожденная в окрестности точки $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, то для некоторой окрестности V точки $\mathbf{z}_0 = F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ и некоторой окрестности U точки $\mathbf{x}_0$ имеется окрестность W точки $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ такая, что для каждой ее точки $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ мы имеем: $\mathbf{x} \in U$, и если $W_{\mathbf{x}'}$ обозначает подмножество точек $(\mathbf{x}', \mathbf{y})$ в W с фиксированной координатой $\mathbf{x}'$, то F диффеоморфно отображает $W_{\mathbf{x}'}$ на V. (Иными словами, W представляется прямым произведением U и V, а F оказывается проекцией этого прямого призведения на сомножитель V.)

В нашем случае U и V — это окрестности в M^2 точки $\mathbf{x}_0 = A$, и мы получаем, что каждую точку U можно соединить с каждой точкой V геодезической. Поскольку при стремлении этих точек к A геодезическая стремится также совпасть с A, мы получаем, что если точки берутся в малой окрестности, то соединяющая их геодезическая будет лежать целиком в V. Ясно также, что такая геодезическая (лежащая целиком в V) единственна. ■

Продолжаемость геодезических. Поверхность называется полной, если каждую геодезическую можно определить для всех значений (натурального) параметра от $-\infty$ до $+\infty$. В силу сказанного о существовании и единственности соединения близких точек геодезическими, можно оставить в качестве задачи следующее утверждение:

Задача. Показать, что для компактного многообразия каждая геодезическая может быть продолжена до максимальной (т.е. если дана геодезическая определенная для нормального параметра в некотором интервале, то она лежит в большей геодезической, определенной для нормального параметра на всей числовой прямой).

Замечание. Известная теорема Хопфа – Ринова утвеждает, что в полном многообразии любые точки (а не только достаточно близкие) можно соединить геодезической (см. Дж. Милнор. «Теория Морса».)

5. Метрика постоянной кривизны.

Допустим, что гауссова кривизна K данной поверхности одна и та же во всех точках. Построим полугеодезическую систему координат, как выше.

Проведем через начальную точку O две геодезические γ_1 и γ_2 под прямым углом в этой точке. Пусть u – натуральный параметр на γ_1, v – на γ_2. Оба параметра отсчитываются от точки O. Через каждую точку γ_2 с параметром v проведем геодезическую γ_v, ортогональную γ_2.

Метрика поверхности в этой системе координат имеет вид:

$$ds^2 = du^2 + b^2(u, v)\, dv^2.$$

Выражение для гауссовой кривизны в ортогональной системе координат ($K = (p_v - q_u)/\sqrt{g}$, см.п.4 гл.13) дает в нашем случае $K = -b_{vv}/b$, т.е. обыкновенное дифференциальное уравнение

$$b_{vv} + Kb = 0.$$

с постоянным коэффициентом K. Вид его решения зависит от знака K.

В случае $K = \frac{1}{a^2} > 0$

$$b = f_1(u) \cos \frac{v}{a} + f_2(u) \sin \frac{v}{a}.$$

Здесь функции $f_i(u)$ выражают зависимость решения от начальных данных.

Аналогично, в случае $K = -\frac{1}{a^2} < 0$

$$b = f_1(u)\,\mathrm{ch}\,\frac{v}{a} + f_2(u)\,\mathrm{sh}\,\frac{v}{a}.$$

Если $K = 0$ имеем

$$b = f_1(u) + f_2(u)v.$$

Во всех трех случаях при $v = 0$ точка лежит на геодезической γ_1, причем u есть ее натуральный параметр. Поэтому $b^2|_{v=0} = 1$ (как модуль касательного орта) и, т.к. эта геодезическая есть координатная линия, мы получаем из уравнения геодезической $b_u|_{v=0} = 0$.

Подстановка этих значений дает

$$f_1(u) = 1;\ f_2(u) = 0.$$

В результате первая квадратичная форма поверхности постоянной кривизны в построенной системе координат имеет вид:

$$ds^2 = dv^2 + \cos^2 \tfrac{v}{a}\, du^2, \qquad \text{если } K = 1/a^2 > 0;$$

$$ds^2 = dv^2 + \mathrm{ch}^2 \tfrac{v}{a}\, du^2, \qquad \text{если } K = -1/a^2 < 0;$$

$$ds^2 = dv^2 + du^2, \qquad \text{если } K = 0.$$

Локальная изометрия поверхностей постоянной кривизны.

Утверждение. *Две поверхности постоянной кривизны локально изометричны, если и только если их кривизны равны.*

Доказательство. Равенство кривизн для локально изометричных поверхностей следует из теоремы Гаусса. Если же две поверхности M_1 и M_2 имеют одинаковую постоянную кривизну K, то, согласно доказанному, в окрестностях точек $\mathbf{x}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2 \in M_2$ можно ввести локальные карты, параметризованные одной и той же областью плоскости и такие, что в соответственных точках метрика в обеих картах будет задаваться одной и той же формулой, принадлежащей к одному из трех указанных типов в зависимости от знака K. ■

Поверхности постоянной кривизны в $\mathbb{R}^3$. Для каждого числа $K \in \mathbb{R}$ имеется поверхность постоянной кривизны K, которую можно построить в $\mathbb{R}^3$. Для $K = 0$ это плоскость, а также любая развертывающаяся поверхность. Для положительного K это сфера радиуса $1/\sqrt{K}$. Для отрицательных K такая поверхность также может быть реализована в $\mathbb{R}^3$, т.е. в $\mathbb{R}^3$ есть поверхность, на которой стандартная метрика индуцирует метрику с постоянной отрицательной кривизной (см.ниже).

Задача нахождения поверхностей постоянной кривизны (в форме графика) решалась в 30-х годах прошлого века работавшим в России (в Дерптском университете) и ставшим позже почетным членом Российской АН Ф.Миндингом, учеником Гаусса. В общем виде она сводится к уравнению в частных производных, которое задается формулой, определяющей полную кривизну (см.п.7 гл.12А). Миндинг рассмотрел случай обобщенных винтовых поверхностей и, в частности, поверхностей вращения. Этот последний случай требует решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, задающего меридиан функцией $r(z)$, где z – координата по оси вращения, а r – расстояние точки меридиана до оси вращения. (Напишите это уравнение в качестве упражнения!) Решение его представляется интегралом

$$z = \int \sqrt{\frac{1}{c^2 - Kr^2} - 1}\, dr.$$

Здесь c – произвольная постоянная.

Трудно усмотреть непосредственно, что поверхность с таким меридианом при $K > 0$ локально изометрична сфере.

Замечание. Миндинг доказал, что поверхности вращения с равной постоянной кривизной будут взаимно наложимы, но не обратил внимания на то, что дифференциал длины имеет в случае отрицательной кривизны тот же вид, что и на плоскости Лобачевского (основная статья которого была опубликована в том же журнале, что и статья Миндинга, двумя годами ранее). Этот факт был замечен и использован Риманом в его лекции 1854 года. Но эта лекция оставалась неизвестной до 1868 года. В этом году вышла статья Бельтрами, где было указано явным образом, что внутренняя геометрия поверхности вращения трактрисы совпадает (локально) с геометрией плоскости Лобачевского. Этот факт послужил окончательному признанию неевклидовой геометрии. Однако изометрического вложения всей плоскости Лобачевского в трехмерное пространство не существует, что было доказано Гильбертом в 1900 году.

6. Модели и метрики плоскости Лобачевского.

Поверхности постоянной отрицательной кривизны замечательны тем, что локально изометричны плоскости Лобачевского, плоскости с неевклидовой геометрией.

По теореме Гильберта (см.), изометричное (и гладкое) вложение плоскости Лобачевского в трехмерное евклидово пространств невозможно. Но ее можно реализовать в евклидовом пространстве локально или же глобально, но в псевдоевклидовом пространстве.

Рассмотрим сначала локальную реализацию с помощью поверхности вращения, в качестве меридиана которой возьмем *трактрису*, которая была расмотрена в п.п.7 гл.10.

Пусть отрезок касательной от точки касания до оси абсцисс равен a.

Ордината точки на кривой будет тогда $\eta = a \sin\alpha$, но $\sin\alpha$ есть отношение дифференциалов $\frac{d\eta}{dl}$, где l — натуральный параметр на кривой, и тогда

$$\frac{\eta}{a} = \frac{d\eta}{dl}.$$

Метрика на поверхности вращения, как мы видели в п.11 гл.11А, имеет вид

$$ds^2 = dl^2 + \eta^2\, d\phi^2.$$

Делаем подстановку и выносим η^2 за скобки:

$$a^2\eta^2 \left(\left(\frac{d\eta}{\eta^2}^2 \right) + \left(\frac{d\phi}{a}^2 \right) \right).$$

Теперь приведем метрику к конформному виду, вводя новые переменные $x = \frac{\phi}{a}, \quad y = \frac{1}{\eta}$:

$$ds^2 = a^2 \left(\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \right).$$

Кривизна считается по формуле п.4 гл.13: $K = -\frac{1}{a^2}$. (См. также задачу в конце гл.12, стр.39.)

Теперь рассмотрим второй путь реализации плоскости Лобачевского

Псевдоевклидовы пространства.

Определение. Псевдоевклидовым пространством типа p, q и ранга $r = p + q$ называется пространство $\mathbb{R}^r$ с невырожденной симметричной билинейной формой с сигнатурой (p, q). Пространство $\mathbb{R}^r$, снабженное такой формой обозначается $\mathbb{R}^r_q$.

Из алгебры известно, что для такой формы существуют базисы, в которых ее матрица имеет диагональный вид с p единицами и q минус единицами на диагонали и с нулевыми остальными элементами. Такие базисы называются ортонормированными. Числа p и q не зависят от приведения к диагональному виду, т.е. выбора такого базиса (закон инерции).

Пространство с такой билинейной формой называется, если $q > 0$, псевдоевклидовым, а сама форма *псевдоэвклидовой метрикой* Соответствующая квадратичная форма имеет вид

$$(x^1)2 + \dots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \dots - (x^r)^2$$

Приравнивая это выражение нулю, мы получим в $\mathbb{R}^r_q$ коническую поверхность, называемую *изотропным конусом.* Радиус-векторы ее точек имеют нулевую норму в смысле этой псевдометрики.

Определение. Квадратная матрица C называется *псевдоортогональной*, если $C^T E_q C = E_q$, где матрица E_q диагональная, в ней q элементов на диагонали равны -1, а остальные 1.

Утверждение. *Матрица псевдоортогональна, если и только если соответствующее преобразование $\mathbb{R}^r_q$ переводит ортонормированные базисы в ортонормированные.*

Доказательство. Оно по существу такое же, как и для обычных ортогональных матриц. ■

Псевдоортогональные преобразования образуют группу, для такого преобразования $C^{-1} = E_q C^T E_q$. Эта группа обозначается $\mathbf{O}(r, q)$ (иногда уточняют: $\mathbf{O}(r, q; \mathbb{R})$).

Нас интересует случай $q = 1$. В этом случае удобно обозначить координату, которой отвечает отрицательный квадрат, через x^0, а "положительные" координаты нумеровать от 1 до p. Изотропный конус $(x^1)2 + \dots + (x^p)^2 - (x^0)^2 = 0$ разбивает $\mathbb{R}^r$ на внешнюю часть, в которой $(x^0) < \sqrt{(x^1)2 + \dots + (x^p)^2}$, и внутреннюю. Векторы с концами во внешней части имеют положительный квадрат псевдонормы, а с концами во внтутренней части — отрицательный, т.е. их псевдонормы мнимые. Внутренняя часть разбивается на "верхнюю", где $x^0 > 0$ и "нижнюю", где $x^0 < 0$.

Ясно, что псевдоортогональные преобразования переводят внешнюю часть во внешнюю и внутреннюю во внутреннюю. (Они сохраняют норму и, в частности, знак ее квадрата.) С другой стороны, преобразование может сохранить каждую половину внутренней части или поменять их местами, и это свойство сохранится при непрерывном изменении преобразования. Кроме того, преобразование может сохранить или изменить ориентацию целого пространства. Отсюда ясно, что группа имеет по крайней мере 4 компоненты. На самом деле она имеет ровно 4 компоннты, что не трудно установить в качестве простого упражнения.

Нас интересуют преобразования, которые сохраняют каждую половину внутренней части, т.е., иными словами, сохраняют условие $x^0 > 0$ и $x^0 < 0$. Обозначим через $\mathbf{O}'(r, q)$ группу таких преобразований.

Пусть далее $r = 3$ и $q = 1$. Обозначим теперь координаты x, y, z, причем z отвечает орту с мнимой нормой. Квадрат нормы произвольного вектора записывается в виде $x^2 + y^2 - z^2$.

Рассмотрим поверхность $x^2 + y^2 - z^2 = -1$. Это двуполостный гиперболоид $\mathbf{H}$, который переходит в себя при псевдоортогональных преобразованиях. Преобразования из группы $\mathbf{O}'(r, q)$ переводят каждую его полу в себя.

Мы примем за модель плоскости Лобачевского нижнюю полу ($z < 0$). Обозначим ее $\mathbf{L}$. Докажем, прежде всего,

Утверждение. *Псевдоевклидова метрика $x^2 + y^2 - z^2$ индуцирует на гиперболоиде $\mathbf{H}$ $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ положительно определенную (т.е. риманову) метрику.*

Доказательство. Уравнение для касательных векторов в точке на гиперболоиде с радиус-вектором $\mathbf{u} = (x^0, y^0, z^0)$ есть $x^0 dx + y^0 dy - z^0 dz = 0$. Оно означает, что псевдоскалярное произведение радиус-вектора $\mathbf{u}$ и касательного вектора равно нулю (т.е. эти векторы псевдоортогональны). Но радиус-вектор лежит во внутренней части изотропного конуса и, значит, его норма мнимая. Тогда норма касательного вектора должна быть вещественной. В самом деле, касательный вектор не может быть коллинеарен $\mathbf{u}$, т.к. тогда $\mathbf{u}$ лежал бы на изотропном конусе, в то же время число мнимых векторов в ортонормальном базисе инвариантно и равно единице. Поэтому не может быть двух линейно независисмых мнимых векторов. Значит, касательная плоскость не имеет мнимых векторов, т.е. скалярное произведение на ней положительно определено. ■

Запишем выражение римановой метрики на **L**, индуцированной псевдоевклидовой метрикой в $\mathbb{R}^3_1$. Последняя может быть записана в виде $ds^2 = -dz^2 + dx^2 + dy^2$, на **L** мы имеем $-z^2 + x^2 + y^2 = -1$ и $z\,dz = x\,dx + y\,dy$. Делая подстановку, получим:

$$ds^2 = \frac{(1 + x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) - (x\,dx + y\,dy)^2}{1 + x^2 + y^2}$$

Если в ортонормированном репере $R = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ один вектор мнимый, то он есть радиус-вектор точки лежащей на гиперболоиде **H**, и тогда два других вектора будут касательными в этой точке к **H**. Так как ортонормированный репер можно перевести в любой другой ортонормированный репер и при том только одним псевдоортогональным преобразованием, мы получаем, что любой ортонормированный репер в касательной плоскости в данной точке на плоскости Лобачевского можно единственным преобразованием группы $\mathbf{O}(3,1)$ перевести в любой ортонормированный репер в другой данной точке. Эти преобразования сохраняют длины кривых в полученной выше римановой метрике в **L** и, значит, расстояние между точками, т.е. они являются изометриями плоскости Лобачевского.

Можно показать, что и обратно, любая изометрия **L** индуцирована псевдоортогональным преобразованием пространства $\mathbb{R}^3_1$. Мы отложим доказательство этого до второго тома. Таким образом,

Утверждение. *Группа $O'(3,\,1)$ есть группа изометрий плоскости Лобачевского.* ■

Прямые в **L**.

Утверждение. *Пересечение* **L** *и двумерной плоскости, проходящей через начало, является геодезической на* **L**.

Доказательство. В плоскости, которая имеет с **L** хотя бы одну общую точку отличную от O, индуцируется псевдоевклидова метрика (т.к. найдется на ней вектор с концом внутри гиперболоида). Такой плоскости в $\mathbb{R}^3_1$, проходящей через начало, сопоставляется симметрия относительно нее, т.е. псевдоортогональное преобразование, неподвижное на плоскости и переводящее ортогональный ей вектор в противоположный вектор. (Симметрия относительно плоскости псевдоортогональна, т.к. три назависимых вектора сохраняют свою псевдодлину: два в плоскости и один ортогональный плоскости.) Такое преобразование будет менять ориентацию объемлющего пространства, но сохранит полы гиперболоида.

“Прямая”, полученная сечением гиперболоида плоскостью, проходящей через центр, будет геодезической в построенной римановой метрике. В самом деле, симметрия является изометрией в **L** и поэтому переводит геодезические в геодезические. Если бы имелась геодезическая, касающаяся прямой и отличная от нее, то образ ее при симметрии также был бы геодезической и притом имеющей то же направление в общей точке на прямой. Это противоречит теореме единственности.

■

Пересечение **L** с плоскостью, проходящей через начало, естественно назвать прямой на **L**, поскольку оно является геодезической (как и большие круги на евклидовой сфере, которые также являются геодезическими, что доказывается тем же рассуждением).

Модель Клейна.

Рассмотрим центральную проекцию плоскости Лобачевского **L** в $\mathbb{R}^3_1$ на плоскость $z = -1$. Она взаимно однозначно отобразит **L** на внутренность круга, граница которого служит образом проекции изотропного конуса. Эта граница называется *абсолютом* модели плоскости Лобачевского, построенной Ф.Клейном. Образами прямых из **L** служат хорды круга и они являются прямыми в этой модели. Нетрудно заметить в этой модели невыполнение 5-го постулата: через точку вне прямой проходит бесконечно много не пересекающих ее прямых.

Параметризация плоскости Лобачевского.

Плоскость Лобачевского играет роль единичной псевдосферы в пространстве $\mathbb{R}^3_1$ (точнее полусферы – это множество векторов единичной псевдонормы, с условием $z < 0$).

Уравнение $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, сопоставленное с тождеством $\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 v = 1$, подсказывает, что удобно положить $z = \operatorname{ch}\theta$ и $x^2 + y^2 = \operatorname{sh}^2\theta$, и тогда, естественно, $x = sh\theta\cos\varphi$, $y = sh\theta\sin\varphi$. Это – псевдосферические координаты в $\mathbb{R}^3_1$.

Метрика на этой псевдосфере легко подсчитывается: $ds^2 = d\theta^2 + \operatorname{sh}^2\theta\,d\varphi^2$.

Эта метрика полугеодезическая и кривизна легко считается по формуле (**) из п.4, гл.13. Она равна -1.

В частности, мы видим, что θ есть длина орезка прямой от точки до вершины ($z = -1$) гиперболоида. Подсчитаем длину окружности радиуса $\theta = \rho$ с центром в вершине: $d\theta = 0$ и $ds = \operatorname{sh}\theta d\varphi$. Значит, длина окружности равна $s = 2\pi\operatorname{sh}\rho$. Площадь круга того же радиуса равна $\iint\sqrt{|g|}\,d\theta\,d\varphi = \iint \operatorname{sh}\theta\,d\theta\,d\varphi = 2\pi(\operatorname{ch}\rho - 1)$.

Заметим, что при малом ρ $\operatorname{sh}\rho$ близок к линейной функции ρ, а $\operatorname{ch}\rho$ к $1 + 1/2\,\rho^2$. Мы видим, что эти выражения оказываются близкими к евклидовым.

Полезно обратить внимание на то, что хотя метрика в объемлющем пространстве взята псевдоевклидовой, она индуцирует на псевдосфере положительно определенную (риманову) метрику.

7. Второе доказательство теоремы Гаусса.

Схема доказательства. Мы используем интерпретацию полной кривизны как предела отношения площади сферического образа области к ее площади (площади берутся ориентированные, со знаком) (см.п.6 гл.12Б).

Знаменатель, как мы знаем, выражается через метрику. Что касается числителя, то на сфере он оказывается равным повороту вектора при параллельном обносе его по границе области. Но поворот при параллельном обносе на сфере совпадает с поворотом при параллельном обносе на прообразе кривой на самой поверхности и потому он выражается через метрику поверхности.

Площади двуугольников на сфере. Полная площадь сферы единичного радиуса равна 4π. Сферический двуугольник это область, лежащая между двумя полуокружностями, соединяющими две антиподальные точки. Она лежит между двумя плоскостями, проходящими через один диаметр под углом φ друг к другу, и ее площадь относится к полной площади 4π как φ к 2π. Значит, она равна 2φ. (Заметим, что углы и площади здесь надо брать по модулю. Если учитывать порядок плоскостей относительно положительного вращения, то углы на двух концах двуугольника имеют разные знаки.)

Площадь выпуклого многоугольника в сфере. Рассмотрим далее сферический k-угольник, образованный k дугами больших кругов, выпуклый и лежащий в одной полусфере. Область, лежащая между ним и его антиподальным образом, покрыта полностью и без перекрытий двуугольниками, построенными на его внешних углах (проверьте!). Поэтому можно написать равенство (считая углы и площади положительными): $2\sum\varphi_i + 2\sigma = 4\pi$ или

$$\sigma = 2\pi - \sum\varphi_i, \qquad (^*)$$

где σ – площадь многоугольника, а φ_i – внешние углы. Выражение для σ называется *дефектом* сферического многоугольника, т.к. оно показывает, насколько сумма внешних углов сферического многоугольника отличается от такой суммы для плоского многоугольника. (Если бы сфера была взята радиуса R, то дефект получился бы равным $\frac{\sigma}{R^2}$.)

Площадь невыпуклого многоугольника. Возьмем теперь невыпуклый многоугольник, построенный из дуг больших кругов (но все еще в одной полусфере), принимая для простоты, что он является замкнутой ломаной без самопересечений. Он ограничивает связную область, целиком лежащую в той же полусфере, что и он сам. Мы опускаем несложное доказательство этого утверждения, основанное, например, на том, что такой многоугольник может быть построен индуктивно, отправляясь от треугольников, причем на индуктивном шаге берется объединение двух многоугольников, имеющих меньше звеньев, чем многоугольники предыдущих шагов и одно общее звено в качестве пересечения (см. в части 4 ...). Ограниченная область также будет называться многоугольником.

Внешние углы невыпуклых многоугольников. Формула сохранится и для такого многоугольника, но теперь нужно точнее определить внешние углы. Мы рассматриваем только положительные обходы многоугольника, т.е. такие, при которых ограниченная область лежит слева (или положителен репер, у которого, например, первый вектор идет по границе в направлении обхода, а второй направлен внутрь области.)

Внешним углом при вершине считаем угол между вектором, направленным по продолжению предыдущего ребра, и вектором идущим по следующему ребру. Внешний угол положителен, если первый вектор смотрит во внешнюю сторону многоугольника, и он отрицателен, если этот вектор направлен внутрь.

Доказательство формулы для невыпуклого многоугольника достаточно провести для индуктивного шага объединения двух многоугольников, для которых формула $(^*)$ уже доказана и которые пересекаются по общей ломаной на границе.

Напишем нашу формулу для каждого из этих многоугольников и сложим левые части. Площади, конечно, сложатся. Что касается внешних углов, то углы для неконцевых вершин общей ломаной, очевидно, сократятся. Для каждого из двух углов на ее концах при сложении внешних углов получится внешний угол объединения, увеличенный на π, что легко проверяется. Так как сумма правых частей равна 4π, формула сохранится и для объединения многоугольников.

Параллельный обнос вектора по границе многоугольника на сфере. Будем переносить какой-либо вектор по границе сферического многоугольника параллельно. Начнем с точки на каком-либо ребре и отправимся по нему в положительную сторону.

Пусть начальный угол этого вектора с ребром есть φ_0 (считая этим углом угол поворота вектора против часовой стрелки до положительного направления ребра; он меньше π, если вектор смотрит наружу и больше π, если смотрит внутрь многоугольника). Т.к. ребро – геодезическая, этот угол не изменится до вершины. В вершине продолжим обход по следующему ребру. Угол с ним, очевидно, возрастет (с учетом знака) на внешний угол при этой вершине. Продолжая обход, мы будем увеличивать угол между переносимым вектором и ребрами в каждой вершине на внешний угол при этой вершине. Значит, при возвращении в исходную вершину угол в целом возрастет на сумму $\sum\limits_{i=1}^{k}\varphi_i$ внешних углов.

Рассмотрим сначала выпуклый многоугольник, лежащий в полусфере. В этом случае все φ_i положительны, а их сумма не превышает 2π, в силу полученной выше формулы для площади.

Для простоты пусть начальный угол φ_0 нулевой, т.е. вектор направлен по ребру в положительную сторону, и угол между финальным положением вектора и положительным направлением начального ребра равен (в этом порядке) $\psi \geq 0$. Тогда угол $\sum\limits_{i=1}^{k} \varphi_i + \psi$ кратен 2π. Но он не может быть нулевым, т.к. все внешние углы положительны, и не может быть 4π или больше, т.к. оба слагаемых меньше 2π. Значит, он равен 2π.

Следовательно, величина поворота вектора после его параллельного обноса по границе многоугольника равна

$$2\pi - \sum_{i=1}^{k} \varphi_i.$$

Легко проверить, что эта формула сохраняется для суммы двух многоугольников, пересекающихся по общей ломаной, если она верна для каждого из них (общая часть границы проходится в противоположных направлениях и потому обнос по ней сокращается при суммировании, кроме двух концевых точек, в которых добавляется по π). Поэтому мы можем применять ее к любым многоугольникам, не обязательно выпуклым и не обязательно помещающимся в полусфере.

Итак, *величина поворота равна дефекту многоугольника и, значит, его площади!* (Если сфера имеет радиус R, то поворот равен площади, деленной на R^2.)

Случай произвольного контура. Наконец, рассмотрим контур, ограничивающий область, *имеющую площадь*. Например, кусочно гладкий контур. Нетрудно показать (мы это оставим как упражнения), что аппроксимация его многоугольниками, составленными из малых дуг больших кругов, мало изменит площадь и две такие аппроксимации дадут мало отличающиеся углы поворота. Поэтому в пределе мы получим равенство этого угла площади и для такого контура.

Соответствие параллельных переносов на поверхности и на ее сферическом образе. Пусть теперь нам дана малая область на поверхности, которая диффеоморфно отображается на свой сферический образ. Как и раньше, мы используем общую параметризацию этих областей, так что соответствующие точки имеют те же самые координаты u, v. Возьмем в области на поверхности контур L и пусть L_0 – его образ в области на сфере.

Утверждение. Пусть дан параллельный обнос вектора вокруг контура L. Сдвигая параллельно векторы в соответствующие точки на сфере, мы получим параллельный обнос также и на сфере.

Доказательство. Это видно из совпадения этапов операции: параллельный сдвиг в $\mathbb{R}^3$, проекция на касательную плоскость, деление на параметр, переход к пределу, интегрирование. ■

Окончание второго доказательства теоремы Гаусса. На сфере параллельный обнос контура, как мы видели, дает в качестве дефекта площадь охваченной области. Эта площадь является, как доказано в п.п.6 и 7 предыдущей главы, интегральной кривизной соответствующего прообраза на поверхности.

Вспомним, что полная кривизна может быть определена как предел отношения площади сферического образа области к площади самой области. В силу доказанного, мы можем сказать, что она является пределом отношения дефекта при параллельном обносе контура к площади охваченной области. Но обе эти величины – и числитель и знаменатель – выражаются через метрику. ■

8. Соотношение между интегральной кривизной области и параллельным обносом ее границы. Третье доказательство теоремы Гаусса

Мы знаем, что интегральная кривизна области, т.е. интеграл от кривизны по этой области, совпадает с площадью ее сферического образа. На сфере площадь области равна повороту вектора при параллельном обносе ее границы, а параллельный перенос вектора вдоль кривой на поверхности преводится дифференциалом сферического отображения в параллельный перенос по образу кривой при сферическом отображении. Таким образом интегральная кривизна выражается через параллельный перенос на поверхности и принадлежит ее внутренней геометрии.

Полезно исключить здесь обращение к сферическому отображению, чтобы установить соотношение между интегральной кривизной области и параллельным обносом по ее границе для двумерного многообразия с римановой метрикой, не обязательно индуцированной вложением в $\mathbb{R}^3$. Для этого воспользуемся формулой Грина.

В локальных координатах, которые, как обычно, возьмем ортогональными, поворот при параллельном переносе вектора относительно системы координат выражается, как мы видели, интегралом от формы $pdu+qdv$ (интеграл первого рода). Для полного обхода границы γ данной (односвязной) области получаем по формуле Грина

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} pdu + qdv &= \iint_{U} (p_v - q_u)\, du\, dv = \\ = \iint_{U} \frac{(p_v - q_u)}{AB} AB\, du\, dv &= \iint_{U} K\, AB\, du\, dv. \end{aligned}$$

Это интеграл первого рода на поверхности (AB есть якобиан карты и $AB\, du\, dv$ служит дифференциалом меры на поверхности, индуцированной стандартной метрикой в $\mathbb{R}^3$).

Итак, посредством положительно определенной квадратичной формы на поверхности сначала определяется параллельный перенос векторов вдоль каждой кривой, затем с помощью теоремы Грина интегральная кривизна каждой области и, наконец (через предельный переход), полная кривизна в каждой точке, без обращения к внешнему пространству – второй квадратичной форме, сферическому отображению и проч.

Таким образом, получаем

Утверждение 1. *Кривизна риманового двумерного многообразия определена независимо от объемлющего пространства.*

Мы видим, что в трехмерном пространстве это определение совпадает со старым, благодаря полученному выражению кривизны через производные коэффициентов метрики.

Мы можем и непосредственно вывести из данного нового определения кривизны, что в случае поверхности в $\mathbb{R}^3$ она совпадает с кривизной, определенной через отношение детерминантов двух квадратичных форм в случае поверхности в $\mathbb{R}^3$. Тем самым будет получено третье доказательство теоремы Гаусса.

Утверждение 2. *Если параллельный перенос на двумерном римановом многообразии M не зависит от пути переноса, то гауссова кривизна равна тождественно нулю.*

Доказательство. Действительно, по приведенной формуле интегральная кривизна по малой области охваченной замкнутым контуром равна нулю. После перехода к пределу мы также получим нуль. ■

.....

9. Теорема Гаусса - Бонне

ДОБАВЛЕНИЕ 1. **ТЕОРЕМА О РАНГЕ**.

Теорема. Если отображение имеет в области постоянный ранг матрицы Якоби, то образ отображения в окрестности каждой точки является гладким подмногообразием.

Фиксируем точку $\mathbf{x}_0$ и с помощью линейной замены координат добъемся, чтобы матрица Якоби в точке $\mathbf{x}_0$ имела стандартный вид: единичная $r \times r$-матрица в левом верхнем углу и нулевые элементы вне этой матрицы. Этим определено разложение в прямые произведения координатных плоскостей прообраза $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r_1 \oplus \mathbb{R}^{n-r}$ и образа $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^r_2 \oplus \mathbb{R}^{N-r}$. В этих координатах отображение f записывается в форме $f(\mathbf{p},\mathbf{q}) = (\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q}),\, \psi(\mathbf{p},\mathbf{q}))$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n-r}$, $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \mapsto (\mathbf{u},\mathbf{v})$, где $\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{p},\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^r_2$, $\mathbf{v} = \psi(\mathbf{p},\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{N-r}$ причем $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0)$, $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0 = (\mathbf{u}_0,\mathbf{v}_0)$.

В малой окрестности $\mathbf{x}_0$ отображение $\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \mathbf{u}$ имеет ранг r, причем невырожден минор $\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{p}}\right)$. Значит, при каждом $\mathbf{q}$ близком к $\mathbf{q}_0$ отображение $\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q})$ является диффеоморфизмом малой окрестности P_q точки $\mathbf{p}_0,\mathbf{q}$ в плоскости $\mathbb{R}^r_1 \times \mathbf{q}$ на окрестность U точки $\mathbf{u}_0$ в $\mathbb{R}^r_2$. Окрестность U можно взять одну и ту же для всех $\mathbf{q}$ из малой окрестности Q точки q_0, т.к. диффеоморфизм $\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q})$ непрерывно зависит от $\mathbf{q}$. Мы можем считать, что этот диффеоморфизм отображает P_q на U для каждого $\mathbf{q}$. Говоря иначе, имеется оокрестность W точки $(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0)$, пересечение которой с каждой плоскостью $\mathbf{q} = const$ для $\mathbf{q}$ из некоторой окрестности V есть область P_q этой плоскости, которая диффеоморфно отображается на U. Это, очевидно, означает, что $W = V \times U$, что позволяет ввести в W криволинейные координаты $(\bar{\mathbf{u}},\bar{\mathbf{q}})$ преобразованием $\bar{\mathbf{u}} = \varphi(\mathbf{p},\mathbf{q}), \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q}$ с ненулевым якобианом. В этой системе координат отображение $f(\bar{\mathbf{u}},\bar{\mathbf{q}}) = f(\varphi_q(\mathbf{p}),\mathbf{q}) = (\varphi(\varphi_q^{-1}(\mathbf{u}),\mathbf{q})\,\psi(\mathbf{p},\mathbf{q})) = (\mathbf{u},\mathbf{v})$ будет иметь матрицу Якоби, в которой левый верхний угол есть единичная $r \times r$-матрица, а элементы справа от этой матрицы нулевые.

В таком случае будут нулевыми и производные $\mathbf{v}$ по $\mathbf{q}$, иначе ранг матрицы Якоби отображения f был бы больше r. Но это означает, что отображение f в системе $(\bar{\mathbf{u}},\bar{\mathbf{q}})$ не зависит от $\mathbf{q}$. (Строго говоря, использование теоремы Лагранжа здесь требует, чтобы окрестность была выпуклой, что без труда можно получить.) В частности, координата v образа однозначно определяется координатой u, т.е. образ отображения f локально представляется графиком отображения области U в координатную плоскость $\mathbb{R}^{N-r}$ и, следовательно, является гладким подмногообразием. ■

Контрольный вопрос. Привести с помощью замены координат в образе отображение к каноническому линейному виду (как указано вначале) в целой окрестности точки A.

ДОБАВЛЕНИЕ 2. **ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ И СКОБКА ЛИ**

3. *Векторные поля и обыкновенные дифференциальные уравнения*

Локальная запись векторного поля как функции от точки многообразия вместе с представлением вектора как вектора скорости параметризации гладкой кривой приводит к инвариантной (не зависящей от координат) форме представления обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть в окрестности точки $\mathbf{x}_0$ на многообразии взяты локальные координаты x^i и задано векторное поле $X(\mathbf{x})$. Во взятых координатах точки и в соответствующих координатах в касательной плоскости мы получаем запись этого поля как системы из k функций: $X^i = f^i(x^j)$.

Поскольку в каждой точке $\mathbf{x}$ касательный вектор $X(\mathbf{x})$ данного поля является вектор-скоростью класса параметризованных кривых, естественно поставить вопрос об отыскании параметризованных кривых, для которых в каждой их точке вектор скорости совпадает с вектором поля в этой точке. Если $\mathbf{x}(t)$ - параметризация искомой кривой и $x^i(t)$ - координаты ее точки для значения параметра t, то координаты ее вектора скорости равны $\dot{x}^i(t) = X^i$, т.е. мы приходим к дифференциальному уравнению

$$\dot{x}^i(t) = f^i(x^j(t)).$$

Обратно, система дифференциальных уравнений в такой форме (называемой нормальной) говорит, что вектором скорости $\dot{\gamma}(t)$ искомой кривой $\mathbf{x} = \gamma(t)$ для каждого значения параметра t служит вектор векторного поля, заданного правой частью системы: $\dot{\mathbf{x}}(t) = X(\mathbf{x}(t))$.

Эта система будет по разному выглядеть в разных системах координат, т.к. в правой части надо подставить формулы замены координат, а в левой – умножить на матрицу Якоби этой замены. Таким образом векторное поле (которое при этом не меняется) связывает большое число различных дифференциальных уравнений. В частности, решение одного приводит к решению остальных, если только нам даны координатные замены. (Примеры см. в справочнике по обыкновенным дифференциальным уравнениям Э.Камке.)

С другой стороны теория обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка позволяет уточнить и очень существенно пополнить геометрическую картину векторного поля. Мы отметим три важных момента.

1). Параметр. Во-первых, теорема существования и единственности утверждает в сущности, что через каждую точку проходит ровно одна *интегральная кривая* поля, т.е. параметризованная кривая, векторы скорости которой совпадают во всех ее точках с векторами поля.

На самом деле, параметризацию можно заменить с помощью сдвига на константу, поскольку правая часть уравнения при заменах не меняется, а левая является производной по параметру и не изменится, если к параметру добавить константу.

Итак, параметризация интегральной кривой определяется полем с точностью до сдвига. Мы иногда будем называть эту параметризацию *канонической*. Конечно, все это справедливо лишь в некоторой малой, вообще говоря, окрестности данной точки.

Замечание. Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в нормальной форме, в правую часть которого не входит параметр, в механике называется *автономным* и также *динамической системой*, оно описывает установившийся процесс. (И неустановившийся, если t входит в правую часть.)

2). Локальная группа преобразований. Во-вторых, теорема о дифференцируемой зависимости решения от начальных условий означает, что для каждого (малого) t_0 мы получаем обратимое непрерывно дифференцируемое отображение малой окрестности данной точки в $\mathbb{R}^k$, переводящее точку $\mathbf{x}(t)$ в точку $\mathbf{x}(t+t_0)$.

Каждое параметризованное решение при этом испытывает допустимую смену параметризации (т.е. сдвиг). Таким образом мы имеем локальные диффеоморфизмы φ_t и, очевидно, $\varphi_{t_1+t_2} = \varphi_{t_2}\varphi_{t_1}$:

$$\varphi_{t_1+t_2}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t+t_1+t_2) = \varphi_{t_2}(\varphi_{t_1}(\mathbf{x}(t))).$$

Это равенство справедливо там, где композиция определена, т.е. во всяком случае в достаточно малой окрестности данной точки.

Верно также, что $\varphi_0 = id$ (тождественное отображение), и $\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$. Все это можно было бы подытожить, сказав, что мы имеем гомоморфизм аддитивной группы вещественных чисел в группу диффеоморфизмов областей аффинного пространства. В частности, эта группа коммутативна.

Но диффеоморфизмы областей не образуют группы, т.к. композиция их не всюду определена, кроме того, наш гомоморфизм определен лишь на малом интервале, а не на всей прямой. Поэтому систему диффеоморфизмов окрестностей точки с такими алгебраическими свойствами называют *локальной однопараметрической группой преобразований* и также *потоком*, особенно в том случае, когда решения оказываются определенными на всей прямой. (Если параметр оказывается определенным на всей прямой для всех интегральных кривых, то поле называется *полным*. В частности, поле оказывается полным, если поле задано во всех точках *компактного* многообразия.)

Мы не будем стремиться уточнить это понятие с полной строгостью (см. Понтрягин “Непрерывные группы”...), но будем часто им пользоваться.

Действие диффеоморфизма на поле. Пусть даны диффеоморфизм ψ и векторное поле X, определенные в окрестности некоторой точки $\mathbf{x}_0$ многообразия. Переходя к локальным представителям, мы можем принять, что это – область пространства $\mathbb{R}^k$, которую ψ отображает на окрестность точки $\psi(\mathbf{x}_0)$.)

Дифференциал диффеоморфизма $d\psi$ в каждой точке переводит вектор скорости кривой в вектор скорости ее образа, т.е. $d\psi(\dot{\mathbf{x}}(t)) = \dot{\mathbf{y}}(t)$, где $\mathbf{y}(t) = \psi(\mathbf{x}(t))$.

Значит, диффеоморфизм переводит интегральные кривые данного поля в интегральные кривые образа этого поля при дифференциале диффеоморфизма.

При этом параметризации интегральных кривых соответствуют друг другу. Тогда соответствуют и локальные группы преобразований, порожденные данным полем и его образом, т.е.

$$\psi(\varphi_t(\mathbf{x})) = \tilde{\varphi}_t(\psi(\mathbf{x})),$$

где φ_t и $\tilde{\varphi}_t$ – локальные группы, порожденные полем X и его образом соответственно.

Следствие *(критерий инвариантности поля).* Поле X называется *инвариантным* относительно диффеоморфизма ψ, если дифференциал $d\psi$ диффеоморфизма переводит каждый вектор поля X в другой вектор того же поля: $d\psi\,(X(\mathbf{x})) = X(\psi(\mathbf{x}))$. X тогда и только тогда инвариантно относительно ψ, когда ψ коммутирует со всеми диффеоморфизмами φ_t локальной группы, порожденной полем X: $\psi\varphi_t = \varphi_t\psi$. ■

(“Всеми” означает “всеми при достаточно малых t”, при больших t мы можем выйти за пределы области определения поля.)

В частности, дифференциалы всех диффеоморфизмов этой группы переводят поле в себя, т.к. локальная группа преобразований φ_t коммутативна. (Это, впрочем, и так ясно: интегральные кривые переходят в себя с линейным сдвигом параметра, так что вектор скорости должен перейти в вектор скорости, т.е. вектор поля – в вектор поля.)

3). Выпрямляющий диффеоморфизм. В третьих, дифференциальное уравнение, определенное в окрестности точки, с непрерывно дифференцируемой и не обращающейся в нуль правой частью может быть в некоторой окрестности этой точки “выпрямлено”: имеется *выпрямляющий диффеоморфизм*, который переводит уравнение в уравнение параллельного сдвига вдоль координатной оси, например, Ox^1. Мы не приводим детального доказательства (см. Арнольд “Обыкновенные дифференциальные уравнения”....), а опишем процедуру приведения.

Пусть вектор X_0 векторного поля X в точке $\mathbf{x}_0$ отличен от нуля. Рассмотрим (n-1)-мерную плоскость P, проходящую через $\mathbf{x}_0$ и не содержащую вектора X_0. Близкие векторы поля образуют с P ненулевые углы большие некоторого $\varepsilon > 0$.

Введем в P систему линейных координат с началом в $\mathbf{x}_0$, нумеруя их, начиная с x^2, и пусть x^1 совпадает с параметром вдоль интегральных кривых с нулевым значением для точек на P. Эта локальная система координат определяет требуемый диффеоморфизм Φ окрестности $\mathbf{x}_0$ на окрестность начала в $\mathbb{R}^k$: точки на интегральных кривых имеют постоянные координаты $x^i, i > 1$, а первая координата совпадает с параметром, определяемым уравнением; якобиан Φ всюду отличен от нуля, что достаточно проверить в точке $\mathbf{x}_0$, в силу непрерывности.

В $\mathbf{x}_0$ якобиан не нуль, т.к. дифференциал отображения Φ переводит репер, состоящий из репера в плскости P и X_0, в координатный репер в $\mathbb{R}^k$.

4. *Число вращения векторного поля в изолированной особой точке на плоскости.*

Точка, в которой вектор поля равен нулю, называется особой точкой этого поля. С помощью степени отображения окружности в окружность (см. главу 3 п.11) вводится очень полезная характеристика изолированной особой точки векторного поля на плоскости (и тем самым также на любом двумерном многообразии).

Определение. Пусть дано векторное поле $X(\mathbf{x})$ в окрестности $U(O)$ начала $O \in \mathbb{R}^2$. Допустим, что $X(O) = 0$, но других особых точек поля X в U нет. Рассмотрим малый круг B с центром O и краем S и рассмотрим векторы поля в точках $\mathbf{x} \in S$. Каждый такой вектор $X(\mathbf{x})$ после параллельного переноса в O определяет луч, который пересекает S в определенной точке. Обозначим ее $g(\mathbf{x})$. Мы получаем непрерывное отображение S в себя, которое имеет определенную степень $\deg g$. Эта степень называется *числом вращения* или *индексом* векторного поля X в особой точке O и обозначается $ind_O X$.

Мы можем взять для вычисления $ind_O X$ произвольное отображение f окружности S в $U \setminus O$, которое гомотопно в $U \setminus O$ тождественному отображению. Перенося вектор $X(f(\mathbf{x}))$ параллельно в O и, как и раньше, беря точку пересечения соответствующего луча с S, мы получим отображение S в себя, которое будет, очевидно, гомотопно g, если f гомотопно тождественному отображению S.

Упражнения. Подсчитайте индекс в нуле векторных полей $(x, y),\ (-y, x),\ (x, -y)$.

Покажите, что если в круге B задано векторное поле X без особых точек, то вращение этого поля по краю S круга равно нулю.

Из этого следует, что если в области U на плоскости задано векторное поле, вращение которого на кривой, ограничивающей область $V \subset U$, в которой эта кривая стягивается в точку, не равно нулю, то в V имеется особая точка. Это полезно для нахождения и изучения положений равновесия динамической системы, описываемой соответствующей системой дифференциальных уравнений.

Упражнение. Пусть на двумерной сфере S^2 дано касательное векторное поле X, не равное нулю в северном полюсе N. В круговой окрестности $U(N)$ поле может быть выпрямлено. Его индекс в N равен нулю. Замыкание дополнения $S^2 \setminus U$ может быть диффеоморфно отображено на круг в плоскости (например, центральной проекцией из N).

Покажите, что "с точки зрения" этого круга число вращения поля X на границе области равно 2. Так как оно не нуль, на сфере обязательно имеется особая точка поля.

5. *Скобка Ли*

Мы воспользуемся сейчас локальной группой преобразований, определенной векторным полем, чтобы ввести интересную операцию, которая является с одной стороны своего рода умножением (выполнен закон дистрибутивности) векторных полей, а с другой дифференцированием, которое естественным образом распространяет дифференцирование функций на дифференцирование векторных полей.

Обозначение. Эту операцию называют *скобкой Ли* и скобку Ли векторных полей X и Y обозначают $[X, Y]$. (Порядок существенен.)

Имеется несколько путей для введения этой операции. Сначала рассмотрим более формальный.

Первый способ введения скобки Ли. Векторные поля это *линейные операторы* на функциональном пространстве: в каждой точке каждой функции вектор поля сопоставляет число – ее производную по этому вектору. В результате получается функция от точки. Свойство линейности очевидно. Итак, векторное поле ставит функциям в соответствие функции, соблюдая линейность. (Мы, как обычно, не обсуждаем вопроса о классе гладкости и об области определения, считая, что все происходит "в достаточно малой окрестности" точки $\mathbf{x}$ многообразия и все "достаточно гладко").

Обозначение. Оператор, соответствующий векторному полю, будем обозначать той же буквой, но жирной. Например, $\mathbf{X}$ для поля X.

В таком случае, если даны два векторных поля X и Y, мы вправе рассмотреть композицию $\mathbf{YX}$, применяя сначала к данной функции оператор $\mathbf{X}$, а затем к результату оператор $\mathbf{Y}$. Мы получим, линейный оператор на пространстве функций. *Но этот оператор не будет дифференцированием!* Это легко проверить. Но столь же легко проверить, что дифференцированием будет *коммутатор* $\mathbf{YX}-\mathbf{XY}$ этих двух операторов. Это чисто формальное утверждение, пространство функций можно заменить на любое кольцо:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{Y},\mathbf{X}](f\cdot g)=(\mathbf{YX}-\mathbf{XY})(f\cdot g) &= \\
\mathbf{Y}(\mathbf{X}f\cdot g+f\cdot\mathbf{X}g)-\mathbf{X}(\mathbf{Y}f\cdot g+f\cdot\mathbf{Y}g) &= \\
\mathbf{YX}f\cdot g+\mathbf{Y}f\cdot\mathbf{X}g+\mathbf{X}f\cdot\mathbf{Y}g+f\cdot\mathbf{YX}g &- \\
\mathbf{XY}f\cdot g-\mathbf{Y}f\cdot\mathbf{X}g-\mathbf{X}f\cdot\mathbf{Y}g-f\cdot\mathbf{XY}g &= \\
(\mathbf{YX}-\mathbf{XY})f\cdot g+f\cdot(\mathbf{YX}-\mathbf{XY})g &.
\end{aligned}$$

Второй способ. Формальный способ оказался простым, но мало "инструктивным" и не наглядным. Рассмотрим более геометричный способ. Мы хотим распространить дифференцирование функций на векторные поля. Как можно продифференцировать одно векторное поле по другому?

Трудность в том, что для образования производной нужно до предельного перехода взять разность значений (в нашем случае векторного поля) в разных, хотя и близких точках. В случае функций никаких проблем нет, т.к. вычитать нужно два числа. Но в случае векторных полей нужно сравнивать два вектора в двух разных точках. Пока мы находимся в аффинном пространстве и в линейной системе координат, трудность исчезает, т.к. можно воспользоваться параллельным сдвигом (отождествляя векторы, получающиеся друг из друга при параллельном сдвиге).

Но в нелинейной системе координат, тем более для касательных векторов к подмногообразию, параллельностью нельзя воспользоваться, векторы в разных точках обычно не параллельны! (Скажем, на сфере.)

Здесь нам на помощь и приходит локальная группа преобразований, порождаемая векторным полем. Пусть мы хотим продифференцировать в многообразии M векторное поле X по векторному полю Y. (Дифференцирование векторного поля *по вектору* не определяется!)

Рассмотрим локальную однопараметрическую группу преобразований в окрестности точки $\mathbf{x}_0\in M$, порожденную полем $Y(\mathbf{x})$. Пусть $\varphi_t(\mathbf{x})$ – диффеоморфизмы этой группы для малых t с матрицами Якоби (J_t) этого отображения в данной точке $\mathbf{x}_0$. Через эту точку проходит интегральная кривая $\varphi_t(\mathbf{x}_0)=\mathbf{x}_t$, $\mathbf{x}_0$ отвечает нулевому значению параметра. Обозначим через X_t и Y_t векторы полей X и Y, приложенные в точке этой кривой с параметром t ($Y_t=\dot{\mathbf{x}}_t$).

Дифференциал $d\varphi_t$ в точке $\mathbf{x}_0$ переводит вектор X_0 в вектор $\tilde{X}_t=(J_t)(X_0)$, приложенный в точке $\mathbf{x}_t$, который мы и будем сравнивать с вектором X_t.

Для образования производной нужно вычесть из значения поля в смещенной точке значение в данной точке, разделить на разность значений параметра и перейти к пределу, устремив эту разность к нулю. В нашем случае нужно из вектора X_t вычесть *приложенный к той же точке* $\mathbf{x}_t$ вектор $\tilde{X}_t$, который мы считаем вектором X_0, перенесенным потоком поля Y в эту точку. Эту разность надо разделить на t и перейти к пределу при $t\to 0$. Здесь приходится рассматривать предел по значениям меняющегося вектора, принадлежащим к разным касательным плоскостям, но в этом нет проблемы, т.к. все касательные плоскости мы уже соединили в одно многообразие – касательное расслоение. Итак,

$$[Y,X](\mathbf{x}_0)=\lim_{t\to 0}\frac{X_t-\tilde{X}_t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{X(\varphi_t(\mathbf{x}_0))-d\varphi_t(X(\mathbf{x}_0))}{t}.$$

Утверждение: *два определения скобки Ли совпадают.* Мы докажем это, показав, что они приводят к одинаковым выражениям в координатах. Начнем со второго способа.

Координаты $[Y,X]$ *по второму способу.* Линеаризуем оба вектора в числителе дроби по t, поскольку бесконечно малые высших порядков все равно исчезнут при переходе к пределу. Мы предполагаем, что в окрестности точки $\mathbf{x}_0$ дана локальная система координат x^i.

Вектор X_t. Берем покоординатное разложение (в нашем случае $dt=t$): $X^i_t\approx X^i_0+\frac{dX^i}{dt}|_0 t=X^i_0+\frac{\partial X^i}{\partial x^j}|_0\frac{dx^j}{dt}|_0 t=X^i_0+\frac{\partial X^i}{\partial x^j}|_0 Y^j_0 t$.

(Напомним, что вектор Y_t служит вектором скорости используемой здесь параметризации кривой.)

Вектор $\tilde{X}_t$: $\tilde{X}^i_t=(d\varphi_t|_{\mathbf{x}_0}(X_0))^i=(\frac{\partial(\varphi(\mathbf{x}))^i}{\partial x^j}|_0)(X^j_0)\approx$
$\approx(\frac{\partial(x^i+\dot{x}^i t)}{\partial x^j}|_0)(X^j_0)=(\delta^i_j+\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}|_0 t)(X^j_0)=X^i_0+\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}|_0 X^j_0 t.$

Мы использовали матричное умножение. После вычитания и сокращения X^i_0 и t получим ответ:

$$[Y,X]^i=(\frac{\partial X^i}{\partial x^j}|_0 Y^j_0-\frac{\partial Y^i_0}{\partial x^j}|_0 X^j_0).$$

Координаты $[Y, X]$ *по первому способу.* Такой же ответ мы получим для координат и при первом способе определения скобки Ли. Рассуждения здесь более простые.

YX. Получим сначала координатное выражение для применения композиции YX к функции f:

$$\begin{aligned} Y(X(f))|_0 &= Y(\tfrac{\partial f}{\partial x^i} X^i)|_0 = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x^i} X^i)}{\partial x^j}|_0 Y|_0^j = \\ &= \tfrac{\partial f}{\partial x^i}|_0 \tfrac{\partial X^i}{\partial x^j}|_0 Y|_0^j + \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}|_0 X|_0^i Y|_0^j. \end{aligned}$$

XY. Аналогично, имеем:

$$X(Y(f))|_0 = \frac{\partial f}{\partial x^i}|_0 \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}|_0 X|_0^j + \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}|_0 Y|_0^i X_0^j$$

.

Вычитая, получим, учитывая симметрию вторых частных производных и опуская индекс 0:

$$[Y, X](f) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j - \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} X^j = (\frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j - \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} X^j) \frac{\partial f}{\partial x^i}. \qquad \blacksquare$$

6. *Свойства скобки Ли*

Тождество Якоби. Скобка Ли удовлетворяет простым, но важным алгебраическим соотношениям.

Во-первых, она не коммутативна, но *косокоммутативна*: $[X, Y] = -[Y, X]$, что очевидно из первого определения (и, возможно, несколько удивительно с точки зрения второго).

Далее, возьмем двойную скобку Ли $[Z, [Y, X]]$ для трех векторных полей X, Y, Z и *циклируем* ее, т.е. рассмотрим сумму трех таких выражений, в которых поля переставляются в циклическом порядке. Получится нуль:

$$[Z, [Y, X]] + [Y, [X, Z]] + [X, [Z, Y]] = 0. \qquad L$$

Это прямо следует из первого определения скобки, поскольку эта сумма разложится на шесть пар взаимно сокращающихся слагаемых.

Это очень важное соотношение, называемое *тождеством Якоби.* Оно означает, что векторные поля (определенные в одной и той же области) образуют *алгебру Ли.* Это *алгебра* в том смысле, что это – векторное пространство с умножением (скобкой). Правда, это умножение не только не коммутативно, но и не ассоциативно, что вытекает из тождества Якоби и косокоммутативности. Действительно, [[Z,Y],X]=-[X,[Z,Y]], т.е. в формуле (L) первое и последнее слагаемое сократились бы в случае ассоциативности, и двойная скобка всегда была бы нулевой, что, конечно, не имеет места.

Однако, это умножение оправдывает свое название тем, что оно линейно по каждому сомножителю.

Используя косокоммутативность, тождество Якоби можно переписать в следующем виде:

$$[Y, [X, Z]] - [X, [Y, Z]] = [[Y, X], Z].$$

Т.е. скобка как оператор дифференцирования векторных полей есть коммутатор операторов, заданных полями-сомножителями. Это свойство мы проверяли для дифференцирования функций.

Сохранение скобки при диффеоморфизмах. Пусть даны три векторных поля X, Y, $Z = [X, Y]$ в области $U \subset \mathbb{R}^k$. (Мы можем рассматривать случай области аффинного пространства, поскольку общий случай полей на многообразии все равно к нему сводится стандартным образом с помощью локальных представителей.)

Пусть дан диффеоморфизм $\psi : U \to U_1$. Обозначим через $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, $\tilde{Z}$ образы данных полей при дифференциале $d\psi$.Нам нужно проверить, что $\tilde{Z} = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$. Проще всего это увидеть из координатного выражения скобки. Мы оставим эту проверку в качестве полезного упражнения.

Будем исходить из определения скобки Z как производной поля X по полю Y. Пусть φ_t – диффеоморфизмы локальной группы Y. Дифференциал диффеоморфизма ψ переводит интегральные кривые Y в интегральные кривые $\tilde{Y}$ и диффеоморфизмы φ_t в диффеоморфизмы локальной группы $\psi\varphi_t\psi^{-1}$ (с сохранением параметра). При этом $d\psi d\varphi_t = d(\psi\varphi_t) = d(\psi\varphi_t\psi^{-1}\psi) = d(\psi\varphi_t\psi^{-1})d\psi$. Значит, сдвиг вектора X на величину параметра t вдоль интегральной кривой поля Y дифференциал ψ переводит в сдвиг вектора $\tilde{X}$ вдоль образа интегральных кривых на ту же величину параметра. В пределе мы получим, что производная Z перейдет в производную $\tilde{Z}$. $\blacksquare$

Сохранение скобки для подмногообразий. Пусть даны два многообразия: M_2 и M_1 – гладкое подмногобразие M_2. Пусть снова даны три поля X, Y и $Z = [X, Y]$ в области $U \subset M_2$, пересекающей M_1. Допустим, что в точках принадлежащих M_1 поля X и Y касаются M_1. Тогда Z также касается M_1.

Для доказательства достаточно заметить, что если интегральная кривая поля Y пересекает M_1, то она (в силу теоремы единственности) целиком лежит в M_1. Поэтому диффеоморфизмы локальной группы поля

Y переводят точки M_1 в точки M_1 и, значит, их дифференциалы переводят касательные векторы к M_1 в векторы касательные к M_1. В частности, образ поля X останется касательным к M_1 под действием такого диффеоморфизма. Разности векторов этих полей останутся касательными к M_1 и в пределе производная также будет касательной к M_1. ■

7. *Коммутирование векторных полей*

Равенство нулю скобки $[X,Y]$ означает, что векторные поля *коммутируют*, т.е. коммутируют диффеоморфизмы порожденных ими локальных групп.

Определение. Векторные поля X и Y, определнные в области U гладкого многообразия M, *коммутируют*, если для всех достаточно малых s и t

$$\varphi_t(\psi_s(\mathbf{x})) = \psi_s(\varphi_t(\mathbf{x})),$$

где φ_t – локальная группа поля X, а ψ_s – поля Y.

Это важное свойство может быть сформулировано иначе. Если мы сдвигаемся из точки A сначала по интегральной кривой поля X на величину параметра t и далее по интегральной кривой поля Y на величину параметра этого поля s, то мы придем в ту же точку, в какую попадем, если сначала сдвинемся на s по интегральной кривой Y, а затем на t по кривой X. Это прямо следует из определений.

Важное замечание. Если поля коммутируют в области на поверхности, то они определяют в этой области координатную карту. Надеемся, что для читателя это очевидно. Этот факт верен и для k коммутирующих полей в k-мерном пространстве.

Теорема. Векторные поля X и Y коммутируют тогда и только тогда, когда [X,Y]=0.

Доказательство. Можно считать, очевидно, что в данной точке вектор одного из полей не нуль. Пусть не нуль вектор поля Y. Построим для Y выпрямляющий диффеоморфизм в окрестности этой точки, переводящий его в единичное поле $\mathbf{e}_1$ параллельное оси x^1.

Так как скобка сохраняется при диффеоморфизме, ее координатное выражение показывает, что в нашем случае $[Y,X]$ переходит в дифференцирование X по первой координате (остальные координаты вектора $\mathbf{e}_1$ равны нулю, а координатs всех векторов $\mathbf{e}_i$ постоянны).

Если $[Y,X]=0$, то и образ скобки, который равен скобке образов, есть нуль, и тогда поле X переходит в поле, производные которого по первой координате равны нулю, т.е. оно не меняется при диффеоморфизмах однопараметрической группы (в этом случае состоящей из параллельных сдвигов вдоль первой координатной оси.) Значит, поле X также не меняется (вектор поля переходит в вектор поля) при диффеоморфизмах локальной группы поля Y.

Обратно, если при сдвиге по локальной группе поля Y поле X переходит в себя, то уже до перехода к пределу при вычислении производной разность в числителе равна нулю. ■

=========

ДОБАВЛЕНИЕ 3. ГРУППА ДВИЖЕНИЙ

1. *Евклидова метрика в аффинном пространстве.*

Определяя длину гладкой кривой, мы исходили из того, что кривая представлена как отображение отрезка в евклидово пространство, в котором задано обычное “пифагорово” расстояние $\rho(A,B)$ между точками $A, B \in \mathbb{R}^n$

$$\rho^2(A,B) = \sum (y^i - x^i)^2,$$

где x^i – координаты точки A, y^i – координаты точки B в стандартной системе координат. Проанализируем подробнее, как происходит введение этой метрики.

Еще раз о пространстве $\mathbb{R}^n$. Мы, как всегда, рассматриваем пространство $\mathbb{R}^n$ как пространство числовых наборов, причем с двух точек зрения – как точечное аффинное пространство со структурой, позволяющей рассматривать плоскости, и как векторное пространство с началом в нулевой точке O и с векторными операциями. Векторное пространство с началом в O можно считать касательным пространством к аффинному в этой точке. Остальные точки также служат началами векторных пространств V_x, которые являются касательными пространствами к аффинному в этих точках, и они отождествляются друг с другом с помощью параллельных переносов. В качестве стандартного репера в O берем наборы $\mathbf{e}_i$ с единицей на i-ом месте и остальными нулями. Они обозначаются также $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Векторы, получаемые с помощью параллельных переносов из этих векторов, образуют стандартные координатные поля, которые обозначаются также $\frac{\partial}{\partial x^i}$ с указанием при необходимости точки приложения вектора.

Элементы аффинного пространства и векторного с началом в O естественным образом отождествляются друг с другом (точке ставится в соответствие ее радиус-вектор). В аффинном пространстве вводится стандартная метрика. Мы хотим проанализировать эту операцию введения метрики.

Длины отрезков на оси. Во-первых, в одномерном векторном пространстве, т.е. на числовой оси $\mathbb{R}$, мы можем определить длины отрезков (расстояния между точками) с помощью линейной структуры: для этого нужно фиксировать ненулевой вектор в качестве единичного или базисного. Конец вектора, получаемого из базисного с помощью умножения на число $c > 0$, получает координату c. Теперь расстояние (со знаком) между двумя точками на оси определено как разность их координат.

Мы принимаем за аксиому, что при параллельном переносе расстояние не меняется, так что выбрав единичный отрезок на одной оси, мы получим измерение длин отрезков на осях ей параллельных с помощью параллельного переноса.

Вопрос заключается в том, как сравнивать длины на непараллельных осях.

В силу сказанного, нам достаточно определить масштабные векторы (которые принимаются за единичные) на всех прямых, проходящих через O. Естественно потребовать, чтобы выбор этих векторов непрерывно зависел от направления и это условие приводится к требованию, чтобы их концы описывали компактную поверхность вокруг начала (пересекающую каждый луч из начала ровно в одной точке и потому, очевидно, гомеоморфную сфере). На самом деле, мы хотим еще иметь *группу изометрий*, т.е. группу линейных преобразований, которые сохраняют длины векторов, и, в частности, переводят указанную поверхность в себя. Группа эта не должна быть чрезмерно большой, что сводится к требованию, чтобы она была компактной. (Это требование естественно и из других соображений, но мы на них не останавливаемся.)

Оказывается, имеется теорема, согласно которой все максимальные (т.е. не увеличиваемые) компактные подгруппы в группе $GL(n,\mathbb{R})$ сопряжены с ортогональной группой. Это означает, что для каждой такой подгруппы G существует замена переменных, которая переведет ее в $O(n,\mathbb{R})$. (Действительно, сопряженность означает существование невырожденной матрицы C такой, что $C^{-1}AC \in O(n,\mathbb{R})$ для всех $A \in G$. Эта матрица C и служит матрицей замены.) Другими словами, всегда для нее можно найти базис, в котором матрицы преобразований из этой подгруппы будут ортогональными. В этом базисе поверхность единичных ортов будет сферой с уравнением $\sum(x^i)^2 = r^2$. Применив еще гомотетию, мы придем к стандартной пифагоровой метрике.

Мы могли бы получить метрическое пространство, взяв в качестве исходной формы сумму не вторых, а, например, четвертых степеней координат. Но в таком случае не имелось бы компактной группы линейных преобразований, с помощью которых мы могли бы переводить каждый орт в каждый другой.

Расстояние в аффинном пространстве.

Итак, чтобы определлить измерение длин отрезков в аффинном пространстве, мы начинаем с того, что на одной оси, скажем, на Ox, выбираем вектор $\mathbf{e}$ в качестве масштабного единичного орта.

Затем на каждой оси проходящей через начало мы получаем из $\mathbf{e}$ орт этой оси, применяя вращение пространства, которое переводит ось Ox в эту ось. Наконец, для каждого отрезка в аффинном пространстве мы сначала сместим параллельно прямую, на которой он лежит, в прямую, проходящую через начало, так чтобы его один конец перешел в O, и затем поворотом пространства с неподвижным началом переведем эту прямую в ось Ox. Длину получившегося отрезка оси Ox мы и принимаем за длину отрезка данного нам в начале.

Параллельное смещение определено однозначно, а поворот определен с точностью до поворотов, которые оставляют ось Ox неподвижной.

Контрольный вопрос. Все параллельные переносы и повороты из ортогональной группы и, значит, также их композиции, сохраняют длины всех отрезков, определенные указанным образом.

Изометрии.

Все композиции параллельных переносов и поворотов, очевидно, образуют группу, которую мы будем обозначать $\mathcal{G}(n,\mathbb{R})$ и называть полной группой *аффинных изометрий*, т.е. аффинных отображений аффинного пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющих расстояния. Для оправдания этого названия покажем теперь, что она совпадает с группой всех (не обязательно аффинных) преобразований $\mathbb{R}^n$, сохраняющих расстояния. Такие преобразования (любого метрического пространства) будем называть просто *изометриями.* Очевидно, что каждая изометрия непрерывна. Мы должны показать в нашем случае, что изометрии являются аффинными отображениями.

Предложение A. Любая изометрия g, для которой $g(O) = O$, есть элемент группы $\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$.

Доказательство. Нужно показать, что g есть линейное преобразование $\mathbb{R}^n$.

Во-первых, g переводит прямые изометрично в прямые. В самом деле, прямая в $\mathbb{R}^n$, проведеная через точки A и B характеризуется тем, что для любой ее третьей точки C выполнено условие: одно из трех расстояний AB, BC, AC равно сумме двух других, и это условие верно, только если C лежит на прямой AB. (Это следует из правила треугольника $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$, где равенство возможно только если векторы пропорциональны, что является выражением известного условия в неравенстве Коши - Буняковского - Шварца; иначе говоря, скалярное произведение равно произведению длин векторов, только если они коллинеарны.) Ясно, что это условие остается верным и для точек gA, gB, gC, значит, и эти точки лежат на одной прямой.

Во-вторых, при умножении вектора $\mathbf{v}$ на число c его образ $g(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$ также умножится на c. Действительно, конец $g(c\mathbf{v})$ лежит на прямой $O\mathbf{u}$ на расстоянии $|c\mathbf{v}|$ от O, т.к. g изометрия, т.е. $g(c\mathbf{v}) = \pm cg(\mathbf{v})$. Но изменив непрерывно c в 1 или соотв. в -1, мы убедимся, что $g(c\mathbf{v})$ лежит с той же стороны от O, что и $cg(\mathbf{v})$, и, значит, $g(c\mathbf{v}) = cg(\mathbf{v})$.

В третьих, g отображает двумерные плоскости в двумерные плоскости. В самом деле, мы можем воспользоваться теоремой Пифагора и ее обратной. Любая изометрия по этой теореме переводит прямоугольные треугольники в прямоугольные и поэтому сохраняет ортогональность векторов. Значит, $(n-1)$-мерная плоскость, перпендикулярная к данному вектору, перейдет в $(n-1)$-мерную плоскость перпендикулярную к его образу. По индукции все плоскости переходят в плоскости той же размерности, в том числе двумерные.

Наконец, образ любого параллелограмма при нашей изометрии есть параллелограмм. В самом деле, образ параллелограмма оказывается плоским четырехугольником, у которого к тому же противоположные стороны равновелики.

Но с помощью параллелограммов определяется сложение векторов. В результате изометрия, сохраняющая начало, сохраняет линейные операции над векторами и, значит, является линейным изоморфизмом, сохраняющим скалярный квадрат, т.е. это – элемент ортогональной группы. ■

Замечание. Немного проще другое доказательство, основанное на рассмотрении образа множества P из $n+1$ точек – концов A_i векторов канонического репера вместе с началом O. Имеется в точности одна аффинная изометрия, которая совпадает с g во всех этих точках и, с другой стороны, только тождественная изометрия оставляет все эти точки неподвижными (т.к. каждая точка однозначно определена своими расстояниями до всех точек A_i и O). См. аналогичное рассуждение для псевдоевклидова случая в четвертой части, глава 16 Б.

Предложение Б. Любая изометрия аффинного пространства $\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой однозначно представляется в виде композиции $t\mathbf{o}$, где $\mathbf{o}$ – изометрия с неподвижным началом (т.е. элемент группы $\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$), а t – параллельный сдвиг на вектор $\mathbf{t}$.

В частности, изометрии являются аффинными преобразованиями, что доказывает, что $\mathcal{G}(n,\mathbb{R})$ есть группа *всех* изометрий.

Доказательство. Пусть h – изометрия и $h(O)=A$. Пусть t – параллельный сдвиг, переводящий O в A. Тогда $g'=t^{-1}h$ – изометрия, переводящая O в O, т.е., согласно предыдущему, элемент группы $\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$. Значит, $h=tg'$ – требуемое представление h, где $\mathbf{o}=g'$. Докажем единственность.

Если $t'\mathbf{o}'=t\mathbf{o}$, то $\mathbf{o}'=t'^{-1}t\mathbf{o}$, но композиция параллельных сдвигов есть параллельный сдвиг и, если он оставляет на месте начало, то это – тождество. Значит, $t'=t$ и тогда $\mathbf{o}'=\mathbf{o}$. ■

Предложение В. Параллельные сдвиги составляют нормальный делитель T_n в группе $\mathcal{G}(n,\mathbb{R})$.

Доказательство. Действие элемента $g\in\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$ на радиус-вектор $\mathbf{x}$ точки $x\in\mathbb{R}^n$ запишем как $g(\mathbf{x})$, а действие на $\mathbf{x}$ параллельного сдвига t на вектор $\mathbf{t}$ как $\mathbf{x}+\mathbf{t}$. Тогда действие композиции $g^{-1}tg$ на $\mathbf{x}$ запишется как $g^{-1}(g(\mathbf{x})+\mathbf{t})=g^{-1}g(\mathbf{x})+g^{-1}(\mathbf{t})=\mathbf{x}+g^{-1}(\mathbf{t})$. Значит, эта композиция есть параллельный сдвиг на вектор $g^{-1}(\mathbf{t})$, т.е. T_n действительно есть нормальный делитель в $\mathcal{G}(n,\mathbb{R})$. ■

Следствие. Фактор-группа $\mathcal{G}(n,\mathbb{R})$ по T_n есть $\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$. ■

Алгебраическое строение группы изометрий $\mathbb{R}^n$. Группа $\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$ – подгруппа в $\mathcal{G}(n,\mathbb{R})$, и $\mathcal{G}(n,\mathbb{R})$ *как множество* есть прямое произведение $\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$ и T_n. Но неверно, что $\mathcal{G}(n,\mathbb{R})$ является *прямым произведением групп* $T_n\times\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$, т.к. вторая группа не является нормальным делителем. Именно, $t^{-1}gt$, где $t\in T_n$, а $g\in\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$, есть изометрия с неподвижной точкой $t^{-1}(O)$ и она смещает точку O, значит, не лежит в $\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$ (если только g не оставляет неподвижной прямую, соединяющую O и $t^{-1}(O)$).

Все же, имеется алгебраическое описание строения группы $\mathcal{G}(n,\mathbb{R})$ как *полупрямого произведения* T_n и $\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$. Это значит, что оно определено этими группами и *действием* второй из них на первой.

Под *действием* ψ группы B на группе A понимается задание для каждого элемента $b\in B$ автоморфизма ψ_b группы A, т.е. $\psi_b(a_1a_2)=\psi_b(a_1)\psi_b(a_2)$, причем $\psi_{b_1b_2}(a)=\psi_{b_1}(\psi_{b_2}(a))$ и единичному элементу отвечает тождественый автоморфзм $\psi_1=1$. (Иными словами ψ_b есть *антигомоморфизм* второй группы в *группу автоморфизмов* первого, "анти" означает обращение порядка.)

Если задано действие ψ группы B на группе A, то групповое умножение в полупрямом произведении A и B с этим действием определяется правилом:

$$(a_1,b_1)(a_2,b_2)=(a_1\psi_{b_1}(a_2),b_1b_2).$$

Упражнение. Проверьте, что этим правилом задается групповое умножение, т.е., что эта операция ассоциативна, имеет единицу (1, 1) и обратный элемент для $(a,\,b)$ есть $(b^{-1}(a^{-1}),\,b^{-1})$.

Получившаяся группа называется *полупрямым произведением групп* A и B. Очевидно, группы A и B являются ее подгруппами. Операция в этой группе обозначается с помощью знака $\leftthreetimes$.

Проверьте, что A оказывается нормальным делителем в полупрямом произведении, а B, вообще говоря, нет. Значок $\leftthreetimes$ наклонен в сторону нормального делителя, т.е. A: $A\leftthreetimes B$.

Мы можем сказать, что фактор-группа группы $A\leftthreetimes B$ по A есть B, но нельзя сказать, вообще говоря, что фактор-группа по B есть A, т.к. B не обязана быть нормальным делителем.

Задача. Будет ли обязательно коммутативным полупрямое произведение двух коммутативных групп? Двух конечных циклических групп? Двух бесконечных циклических групп? В каком случае полупрямое произведение двух циклических групп оказывается коммутативным?

В нашем случае $\mathcal{G}(n,\mathbb{R}) = T_n \rtimes \mathbf{O}(n,\mathbb{R})$.

Предложение C. В группе $\mathcal{G}(n,\mathbb{R})$ структура полупрямого произведения определяется действием $\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$ на T_n, состоящим во взятии внутреннего автоморфизма: $\psi_t(g) = t^{-1}gt$.

Доказательство. Мы уже видели, что внутренний автоморфизм в $\mathcal{G}(n,\mathbb{R})$ с помощью элемента из $\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$ переводит T_n в себя, т.е. мы имеем действие ψ подгруппы $\mathbf{O}(n,\mathbb{R}) \subset \mathcal{G}(n,\mathbb{R})$ на нормальном делителе T_n. Значит, определено полупрямое произведение этих подгрупп, которое как множество совпадает с $\mathcal{G}(n,\mathbb{R})$ (оно совпадает с их прямым произведением). Мы должны проверить, что умножение в полученном полупрямом произведении совпадает с операцией композиции в $\mathcal{G}(n,\mathbb{R})$.

Будем записывать элементы $\mathcal{G}(n,\mathbb{R})$ в форме $t\mathbf{o}$, и пусть $\mathbf{v}$ – вектор в $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}(t_1\mathbf{o}_1)((t_2\mathbf{o}_2)(\mathbf{v})) = ((t_1\mathbf{o}_1)(t_2\mathbf{o}_2))(\mathbf{v}) = (t_1\mathbf{o}_1 t_2(\mathbf{o}_1^{-1}\mathbf{o}_1)\mathbf{o}_2)(\mathbf{v}) =\\ = [t_1(\mathbf{o}_1 t_2 \mathbf{o}_1^{-1})](\mathbf{o}_1\mathbf{o}_2)(\mathbf{v}) = ([t_1\psi_{\mathbf{o}_1}(t_2)](\mathbf{o}_1\mathbf{o}_2))(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

Квадратная скобка есть параллельный сдвиг на вектор $\mathbf{t}_1 + \mathbf{o}_1(\mathbf{t}_2)$, т.е. композиция двух элементов $\mathcal{G}(n,\mathbb{R})$ записана в требуемой форме операции в полупрямом произведении. ∎

Примеры и упражнения. $\mathcal{G}(1,\mathbb{R})$ состоит из двух компонент: одна есть T_1 и содержит сдвиги, а другая состоит из отражений прямой во всех ее точках.

$\mathcal{G}(2,\mathbb{R})$ состоит из компоненты, включающей параллельные переносы и повороты вокруг неподвижных точек, и второй компоненты, состоящей из отражений со сдвигами в инвариантных прямых. В частности, композиция поворота и параллельного сдвига есть поворот. Композиция поворота и отражения есть отражение, если неподвижная точка лежит на неподвижной прямой, и есть отражение со сдвигом в общем случае.

Контрольный вопрос. Как определить неподвижную точку в первом случае? Как найти инвариантную прямую во втором случае?

$\mathcal{G}(3,\mathbb{R})$ содержит в компоненте единицы параллельные переносы, вращения вокруг неподвижной прямой и винтовые движения (вращения со сдвигом вдоль инвариантной прямой). Во второй компоненте находятся отражения в точках и в плоскостях и отражения в плоскостях со сдвигом вдоль прямой, лежащей в плоскости отражения.

Ортонормированные реперы. “Формула Пифагора” для определения расстояния в $\mathbb{R}^n$ выделяет также специальный класс реперов (ортонормированных), в которых расстояние вычисляется по этой же формуле см.п.1 и гл.10 п.2. Иными словами мы можем взять ортонормированный репер в любой точке и вычислить расстояние с тем же результатом по той же формуле. (Хотя координаты точек другие.) Точно так же для двух векторов с общим началом мы можем вычислить их скалярное произведение по одной и той же формуле в любом ортонормированном репере

$$(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} u^i v^i = \mathbf{u}^T\mathbf{v}.$$

Скалярное произведение в произвольном репере. Если мы перейдем к произвольному реперу, полученному из стандартного линейным преобразованием с матрицей C, то формула для вычисления расстояния или длины усложнится. Мы получим квадратичную форму с невырожденной матрицей $G = (g_{ij})$, с помощью которой расстояние вычисляется по формуле

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(y^i - x^i)(y^j - x^j) = (\mathbf{y}-\mathbf{x})^T G(\mathbf{y}-\mathbf{x}).$$

Чтобы выяснить, как связаны между собой матрицы C и G, запишем скалярное произведение в матричной форме. Для этого заметим, что рассматривая векторы в произвольном репере пространства $\mathbb{R}^n$ как матрицы-столбцы, мы можем записать в ортонормированном репере скалярное произведение векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ в виде матричного произведения $u^T v$, где u, v – матрицы-столбцы, отвечающие векторам $\mathbf{u},\mathbf{v}$. (Индекс T означает транспонирование.)

Замена координат. Посмотрим, как изменится эта запись при переходе к другому реперу при произвольном линейном преобразовании. Если $u = Cu'$ и $v = Cv'$, где u, v – матрицы-столбцы, отвечающие векторам $\mathbf{u},\mathbf{v}$ в старом ортонормированном базисе, а u', v' – в произвольном новом, то мы получим матричную запись скалярного произведения в новом базисе в виде:

$$u'^T C^T C v'.$$

Значит, $G = C^T C$.

Это значит, что в каждой линейной системе координат матрица скалярного произведения есть $C^T C$, где C – любая невырожденная матрица, выражающая через координаты вектора в данной системе его координаты в каком-то ортонормированном базисе. (Если взять другой ортонормированный базис, то матрица C изменится, а матрица $C^T C$ нет.)

Если мы перейдем от данной линейной системы координат к другой системе с матрицей перехода B, то матрица скалярного произведения изменится по правилу $B^T G B$. В ортонормированных реперах $G = E$ и мы имеем $B^T E B = B^T B = E$, т.е. матрица B перехода от одной ортонормированной системы к другой ортогональна, как и должно быть (E – единичная матрица).