Часть вторая. **ВЕКТОРЫ**

А.В. ЧЕРНАВСКИЙ

4 июня 2010 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 5. **Векторные функции и кривые в $\mathbb{R}^n$**

1. **Векторные функции**

Мы достаточно подробно рассмотрели общий случай дифференцируемых отображений конечномерных аффинных пространств и поведение этих отображений в регулярных (правильных, несингулярных, неособых...) точках. Чаще всего встречаются два крайних случая: отображения $\mathbb{R}^n$ в прямую, т.е. функции n переменных, и отображения прямой (или ее интервалов) в $\mathbb{R}^n$, т.е. векторные функции числового аргумента.

Сейчас мы вспомним известный материал курса математического анализа, относящийся ко второму случаю. Мы считаем известными в применении к нему понятия предела, непрерывности и дифференцируемости и соответствующие свойства векторных функций.

Вектор в $\mathbb{R}^n$ это *стрелка*, имеющая начало и конец, направление и длину. Векторы с общим началом в точке A образуют линейное пространство; мы обозначаем его V_A; все эти пространства отождествляются естественным образом с помощью параллельных сдвигов. Пространство V_O часто также обозначается $\mathbb{R}^n$, как и соответствующее аффинное пространство. Канонические координаты точек в $\mathbb{R}^n$ равны каноническим координтам соответствующих векторов в V_O – их *радиус-векторов.*

Стандартное "пифагорово" расстояние между точками $\mathbb{R}^n$ согласовано с каноническим скалярным произведением в векторных пространствах V_A. Мы обозначаем это скалярное произведение простыми скобками. В канонических координатах: $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_1^i v_2^i$.

Как правило, мы будем выделять векторы жирным шрифтом, а длину вектра обозначать той же буквой, но светлой. Радиус-вектор обычно обозначается с помощью буквы $\mathbf{r}$ (иногда $\boldsymbol{\rho}$). Если не оговаривается противное, за начало векторов берется O.

Векторные функции. Важно не забывать о различии между векторной функцией числового аргумента и множеством ее значений – т.е. *кривой,* которую она определяет. Эту кривую называют *годографом* векторной функции, а саму функцию – *параметризацией* кривой. Аргумент функции в таком случае называется параметром этой параметризации или *параметром на кривой*. Нас в первую очередь интересует именно кривая, а параметризация играет роль средства изучения, но часто выступает на первый план.

2. **Дифференцирование произведений**

Договоримся обозначать дифференцирование по произвольному параметру, как в механике – точкой над знаком функции (или несколькими точками для старших производных), а штрихи сохраним для обозначения в дальнейшем производной по специальному параметру – длине дуги годографа. Напомним вначале обычные свойства линейности дифференцирования:

– производная суммы равна сумме производных,
– постоянный множитель выносится за знак производной,
– производная постоянной векторной функции равна нулю.

Дифференцирование произведений. Далее нам следует упомянуть о поведении дифференцирования по отношению к различным умножениям – операциям, для которых справедливо *правило Лейбница*: чтобы получить производную произведения из k сомножителей, нужно по очереди заменить в нем один из сомножителей его производной и сложить получившиеся k произведений. Доказательства стандартны и мы здесь можем считать их хорошо известными.

– Если $f(t)$ - скалярная (числовая) функция, а $\mathbf{r}(t)$ – векторная, то

$$(f(t)\mathbf{r}(t))^{\cdot} = \dot{f}(t)\mathbf{r}(t) + f(t)\dot{\mathbf{r}}(t).$$

Разложив для каждого значения параметра вектор $\mathbf{r}(t)$ по осям координат, получаем

Следствие: координаты производной векторной функции равны производным соответствующих координат самой функции.

– Если $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$ – векторные функции с общей областью определения, то скалярное произведение $(\mathbf{v}(t), \mathbf{u}(t))$ – скалярная функция определенная там же. Тогда

$$(\mathbf{v}(t), \mathbf{u}(t))^{\cdot} = (\dot{\mathbf{v}}(t), \mathbf{u}(t)) + (\mathbf{v}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)).$$

В $\mathbb{R}^3$ имеется еще векторное умножение двух векторов и смешанное умножение трех векторов. Правило дифференцирования соответствующих произведений векторных функций также подчиняется закону Лейбница и мы не выписываем формул.

Контрольный вопрос. Покажите, что правила дифференцирования смешанного произведения и детерминанта согласованы.

Соответственно с этим мы можем в n-мерном пространстве определить “смешанное произведение” n векторов как определитель матрицы, столбцами которой являются данные векторы. Дифференцирование этого “смешанного произведения” определено правилом дифференцирования определителя и согласовано с правилом Лейбница.

[*Вывод правила дифференцирования определителя.* Правило Лейбница применим к каждому из $n!$ слагаемых определителя. Мы получим $n\cdot n!$ слагаемых, в каждом из которых ровно один сомножитель заменен на свою производную. Если собрать вместе слагаемые, в которых заменен на производную элемент первого столбца, то их сумма даст определитель, отличающийся от исходного заменой первого столбца на столбец из производных его элементов. Вся сумма распадется на n таких сумм, каждая из которых даст определитель, получающийся из данного заменой одного из столбцов на его производную. Таким образом, производная определителя, составленного из координат n векторов, т.е. их смешанного произведения, действительно получается по правилу Лейбница.]

Пример. *Матричные функции.*

Мы уже знаем, что квадратные матрицы порядка $n\times n$ можно отождествить с точками пространства $\mathbb{R}^{n^2}$. Координатами матрицы служат ее элементы, которые нумеруются последовательно строка за строкой. Матричной функцией $U(t)$ называется сопоставление матриц U точкам t из числового интервала. Иначе говоря, матричная функция это матрица, элементами которой служат числовые функции. Производной $U'(t)$ матричной функции $U(t)$ является матрица, состоящая из производных элементов матрицы $U(t)$.

Упражнение. Показать, что правило Лейбница применимо к матричному умножению, т.е. что $(UV)' = U'V + UV'$. (Порядок существен!)

3. **Формула Тейлора**

Напомним для нашего случая, т.е. для векторной функции $\mathbf{r}(t)$ в предположении ее k-кратной непрерывной дифференцируемости, формулу Тейлора. Она, конечно, состоит из формул Тейлора для координатных (скалярных) функций, но ее можно записать и в векторной форме:

$$\mathbf{r}(t+h) = \mathbf{r}(t) + \dot{\mathbf{r}}(t)h + \frac{1}{2!}\ddot{\mathbf{r}}(t)h^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\mathbf{r}^{(n-1)}(t)h^{n-1} + R_n,$$

где остаточный член нельзя, вообще говоря, написать в стандартной форме $R_n = \frac{\mathbf{r}^{(n)}(t')}{n!}h^n$, т.к. промежуточное значение аргумента t различно для производных разных координат. Поэтому остаточный член надо взять либо в виде суммы остаточных членов для координатных функций, либо в форме $R_n = (\frac{\mathbf{r}^{(n)}(t)}{n!} + \boldsymbol{\alpha})h^n$. Здесь $\boldsymbol{\alpha}$ – вектор, стремящийся к нулю вместе с h.

Особое значение имеет многочлен Тейлора первой степени, состоящий из свободного члена ($\mathbf{r}(t)$) и дифференциала $d\mathbf{r}$. Это *линеаризация* – единственное (если существует) линейное отображение, отличающееся от $\mathbf{r}(t+h)$ на величину бесконечно малую более высокого порядка, чем h.

4. **Интеграл от векторной функции**

Интеграл от векторной функции, неопределенный и определенный, можно ввести покоординатно. Разумеется, оказывается, что операция неопределенного интегрирования обратна дифференцированию:

$$\frac{\partial \int \mathbf{r}(t)\, dt}{\partial t} = \mathbf{r}(t), \quad \int \frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial t}\, dt = \mathbf{r}(t) + \mathbf{const},$$

для определенного интеграла справедлива формула Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_a^b \frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial t}\; dt = \mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a),$$

и выполнены свойства линейности и обычные свойства интегралов.

5. **Векторные дифференциальные уравнения**

Система из k векторных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка r это k соотношений между некоторым числом m векторных функций от скалярного аргумента t, их производными по

t до порядка r и независимым переменным t. Мы предполагаем, что значения векторных функций принадлежат одному и тому же аффинному пространству размерности n.

Мы встретимся только с линейными системами в нормальной форме, в которой старшие производные выражаются линейно через младшие и сами неизвестные функции. Такая система распадается на n тождественных скалярных систем (по одной для каждой координаты), которые отличаются только начальными данными.

Мы можем использовать стандартную теорию обыкновенных дифференциальных уравнений, к которой в первую очередь относится теорема существования и единственности, теоремы о зависимости решения от начальных данных и от параметров и свойства линейных систем.

Позже (в главе 7) мы существенно углубим нашу точку зрения на связь векторных функций с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений.

6. **Векторная функция с постоянной длиной вектора**

Мы уже отметили, что производная постоянной векторной функции равна нулю. Пусть теперь постоянна длина, но направление может изменяться. (Начало, как уже сказано, мы считаем постоянно совпадающим с O.)

Лемма 1. Если длина вектора $\mathbf{r}(t)$ постоянна, то он ортогонален своей производной: $(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) = 0$.

Доказательство. Дифференцируя $(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t))$, мы получим (в силу симметричности скалярного произведения и правила его дифференцирования), $2(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) = 0$, т.е. ортогональность при каждом t значения векторной функции и ее производной.

Обратно, если производная при всех значениях t ортогональна вектору, то его длина l постоянна: $((l\boldsymbol{\tau})^{\cdot}, (l\boldsymbol{\tau})) = \dot{l}l(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) + l^2(\dot{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\tau}) = 0$. Т.к. $(\dot{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\tau}) = 0$ и $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) = 1$,, то либо $\dot{l} = 0$, либо $l = 0$, т.е. $l = \text{const}$.■

Конец вектора постоянной длины лежит все время на одной и той же сфере с центром в O, сам он служит радиус-вектором этой сферы. Производная ортогональна радиусу и, значит, является вектором касательным к сфере в обычном школьном смысле.

7. **Векторная функция, не обращающаяся в нуль, с постоянным направлением вектора**

Лемма 2. Векторная функция, не обращающаяся в нуль, сохраняет направление (конец вектора все время лежит на одной и той же прямой, проходящей через O), если и только если она коллинеарна своей производной: $\mathbf{r}(t) = a(t)\dot{\mathbf{r}}(t)$ для скалярной функции $a(t)$.

Доказательство. Пусть сохраняется направление. Представим функцию $\mathbf{r}(t)$ в виде $l(t)\boldsymbol{\tau}$, где l – длина, а $\boldsymbol{\tau}$ – орт. Тогда $\boldsymbol{\tau}$ постоянен, т.к. у него постоянны и направление и длина. В таком случае по правилу дифференцирования произведения получаем: $\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{l}(t)\boldsymbol{\tau}$, т.е. производная имеет тот же постоянный орт, что и сама функция. Значит, ее направление постоянно и совпадает с направлением $\mathbf{r}(t)$ и можно принять $a(t) = \frac{\dot{l}(t)}{l(t)}$. (Здесь условие необращения в нуль не имеет значения.)

Обратно, пусть $\dot{\mathbf{r}}(t) = a(t)\mathbf{r}(t) = a(t)r(t)\boldsymbol{\tau}(t)$, где $a(t)$ – скалярная функция, а r – длина $\mathbf{r}$. Имеем:

$$ar\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{r}}(t) = (r\boldsymbol{\tau})^{\cdot} = \dot{r}\boldsymbol{\tau} + r\dot{\boldsymbol{\tau}}.$$

Умножим это равенство на $\dot{\boldsymbol{\tau}}$. Т.к. производная орта ему ортогональна, в силу леммы 1, получим ($\mathbf{r}(t) \neq 0$), что $\dot{\boldsymbol{\tau}}^2 = 0$, т.е. $\dot{\boldsymbol{\tau}} = 0$: орт данной векторной функции постоянен и, значит, постоянно ее направление.

(Если $\mathbf{r}(t)$ обращается в нуль, то после прохождения нулевого значения вектор может изменить направление.) ■

Наконец, рассмотрим более общий случай вектора, остающегося все время параллельным некоторой плоскости.

8. **Векторная функция с вектором параллельным неизменной плоскости**

Лемма 3. Если вектор $\mathbf{r}(t)$ и его первые $k-1$ производные линейно зависимы для некоторого интервала переменной t, а k-ая производная линейно выражается черз них, то вектор остается параллельным постоянной плоскости P размерности k. (Разумеется, если, обратно, вектор все время лежит в некоторой плоскости, то, конечно, там же лежат и все его производные.)

Доказательство. Рассуждение проведем индукцией по размерности n пространства.

Допустим, что k векторов $\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), \dots, \mathbf{r}^{(k-1)}$ линейно независимы в окрестности некоторого значения t_0 параметра, а k-ая производная $\mathbf{r}^{(k)}$ линейно через них выражается.

Если $k < n-1$, то дополним k-репер до $(n-1)$-репера постоянными векторами $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{(n-1)-k}$. Пусть n – единичный вектор ортогональный $(n-1)$-плоскости этого репера. Тогда также $(\mathbf{n}, \mathbf{r}^{(k)}) = 0$ и из $(\mathbf{n}, \mathbf{r}^{(i)}) = 0, 0 \le i \le k$, следует: $0 = (\mathbf{n}, \mathbf{r}^{(i)})^{\cdot} = (\dot{\mathbf{n}}, \mathbf{r}^{(i)})$ при $0 \le i < k$ и аналогично $(\dot{\mathbf{n}}, \mathbf{e}_j) = 0$.

Значит, производная $\dot{\mathbf{n}}$ также ортогональна для всех t плоскости построенного $(n-1)$-репера. Следовательно, $\dot{\mathbf{n}}$ коллинеарна $\mathbf{n}$. В силу предыдущего пункта, вектор $\mathbf{n}$ постоянен. Значит, постоянна и плоскость.

Если $k = n-1$, утверждение доказано. Если $k < n-1$, мы проделали шаг индукции, основание которой дается предыдущим пунктом 7. ■

С помощью дифференциальных уравнений доказательство можно провести проще. Действительно, выразив k-ую производную линейно через предыдущие и саму функцию, мы получим векторное линейное дифференциальное уравнение k-ого порядка с переменными коэффициентами. Мы имеем одно и то же уравнение для каждой координаты. Эти уравнения будут иметь одну и ту же фундаментальную (скалярную) систему решений и будут различаться только начальными значениями. Поэтому решение нашего уравнения в общем виде записывается как линейная комбинация k постоянных векторов (начальные значения) со скалярными функциями (решения) в качестве коэффициентов.

Физическая интерпретация. Движение материальной точки под действием центральной силы (планеты вокруг Солнца) происходит в постоянной плоскости, т.к. по закону Ньютона в этом случае ускорение пропорционально в каждый момент радиус-вектору.

(Можно также заметить, что $[\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}]^{\cdot} = [\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}] + [\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{r}}] = [\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}] + c[\mathbf{r}, \mathbf{r}] = 0 + 0$.)

9. **Кривые, дифференцируемые кривые и гладкие кривые**

До сих пор нашей темой были векторные функции, т.е. параметризации кривых. Далее они отойдут на второй план, приняв роль средства изучения кривых как подмножеств $\mathbb{R}^n$. Но мы будем иметь в основном дело с дифференцируемыми кривыми, служащими годографами дифференцируемых векторных функций, т.е. допускающими дифференцируемые параметризации.

К этому нужно сделать два добавления. Во-первых, поскольку нас интересует в первую очередь кривая, а не ее параметризация, мы будем рассматривать различные параметризации одной и той же кривой, выбирая ту, которая наиболее удобна для данной задачи. Два особых случая можно отметить уже теперь: если кривая может быть представлена как график, т.е. ее проекция на какую-нибудь ось однозначна и производная по этой переменной не нулевая, то в качестве параметра часто бывает удобно взять именно эту проекцию, т.е. координату вдоль этой оси. Другой важный случай – параметризация посредством длины дуги. Мы рассмотрим его подробно дальше.

Во-вторых, то, что параметризации предполагаются дифференцируемыми, не устраняет особенностей разного рода: самопересечений, изломов и проч. Даже предположение непрерывной дифференцируемости не устраняет появления угловых точек (в которых производная нулевая). Вообще говоря, мы не будем избегать появления особых точек и даже посвятим немного времени их изучению. Но основным случаем для нас будет *простая гладкая дуга.*

Простая гладкая дуга. Под этим понимается, что кривая обладает *регулярной параметризацией*, т.е. гладкой параметризацией интервалом числовой прямой, для которой при каждом значении параметра производная хотя бы одной из координат отлична от нуля и параметризация взаимнооднозначна.

Мы знаем, что в этом случае в окрестности каждой точки кривая выглядит особенно просто: при надлежащем выборе локальных координат в окрестности этой точки в $\mathbb{R}^n$ пересечение кривой с этой окрестностью становится интервалом прямой, а сама параметризация – линейной. Кроме того, предполагается, что *простая дуга* не имеет самопересечений. Таким образом, простая дуга это одномерное гладкое подмногообразие.

Гладкой кривой назовем кривую, которая имеет такую регулярную параметризацию, что в окрестности каждого значения параметра она является простой дугой. (Она может иметь самопересечения, но не имеет их в малой окрестности каждого значения параметра.) Таким образом, гладкая кривая это – погруженное гладкое одномерное многообразие.

Обратим внимание на то, что мы пользуемся термином "гладкая" не вполне законно: гладкая дуга – дуга, имеющая *регулярную* параметризацию, а не только гладкую. Гладкую параметризацию любого класса гладкости может иметь и кривая с углами.

Контрольный вопрос. Построить C^1-параметризацию границы квадрата.

Преобразование параметризаций гладкой кривой.

Предложение. Если имеются две регулярные параметризации гладкой кривой в окрестности некоторой ее точки, то два параметра монотонно и дифференцируемо зависят друг от друга. (Т.е. преобразование одного параметра в другой задается диффеоморфизмом соответствующих интервалов прямой.)

В самом деле, в главе 2 мы видели, что регулярное отображение $\mathbf{r} : (a,\, b) \to \mathbb{R}^n$, параметризующую кривую ($t \in (a,b)$), может быть продолжено до диффеоморфизма $\Phi : U \approx V \subset \mathbb{R}^n$ некоторой области $U \subset \mathbb{R}^n$, по крайней мере в окрестности данного значения параметра t. Если Φ' аналогичный диффеоморфизм для окрестности соответствующего значения t' другого параметра, то диффеоморфизм $\Phi'\Phi^{-1}$ переведет диффеоморфно первый параметр во второй. (Согласно Лемме п.2 главы 2, диффеоморфизм области $\mathbb{R}^n$, переводящий точки плоскости P_1 в точки плоскости P_2 той же размерности, определяет диффеоморфизм области плоскости P_1 на область в P_2.) $\blacksquare$

10. **Касательная прямая и вектор скорости параметризованной кривой**

Итак, мы рассматриваем кривые с непрерывно дифференцируемыми параметризациями. Из математического анализа хорошо известно понятие касательной прямой в данной точке кривой как предельного положения секущей. Нам, однако, потребуется аналитическое определение, приспособленное для гладких кривых (имеющих регулярную параметризацию).

Определение. Касательная к гладкой кривой в точке x_0 – это образ линеаризации (регулярной) параметризации $\mathbf{r}(t)$. (Более педантично: образ линейного отображения полученного линеаризацией).

Пусть $x_0 = \mathbf{r}(t_0)$. Напомним, что линеаризация это сумма $\mathbf{r}(t_0) + d\mathbf{r}(t)$, где дифференциал $d\mathbf{r}(t)$ – линейное отображение, определенное в точке t_0 с помощью матрицы Якоби (в нашем случае – столбца производных n координат $\frac{dx^i(t)}{dt}|_{t_0} = \dot{r}^i(t_0)$).

Поскольку в нашем случае хотя бы одна из этих производных отлична от нуля, образом линеаризации будет прямая $\mathbf{r}^i(t_0) + \dot{\mathbf{r}}^i(t_0)t$, где t – параметр вдоль прямой.

Направляющим вектором касательной, как и всякой прямой, называется любой лежащий на ней вектор, отличный от нулевого. В частности, за координаты направляющего вектора можно взять координаты матрицы (столбца) Якоби ($\frac{dx^i}{dt}$).

Предложение. Касательная не зависит от параметризации.

При переходе к другой регулярной параметризации $\mathbf{r}(t')$ все производные $\frac{\partial x^i}{\partial t}$ умножатся на одно и то же число – производную $\frac{\partial t}{\partial t'}$. Значит, новый направляющий вектор коллинеарен прежнему. $\blacksquare$

Предложение. В случае гладких кривых это определение касательной эквивалентно определению через предельное положение секущей.

Доказательство следует из формулы конечных приращений:

$$\triangle\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}\triangle t + o(\triangle t). \ \blacksquare$$

Касательная в особой точке.

Если все производные обращаются в нуль, определение с помощью дифференциала не применимо.

Упражнение. В этом случае допустим, что l – первое целое число такое, что все производные меньшего, чем l, порядка нулевые, но имеется производная порядка l отличная от нуля. Тогда в качестве направляющего вектора касательной служит вектор, координаты которого равны l-ым производным координат кривой в данной точке.

(Если же все производные равны нулю, то аналитический подход не срабатывает и приходится исследовать поведение кривой в этой точке геометрически.)

Касательные векторы и векторы скорости. Любой вектор, лежащий на касательной к кривой, с началом в точке касания называется *касательным вектором* к кривой в этой точке.

Каждая дифференцируемая параметризация выделяет касательный вектор, который называется *вектором скорости этой параметризации*. Для регулярной параметризации это $\dot{\mathbf{r}}$. Любой отличный от нуля касательный вектор служит вектором скорости для некоторой регулярной параметризации. Для этого нужно заменить данный параметр t на параметр ct для подходящей константы $\neq 0$.

(Нулевой вектор также можно представить как вектор скорости некоторой параметризации, т.е. взаимно однозначного и дифференцируемого отображения интервала прямой на дугу кривой. Скажем,

$y = x^3$ параметризует ось ординат и в нуле имеет нулевой вектор скорости. Но мы, как правило, будем рассматривать регулярные параметризации, с векторами скорости всюду отличными от нуля.)

Мы назвали направляющий вектор $\dot{\mathbf{r}}(t)$ касательной, отвечающий данной параметризации $\mathbf{r}(t)$ вектором *скорости*, исходя из естественной аналогии: область изменения параметра можно принять за ось времени, расстояния в $\mathbb{R}^n$ определены стандартной "пифагоровой" формулой $\Sigma(x^i)^2$. В таком случае длина вектора $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ равна пределу отношения расстояния смещенной точки $\mathbf{r}(t)$ от точки $\mathbf{r}(t_0)$ к "затраченному времени" $t - t_0$, т.е. скорости.

11. **Длина кривой**

Вписанные ломаные. Определение длины дуги кривой давалось в курсе математического анализа и мы здесь лишь напомним его. На кривых, которые мы допускаем к рассмотрению, точки упорядочены (например, с помощью любой однозначной параметризации, с точностью обращения порядка). Кроме того, можно считать, что дуга *связна*, т.е. параметризуется одним интервалом прямой (a, b).

Поэтому любое конечное множество точек дуги определяет *вписанную ломаную*, состоящую из отрезков, соединяющих эти точки последовательно. Для конечной ломаной определена длина, равная сумме длин ее звеньев (а длина звена определена с помощью стандартной метрики в $\mathbb{R}^n$).

Мы можем рассмотреть предел длин вписанных ломаных *по направленности* конечных подмножеств при условии, что наибольшая длина звена стремится к нулю (а концы ломаной совпадают с концами дуги).

Предел по направленности это обобщение понятия предела последовательности. Предполагается, что дано множество M, частично упорядоченное так, что за любыми двумя его элементами имеется общий третий, т.е. M есть *направленное* множество. Например, таково множество окрестностей точки или любого множества. Другой пример дает множество дополнений к компактным подмножествам в $\mathbb{R}^n$, которые можно считать "окрестностями бесконечности".

Если на M задана, скажем, числовая функция f (или отображение $M \to \mathbb{R}^n$), то *пределом* f называется такое число (или точка) A, что для любой окрестности $O(A)$ найдется элемент $m \in M$ такой, что значения f для всех элементов, идущих за m, лежат в O(A). (Единственность предела следует из определения направленности.)

Предел не изменится, если мы вместо M возьмем подмножество всех его элементов, идущих за любым данным элементом, или, вообще, любое *конфинальное* подмножество N, т.е. такое, что за каждым элементом из M идет какой-либо элемент из N. Это может быть и *последовательность*. Например, конфинальную последовательность можно найти, если M счетно.

Направленность конечных подмножеств. В нашем случае частично упорядоченным множеством является совокупность конечных множеств точек дуги. Все конечные подмножества образуют направленное множество: одно подмножество A идет за другим B, если $A \supset B$.

Пусть дана дуга кривой в $\mathbb{R}^n$, заданная какой-нибудь параметризацией $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$. Рассмотрим направленное множество M ее конечных подмножеств μ и функцию $l : M \to \mathbb{R}_+$ на нем, заданную длинами соответствующих ломаных $l(\mu)$. (Порядок вершин ломаной определен параметризацией и при изменении параметризации может замениться только на обратный, отчего длины ломаных, конечно. не изменятся.)

Определение. *Длина кривой* $\mathbf{r}(t)$ есть предел длин вписанных конечнозвенных ломаных по направленности конечных подмножеств этой кривой.

Если этот предел существует, кривая называется *спрямляемой.* Более общим образом, кривая, параметризованная некомпактным интервалом (например, всей числовой прямой), спрямляема, если при данной параметризации спрямляема каждая ее конечная (т.е. параметризованая замкнутым интервалом) дуга.

Упражнение. Этот предел, если он существует, можно вычислить по любой *последовательности* вписанных ломаных, удовлетворяющей следующему требованию: для всякого $\varepsilon > 0$ только конечное число членов последовательности имеет звенья длиной больше $\varepsilon > 0$. (Такая последовательность, так сказать, почти конфинальна: для любой вписанной ломаной можно найти следующую за ней ломаную, длина которой как угодно мало отличается от длины некоторой ломаной из этой последовательности).

Предложение. Если кривая имеет регулярную параметризацию, она спрямляема.

Доказательство. Длина звена ломаной при данной параметризации $\mathbf{r}(t)$ кривой равна длине вектора $\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)$. Считая параметризацию непрерывно дифференцируемой, мы можем представить этот вектор по формуле конечных приращений как $\dot{\mathbf{r}}(t_i)\Delta t + \boldsymbol{\alpha}_i \Delta t$. Здесь $\boldsymbol{\alpha}_i$ – вектор, длина которого стремится к нулю вместе с Δt. Тогда, конечно, и $|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)| = |\dot{\mathbf{r}}(t_i)|\Delta t + \beta_i \Delta t$, где β_i – число, стремящееся к нулю вместе с Δt.

Числа β_i, в силу равномерной непрерывности $\dot{\mathbf{r}}(t_i)$, можно ограничить одним числом β для каждой ломаной так, что оно будет стремиться к нулю вместе с Δt.

(Точнее. Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти ломаную так, что для нее и для всех последующих ломаных все β_i можно взять меньше ε.)

В таком случае сумма длин ломаной оказывается представленной в форме интегральной суммы $\sum |\dot{\mathbf{r}}(t_i)|\Delta t$ для функции $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$, причем сумма дополнительных слагаемых оценивается как $\beta \sum \Delta t_i$, т.е. стремится к нулю. ($\sum \Delta t_i$ есть длина интервала параметризации.) Таким образом, длина параметризованной кривой выражается интегралом

$$\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\ dt. \qquad (+)$$

■

Мы показали, во-первых, что предел существует для кривой с регулярными параметризациями. Во-вторых, оказалось, что этот предел выражается с помощью интеграла от модуля производной векторной функции, которая задает параметризацию. Этот интеграл не зависит от выбора параметризации, т.к. он равен длине дуги, определяемой независимо от параметризации.

Другой подход к определению длины дуги. Чтобы не иметь дела с пределами по направленным множествам и вспоминать основы анализа, прямо *определяем* длину дуги интегральной формулой (+). В таком случае нужна проверка независимости:

Предложение. Длина дуги, определенная формулой (+), не зависит от параметризации.

Доказательство. В самом деле, пусть задана другая параметризация $\mathbf{w}(q)$ той же кривой. Считая, что обе параметризации взаимно однозначны, мы получаем диффеоморфное преобразование одной из них в другую: $t = \varphi(q),\ \mathbf{w}(q) = \mathbf{r}(\varphi(q))$. Тогда $\dot{\mathbf{w}}(q) = \dot{\mathbf{r}}|_{t=\varphi(q)}\dot{\varphi}(q)$ и в то же время $dt = \dot{\varphi}(q)\ dq$.

Поэтому (предполагая, что обе параметризации одинаково ориентируют кривую и, значит, $\dot{\varphi} > 0$):

$$\begin{aligned} s(\breve{ab}) &= \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\ dt = \\ = \int_{\varphi^{-1}a}^{\varphi^{-1}b} |\dot{\mathbf{r}}(t)|\dot{\varphi}(q)\ dq &= \int_{\varphi^{-1}a}^{\varphi^{-1}b} |\dot{\mathbf{w}}(q)|\ dq). \blacksquare \end{aligned}$$

Натуральный параметр. Из основной формулы (+) выводятся другие формулы, более удобные для частных случаев. Один из них – параметризация длиной – является теоретически наиболее важным.

Параметр на кривой называется *натуральным*, если разность значений его для двух точек равна по модулю длине дуги кривой между этими точками. (Здесь, очевидно, предполагается, что рассматривается связная кривая. Если кривая не связная, то нужно отдельно параметризовать каждую ее связную компоненту.)

Натуральный параметр обычно обозначается буквой s, как и длины дуг. Он определен с точностью до выбора направления и до добавления константы (определенной выбором начала отсчета на кривой).

Орты касательной и ориентация кривой. Производная длины дуги по параметру, как следует из формулы (+), есть $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$. В частности, если параметр натуральный, эта производная равна 1: *производная радиус-вектора по натуральному параметру есть орт в направлении касательной.*

Таких направлений два. Выбор одного из них для натуральной параметризации кривой называется *ориентацией* этой кривой.

Эквивалентность дуги и хорды. Равенство единице модуля производной радиус-вектора по натуральному параметру означает, что эквивалентны две бесконечно малые величины: длина хорды между двумя близкими точками и длина стянутой ею дуги при бесконечном сближении ее концов.

Напомним, что для справедливости этого общего факта (известного для окружности еще из школы) требуется, чтобы кривая была гладкой, т.е. чтобы она имела регулярную параметризацию.

Формула длины дуги. Из равенства модуля производной по натуральному параметру единице вытекает такая формула для длины дуги по натуральному параметру:

$$s(\breve{ab}) = \int\limits_{s(a)}^{s(b)} ds.$$

Обозначение. В обозначении производных по натуральному параметру точки заменяют штрихами.

Другие формулы для длины дуги. Выражая по теореме Пифагора приращение радиус-вектора через координаты, получаем, переходя к пределу,

$$s = \int\limits_a^b \sqrt{\sum (\dot{x}_i(t))^2}\, dt.$$

Формально внося dt под знак радикала, получаем запись интеграла не каноническую, но удобную и часто употребляемую:

$$s = \int\limits_A^B \sqrt{\sum (dx_i)^2}. \qquad ++$$

(В этой записи нет параметра, а только координаты точек в $\mathbb{R}^n$. A и B – концевые точки дуги.) Если в $\mathbb{R}^n$ используются криволинейные координаты, то удобно начать с формулы $(++)$ и выразить дифференциалы dx_i через дифференциалы криволинейных координат, а затем перейти к параметру на кривой. Например:

Упражнение. *Длина дуги в полярных координатах в* $\mathbb{R}^2$ имеет выражение

$$\int\limits_a^b \sqrt{\rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2}.$$

Если за параметр принят аргумент φ, то получится выражение

$$\int\limits_{\varphi(A)}^{\varphi(B)} \sqrt{\rho^2 + (\frac{\partial\rho}{\partial\varphi})^2}\, d\varphi.$$

Подчеркнем в заключение, хотя это может показаться тривиальным, что длина кривой определяется на основе уже существующей метрики в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^n$. Для определения длины кривой в гладком многообразии нам нужно будет сначала определить в нем локальное измерение расстояний, что будет сделано в главе 11.

12. **Соприкосновение кривой с поверхностями**

Рассмотрим обобщение способа определения касательной прямой как предела секущей. В этом определении у нас даны с одной стороны кривая в $\mathbb{R}^n$, будем считать, что она дана с параметризацией $\mathbf{r}(t)$ в окрестности точки $x_0 = \mathbf{r}(t_0)$, а с другой семейство всех прямых в этом же пространстве. Прямая определена, если указаны координаты ее направляющего вектора, т.е. n чисел в данной системе координат.

Задача состоит тут в том, чтобы выбрать элемент этого семейства, наиболее тесно "прилегающий" к кривой в данной точке. Эта задача была решена с помощью набора чисел, равных первым производным от координат в данной точке кривой.

В более общем случае нам дано семейство подмногообразий, определяемых конечным числом параметров, и нужно выбрать элемент этого семейства, указав набор параметров так, чтобы отвечающее ему многообразие оказалось наиболее тесно прилегающим к кривой в данной точке.

Например, такое семейство подмногообразий образуют сферы. Оно имеет $n+1$ параметр (а именно: n координат центра и радиус).

Если такой элемент семейства существует и единственен, то он называется соприкасающимся. Однако нужно уточнить, что значит "наиболее тесно прилегающий". Мы рассматриваем здесь только случай подмногообразий коразмерности 1, т.е. локально задаваемых одним уравнением.

Для определенности будем считать, что данное семейство, зависящее от k параметров, представлено неявным образом в виде одного уравнения

$$F(x^i, c_j) = 0, \qquad (+)$$

где первые n переменных – координаты точки в $\mathbb{R}^n$, а остальные k – параметры семейства.

Если фиксировать k точек, то получится система из k уравнений относительно k переменных c_j для поиска подмногообразия, проходящего через все эти точки. Эта система, вообще говоря, нелинейна, но можно ожидать, что она имеет решение, возможно, даже однозначное.

В качестве *соприкасающегося* члена семейства берут предельное положение поверхности семейства, проходящей через k точек кривой при одновременном стремлении всех этих точек к данной точке x_0.

Конечно, существование и единственность такой поверхности, вообще говоря, не гарантируется. Но если соприкасающаяся поверхность найдена, говорится, что соприкосновение имеет порядок $k-1$, по причине, которая станет понятной чуть позже.

Нахождение соприкасающейся поверхности. Для поверхности, отвечающей определенному набору параметров c_j, левая часть уравнения $(+)$ задает функцию от параметра t на кривой $x^i(t)$:

$$f(t, c_j) = F(x^i(t), c_j).$$

В точках пересечения кривой с поверхностью эта функция равна нулю. Если кривая пересекает эту поверхность в точках, отвечающих значениям параметра t_1 и t_2, то по теореме Ролля имеется промежуточное значение параметра, в которой обращается в нуль первая производная этой функции. Если имеется k точек пересечения, то имеется $k-1$ точка, где обращается в нуль первая производная, значит, $k-2$ точки, где обращается в нуль вторая производная и, в конце концов, имеется точка в которой обращается в нуль производная порядка $k-1$.

Устремляя теперь k значений параметра t, для которых происходит пересечение переменной поверхности семейства с кривой к начальному значению t_0, мы одновременно получим стремление к t_0 и тех значений, для которых обращаются в нуль все упомянутые производные функции $f(t)$. Тогда, в силу непрерывности этих производных в точке t_0, мы получим для этой точки систему из k уравнений:

$$\begin{aligned} f(t_0, c_j^0) &= 0 \\ \dot f(t_0, c_j^0) &= 0 \\ \dots\dots\dots &\ \dots\dots \\ f^{(k-1)}(t_0, c_j^0) &= 0. \end{aligned}$$

Из этой системы, в которой число уравнений k равно числу переменных c_j, вообще говоря, можно определить нужный набор параметров, т.е. требуемую поверхность (назовем ее предельной).

Порядок соприкосновения. Допустим, что в точке $\mathbf{r}(t_0)$ предельная поверхность не имеет особенности. Тогда диффеоморфизмом малой окрестности этой точки пересечение этой окрестности с поверхностьюв можно перевести в координатную плоскость, причем значение функции $f(t, c_j^0) = F(\mathbf{r}(t), c_j^0))$ станет n-ой координатой. Тогда функция $f(t, c_j^0)$ измеряет отклонение точек кривой от этой плоскости. Но т.к. первые $k-1$ производных в точке $\mathbf{r}(t_0)$ нулевые, ее разложение Тейлора начинается с k-ого члена и мы вправе сказать, что соприкосновение имеет порядок $k-1$.

Для полной аккуратности следует показать, что порядок отклонения точки кривой от поверхности при стремлении этой точки к точке соприкосновения не меняется при диффеоморфизме, если он имеет производные порядка на единицу больше, чем порядок соприкосновения. Мы опустим здесь эту проверку.

Мы рассмотрели здесь соприкосновение кривой с поверхностями размерности $n-1$. Аналогичным образом можно рассмотреть и соприкосновение кривой с семейством многообразий любой размерности (только вместо одного уравнения придется рассмотреть систему уравнений, зависящую от параметров). Мы не будем здесь рассматривать этот общий случай.

13. **Соприкосновение кривой с плоскостями**

Это случай, который потребуется в дальнейшем. Семейство плоскостей в n-мерном аффинном пространстве является n-параметрическим. (См. конец п.2 главы 2.) Значит, можно искать плоскость, соприкосновение которой с кривой имеет порядок $n-1$. Такая плоскость (существующая по крайней мере в неособых точках) называется соприкасающейся.

В векторной форме уравнение плоскости есть $(\mathbf{N}, \boldsymbol{\rho}) + D = 0$, где $\boldsymbol{\rho}$ – радиус-вектор точки на плоскости, $\mathbf{N}$ – нормальный вектор к плоскости, а D – свободный член. Согласно общему правилу для соприкасающейся плоскости к кривой $\mathbf{r}(t)$ в точке x_0, т.е. предельному положению плоскости, проходящей через n близких к x_0 точек, имеем систему уравнений для определения коэффициентов плоскости:

$$\begin{aligned}
((\mathbf{N}, \mathbf{r}(t)) + D)|_{t=t_0} &= 0 \\
\frac{d}{dt}((\mathbf{N}, \mathbf{r}(t)) + D)|_{t=t_0} &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}((\mathbf{N}, \mathbf{r}(t)) + D)|_{t=t_0} &= 0.
\end{aligned}$$

После дифференцирования и подстановки имеем:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{N}, \mathbf{r}_0) + D &= 0 \\
(\mathbf{N}, \dot{r}_0) &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
(\mathbf{N}, \mathbf{r}_0^{(n-1)}) &= 0.
\end{aligned}$$

Первое уравнение выражает тот факт, что точка соприкосновения лежит на соприкасающейся плоскости. Остальные означают, что все производные от параметризации кривой до порядка $n-1$ включительно лежат в этой плоскости (эти векторы откладываются от точки соприкосновения).

Если первое уравнение заменить уравнением $(\mathbf{N}, \boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0) = 0$, где $\boldsymbol{\rho}$ – переменный радиус-вектор точки на плоскости, то мы получим n векторов, ортогональных одному и тому же вектору N, т.е. лежащих в одной $n-1$-мерной плоскости и следовательно, линейно зависимых. Значит, определитель, составленный из их координат, равен нулю. Это – уравнение соприкасающейся плоскости.

Оно определяет единственную плоскость, если сами производные линейно независимы в точке $\mathbf{r}_0$. В случае, когда плоскости одномерны, т.е. прямые, мы возвращаемся к определению касательной как предела секущей.

Имеются и другие плоскости, связанные с кривой в каждой точке (во всяком случае – неособой). Одна из них – *нормальная* – ортогональна касательной прямой. Это, так сказать, максимально не соприкасающаяся плоскость. Позже мы увидим, что в каждой неособой точке с кривой связан, вообще говоря, однозначно, репер и с ним его координатные плоскости и оси. В частности, касательная прямая, соприкасающаяся и нормальная плоскости являются координатными в этом репере.

14. **Соприкасающаяся окружность плоской кривой и радиус кривизны**

Соприкасающаяся окружность. Окружности на плоскости образуют трехмерное семейство и по общей теории соприкосновения можно искать окружность с соприкосновением второго порядка в данной точке кривой. Такая окружность называется *соприкасающейся*, она определяется как предельное положение окружности, три точки пересечения которой с кривой стремятся к данной точке.

Уравнение соприкасающейся окружности. Пусть дана кривая $\mathbf{r}(s)$, s – натуральный параметр, и на ней точка $A_0 = \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s_0)$. Единичный касательный вектор кривой обозначим $\boldsymbol{\tau}$. Его производная ему ортогональна, т.е. идет по нормали к кривой. Длину ее обозначим k, а орт нормали $\boldsymbol{\nu}$. Тогда $\boldsymbol{\tau}' = k\boldsymbol{\nu}$. Смысл коэффициента k выясним позже. Направление нормали выберем так, чтобы k оказался неотрицательным.

Пусть окружность с уравнением $(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_c, \boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_c) = R^2$ пересекает кривую, кроме точки A_0, еще в двух "бесконечно близких" точках (т.е. является соприкасающейся). Нужно найти радиус-вектор центра ρ_c и радиус окружности R. Система уравнений для нахождения соприкасающейся окружности такая:

$$\begin{gathered}
(\mathbf{r}(s_0) - \boldsymbol{\rho}_c, \mathbf{r}(s_0) - \boldsymbol{\rho}_c) = R^2 \\
2((\mathbf{r}(s_0) - \boldsymbol{\rho}_c), \tau) = 0 \\
2(\boldsymbol{\tau}(s_0), \boldsymbol{\tau}(s_0)) + 2((\mathbf{r}(s_0) - \boldsymbol{\rho}_c), k\boldsymbol{\nu}(s_0)) = 0.
\end{gathered}$$

Первое уравнение выражает, помимо того, что окружность проходит через данную точку кривой, тот факт, что расстояние $|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}_c|$ до этой точки от центра равно R – радиусу окружности (что, конечно, тривиально верно).

Согласно второму уравнению, вектор $\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}_c$ ортогонален касательной и, значит, лежит на нормали.

В таком случае третье уравнение $1+k((\mathbf{r}(s_0)-\boldsymbol{\rho}_c),\boldsymbol{\nu}(s_0))=0$, гласящее, что проекция этого вектора на нормаль есть $-\frac{1}{k}$, утверждает, на самом деле, что длина этого вектора равна $\frac{1}{k}$, т.е. что $R=\frac{1}{k}$. Коэффициент k оказался обратным радиусу соприкасающейся окружности.

(Знак минус в выражении для проекции означает, что вектор $\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}_c$ направлен против орта нормали $\boldsymbol{\nu}$, т.е. что центр окружности лежит в направлении, указываемом этим ортом.)

Центр и радиус кривизны. Центр соприкасающейся окружности называется *центром кривизны*, ее радиус – *радиусом кривизны* данной кривой в точке соприкосновения. Обратная величина называется *кривизной* кривой в данной точке. Ее вычисление – в главе 9, п.4. (Его, конечно, нетрудно провести и с помощью этой системы уравнений.)

Глава 6. **Касательные векторы и касательная плоскость**

1. **Касательная плоскость к подмногообразию в $\mathbb{R}^n$**

Мы видели, что касательную прямую к гладкой кривой можно определить как образ линеаризации любой регулярной параметризации этой кривой: суммы первых двух членов многочлена Тейлора – начального значения и дифференциала.

Обобщим это определение и определим *касательную плоскость* к подмногообразию $M\subset\mathbb{R}^n$ в точке $\mathbf{x}$ как образ в этой точке линеаризации любой гладкой параметризации окрестности $\mathbf{x}$ в M. Размерность этой плоскости равна k, в силу невырожденности параметризации. Более точно:

Определение. Пусть $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ – параметризация окрестности U точки $\mathbf{x}_0$ в M, $\mathbf{t}\in W$, W – окрестность точки $\mathbf{t}_0\in\mathbb{R}^k$, $\mathbf{r}(W)=U$, $\mathbf{r}(\mathbf{t}_0)=\mathbf{x}_0$, $d\mathbf{r}=J(d\mathbf{t})$ – дифференциал $\mathbf{r}$ в $\mathbf{x}_0$, т.е. линейное отображение $\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$, определенное матрицей Якоби J отображения $\mathbf{r}$ в точке $\mathbf{t}_0$.

Тогда *касательная плоскость* $\tau_{\mathbf{x}_0}M$ *в точке* $\mathbf{x}_0$ *к подмногообразию* M есть образ дифференциала $d\mathbf{r}$, смещенный параллельно в точку x_0, т.е. $\mathbf{r}(\mathbf{t}_0)+J(\mathbf{t}-\mathbf{t}_0)$.

В силу этого определения касательная плоскость $\tau_{\mathbf{x}_0}M$ есть линейное подпространство пространства $V_{\mathbf{x}_0}$. Но мы, конечно, "оставляем за собой право" называть касательной плоскостью и соответствующее аффинное пространство, т.е. просто плоскость в аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$. (Правильнее различать касательное векторное пространство и касательную аффинную плоскость. Так часто и поступают.)

Утверждение. Касательная плоскость не зависит от параметризации: ее можно охарактеризовать таким свойством: для произвольной точки p плоскости, стремящейся к x, имеется точка многообразия, расстояние до которой от p есть величина бесконечно малая более высокого порядка, чем расстояние от p до x.

Доказательство. Линеаризация параметризации взаимно однозначно отображает $\mathbb{R}^k$ на $\tau_{\mathbf{x}_0}M$, а параметризация также взаимно однозначно отображает окрестность $\mathbf{t}_0$ в $\mathbb{R}^k$ на окрестность x в M.

Значит, сопоставляя точке $\mathbf{t}$ из этой окрестности с одной стороны точку $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ многообразия, а с другой точку $\mathbf{r}(\mathbf{t}_0)+J(\mathbf{t}-\mathbf{t}_0)\in\tau_{\mathbf{x}_0}M$ касательной плоскости, мы получим взаимнооднозначное соответствие точек окрестности x в M и в касательной плоскости. Расстояние между ними есть модуль остаточного члена формулы Тейлора и, следовательно, имеет более высокий порядок малости, чем расстояние от каждой из этих точек до x (поскольку матрица Якоби невырождена и эти расстояния имеют тот же порядок, что и $|\mathbf{t}-\mathbf{t}_0|$). ■

Упражнение. Докажите, что плоскость со свойством, приведенном в утверждении, единственна.

Определение. Векторы в $\tau_{\mathbf{x}_0}M$ с началом $\mathbf{x}$ называются *касательными векторами к M в* $\mathbf{x}$.

Упражнение. Двойственным образом касательная плоскость $\tau_A M^k$ определяется при неявном задании $F:U\to\mathbb{R}^{n-k}$ подмногообразия $F^{-1}(B)$, $B=F(A)$, U – окрестность A в $\mathbb{R}^n$, как ядро дифференциала F в точке A. Например, если $k=n-1$, касательные векторы образуют решения уравнения $F_{x^1}dx^1+\cdots+F_{x^n}dx^n=0$, его можно записать и как $F_{x^1}(x^1-x^1_0)+\cdots+F_{x^n}(x^n-x^n_0)=0$.

Покажите эквивалентность неявного и параметрического определений касательной плоскости. Как задается касательная плоскость для подмногообразия, заданного локально как график?

2. **Локальные координаты и координаты в касательной плоскости**

Реперы. Напомним, что *k-репером* называется упорядоченная система из k линейно независимых векторов с общим началом. n-Репер в $\mathbb{R}^n$ называется просто репером. В частности, *координатный репер* в точке $x \in \mathbb{R}^n$ это репер в x, составленный из единичных векторов, параллельных координатным осям и соответственно упорядоченных.

Пространства $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^n$ рассматриваются в канонических базисах. Обозначим через $\mathbf{e}_i$ – стандартный координатный репер в $\mathbb{R}^k$, через $\mathbf{f}_i$ – в $\mathbb{R}^n$. Мы так же будем обозначать и полученные из них параллельным сдвигом реперы в пространствах $V_{\mathbf{x}}$, т.е. реперы, "приложенные" в точках $\mathbf{x}$.

Координатный репер касательной плоскости. Пусть дана локальная карта $\mathbf{x} = \mathbf{r}(\mathbf{t})$ в окрестности U точки $\mathbf{r}(\mathbf{t}_0) = A \in M$. Возьмем в точке $\mathbf{t}_0 \in \mathbb{R}^k$ координатный репер. Дифференциал $\mathbf{r}$ (сохраняющий независимость векторов) переведет его в k-репер в $\tau_A M$, который мы будем считать координатным в этой плоскости, отвечающим данной карте.

Базисными векторами системы координат в касательной плоскости $\tau_A M$, отвечающей данной локальной параметризации $\mathbf{r}(\mathbf{t})$, служат столбцы ее матрицы Якоби: j-ой координатой i-ого вектора этого репера в $\mathbb{R}^n$ служит частная производная $\frac{\partial \mathbf{r}^j}{\partial \mathbf{t}^i}$.

(Это аналоги векторов скорости кривых. Они единичные относительно введенной координатной системы в касательной плоскости, но, конечно, могут иметь любую длину относительно метрики $\mathbb{R}^n$.)

Координатное преобразование в касательной плоскости. Пусть теперь в окрестности точки $A \in M$ даны две локальные параметризации (или локальные системы координат, или локальные карты) $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Матрицы Якоби дифференциалов $d\mathbf{r}_i$ (в канонических базисах) будем обозначать (J_i) или просто J_i. (В дальнейшем J будет иногда обозначать *якобиан*, т.е. определитель матрицы Якоби, если она квадратна, но это не должно повлечь путаницы.) Координаты точек в прообразах U в $\mathbb{R}^k$ при этих параметризациях, т.е. вводимые ими координаты, будем обозначать u^i и v^i, соответственно.

Пусть $v = \psi(u)$ – координатное преобразование, так что $\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{r}_2(\psi(u))$. Обозначим через G матрицу Якоби этого преобразования в точке $A = \mathbf{r}_1(u_0)$ (точнее в u_0.) Тогда $J_1 = J_2 G$.

Пусть $\mathbf{t}_1$ – вектор в $\mathbb{R}^k$, $\mathbf{s} = J_1(\mathbf{t}_1), \mathbf{t}_2 = G(\mathbf{t}_1)$. Тогда $J_2(\mathbf{t}_2) = \mathbf{s}$. Ясно, что координаты вектора $\mathbf{s}$ в репере $\mathbf{e}_i^1 = J_1(\mathbf{e}_i) = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u^i}$ те же, что координаты вектора $\mathbf{t}_1$ в репере $\mathbf{e}_i$, а координаты $\mathbf{s}$ в репере $\mathbf{e}_i^2 = J_2(\mathbf{e}_i) = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v^i}$ те же, что у $\mathbf{t}_2$ в репере $\mathbf{e}_i$. Но координаты $\mathbf{t}_2$ получаются из координат $\mathbf{t}_1$ умножением слева на матрицу Якоби G диффеоморфизма преобразования: $t_2^i = G_j^i(t_1^j)$. Значит, это же верно и для координат вектора $\mathbf{s}$ в двух координатных системах в $\tau_A M$.

В результате мы получаем, что координаты s_v^i касательного вектора $\mathbf{s}$ в новой системе координат получаются из старых координат s_u^i по закону

$$s_v^i = G_j^i s_u^j = \frac{\partial v^i}{\partial u^j} s_u^j. \qquad -$$

Контрагредиентные и когредиентные преобразования. В линейном пространстве $\tau_A M$ имеются два, связанных между собой, закона преобразования: преобразование координатных реперов

$$\mathbf{e}_i^1 = G_i^j \mathbf{e}_j^2 \qquad --$$

и преобразование (-) координат вектора. Оба закона выражаются через матрицу Якоби G замены. Но преобразование координатных векторов (- -) *контрагредиентно* преобразованию (-): в (-) *новые* координаты получаются из старых с помощью матрицы G, в (- -) *старые* векторы получаются из новых с помощью G^T – транспонированной матрицы G. Переход к транспонированной матрице согласован с суммированием по верхнему индексу матрицы.

В целом мы можем сказать, что в "кривом" многообразии действует такое же правило замены локальных координат, как и для нелинейных координат в аффинном пространстве.

Повторим еще раз, что *каждой локальной параметризации автоматически соответствует введение линейной координатной системы в каждой касательной плоскости в точках карты*; векторами базиса в плоскости $\tau_{\mathbf{x}} M$ служат образы канонических базисных векторов пространства параметров $\mathbb{R}^k$. При этом замена параметризации вызывает линейную замену координат в $\tau_{\mathbf{x}} M$. В указанных базисах она выражается с помощью матрицы Якоби диффеоморфизма замены.

3. **О понятии вектора**

Если многообразия с их локальными картами являются основным полем, в пределах которого будет проходить наше изучение дифференциальной геометрии, то главными, так сказать, действующими лицами этого изучения будут векторы.

Мы начали с представления о векторе как направленном отрезке в аффинном пространстве и пока не слишком удалились от этого представления. В частности, касательные векторы к подмногообразию в $\mathbb{R}^n$ – это просто стрелки, лежащие в касательной плоскости.

Однако в этом понятии соединяется несколько идей, играющих фундаментальную роль в анализе и в то же время существенно различных. Нашей следующей задачей теперь будет дать несколько эквивалентных определений понятию "вектор", в которых раскроется его различное содержание.

Исходное содержание этого понятия связано с аффинной структурой линейного пространства: один из возможных подходов заключается в определении вектора как сдвига или параллельного переноса $\mathbb{R}^n$. Но переход от $\mathbb{R}^n$ к многообразиям показывает ограниченность этой точки зрения: на "кривой" поверхности затруднительно рассматривать параллельный сдвиг. (На самом деле одна из главных задач второго тома и будет заключаться в том, чтобы выяснить, насколько оказывается возможным определение параллельного переноса для произвольного многообразия.)

Смысл определений векторов, которые мы сейчас приведем, заключается, в частности, в переходе от использования глобальной линейной структуры пространства к локальной точке зрения, связанной с локальными картами и поведением отображений в окрестности точки. Это позволит рассматривать касательные векторы для многообразий независимо от их расположения в аффинном пространстве.

4. **Вектор как тензор**

Рассмотрим сначала векторы в точках пространства $\mathbb{R}^n$, а потом перейдем к касательным векторам многообразий.

Векторы в линейной алгебре. Каждый вектор-стрелка в $\mathbb{R}^n$ с началом в A получает в каждом базисе в V_A упорядоченный набор из n чисел – его координат в этом репере, эти наборы изменяются при замене репера по известному правилу умножения на матрицу преобразования.

Введя в рассмотрение локальные нелинейные координаты, мы нашли, что это условие сохраняет свою силу, только в качестве матрицы преобразования нужно брать матрицу Якоби в точке A – матрицу частных производных нелинейного преобразования в этой точке.

В линейном случае матрица Якоби совпадает с матрицей линейного преобразования.

Таким образом мы приходим к такой точке зрения на вектор в точке: каждой локальной системе координат в окрестности данной точки сопоставляется упорядоченный набор (столбец) из n чисел, причем при переходе от одной локальной системы к другой с помощью диффеоморфного преобразования набор чисел изменяется, умножаясь слева на матрицу Якоби в данной точке.

Каждый вектор в старом смысле стрелки обладает такими наборами – это его координаты, и обратно:

Предложение. Если с каждой системой координат связан набор из n чисел с указанным правилом изменения при замене локальных координат, то имеется единственный вектор-стрелка, порождающий именно эти наборы в качестве своих координат.

Доказательство. Достаточно в какой-нибудь одной системе по данному набору чисел построить вектор с такими координатами и тогда в каждой системе координаты вектора будут совпадать с набором, данным для этой системы, так как правило изменения наборов и координат векторов-стрелок одно и то же. $\blacksquare$

Тензорное определение вектора в пространстве $\mathbb{R}^n$. Ввиду этой эквивалентности, мы можем *определить* вектор в точке как *сопоставление каждой локальной системе координат в окрестности этой точки набора чисел, преобразующегося при замене координат по правилу умножения на матрицу Якоби замены.*

Линейные операции при таком определении вектора определяются очевидным образом: если мы складываем наборы в одной системе координат, то их сумма после преобразования останется суммой преобразованных наборов и в другой системе; то же относится и к произведению на числа. Это вытекает из однородной линейности правила замены.

Итак, векторы можно строить, не обращаясь к глобальной линейной структуре $\mathbb{R}^n$! В частности, это построение полностью применимо к касательным векторам подмногообразий $\mathbb{R}^n$ (которые мы определяли как векторы-стрелки, лежащие в касательной плоскости). Более того, мы можем воспользоваться этим подходом, чтобы определить касательные векторы для любого гладкого многообразия.

Геометрический смысл тензорного закона в $\mathbb{R}^n$. Пусть имеются две локальные системы координат в окрестности точки $A \in \mathbb{R}^n$. Это значит, что даны два диффеоморфизма $\varphi_i : W_i \to U_i$, $i = 1, 2$, где W_i и U_i – области в $\mathbb{R}^n$, U_i – окрестности A, причем можно считать, заменяя эти окрестности их пересечением, что $U_1 = U_2 = U$. Диффеоморфизм $\psi_{12} = \varphi_2^{-1}\varphi_1 : W_1 \to W_2$ является координатным преобразованием. Пусть $B_i = \varphi_i^{-1}A$.

Рассмотрим линейные пространства V_A, V_{B_i}. Пусть $\mathbf{u}$ – произвольный вектор-стрелка в V_A. Т.к. φ_i диффеоморфизмы областей, однозначно определены векторы-стрелки $\mathbf{w}_i$, для которых выполнено $d\varphi_i(\mathbf{w}_i) = \mathbf{u}$. Согласно цепному правилу, имеет место равенство для композициии дифференциалов: $d\varphi_1 = d\varphi_2 d\psi_{12}$ и, значит, $d\psi(\mathbf{w}_1) = \mathbf{w}_2$, в матричной форме: $(J_\psi)(\mathbf{w}_1) = (\mathbf{w}_2)$ (здесь векторы записываются как столбцы). Наконец, в координатной форме: $\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} w_1^j = w_2^{k'}$ (здесь штрихованные индексы отвечают координатам в канонической системе векторов в V_{B_2}, а нештрихованные – в V_{B_1}).

Координатами вектора $\mathbf{u}$ в нелинейной системе координат, определенной диффеоморфизмом φ_i, являются координаты вектора $\mathbf{w}_i$ в канонической системе координат, и именно этот набор чисел сопоставляется вектору-стрелке $\mathbf{u}$ в соответствующей координатной системе. Значит тензорное правило является просто следствием цепного правила дифференцирования композиции, его смысл тот, что при замене координат для вектора $\mathbf{u}$ один его прообраз $\mathbf{w}_1$ переводится в другой $\mathbf{w}_2$ дифференциалом диффеоморфизма замены.

Тензорное определение касательных векторов для подмногообразий $\mathbb{R}^n$. Мы можем все сказанное повторить для касательных векторов к подмногообразию $M \subset \mathbb{R}^n$ в точке $A \in M$. Нужно только для отображений φ_i заменить слово диффеоморфизм на слова "регулярные отображения, задающие локальные карты в окрестности A".

Действительно, для регулярных отображений $\varphi_i : W_i \to \mathbb{R}^n$, где W_i – области в $\mathbb{R}^k$, $\varphi_i(W_i) = U$ – окрестность точки A в M, образом их дифференциалов является одна и та же k-мерная касательная плоскость к M в точке A, причем каждый из них изоморфно отображает линейное пространство V_{B_i} на эту касательную плоскость, рассматриваемую как линейное пространство в точке A (линейное подпространство в V_A).

Поэтому для вектора-стрелки $\mathbf{u}$ в касательной плоскости (т.е. для касательного вектора к M в точке A по нашему определению) найдется в точности один вектор $\mathbf{w}_i \in V_{B_i}$, являющийся прообразом его при дифференциале φ_i. Канонические координаты $\mathbf{w}_i$ служат локальными кординатами вектора $\mathbf{u}$ в локальной карте, определенной регулярным отображением φ_i. Как и выше, мы получаем, что при замене цепное правило дает тензорный закон связи между координатами двух координатных систем с помощью матрицы Якоби диффеоморфизма $\psi_{12} = \varphi_2^{-1}\varphi_1$.

Тензорное определение касательного вектора для гладкого многообразия. Теперь мы готовы дать определение касательного вектора для гладкого многообразия, не считая его лежащим в аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$. Конечно, теперь не будет речи о какой-либо близости "точек вектора" (они не существуют) к точкам многообразия. Но мы можем полностью перенести только что полученное тензорное определение на произвольное гладкое многообразие.

Определение. *Касательным вектором* в точке A гладкого k-мерного многообразия M называется *сопоставление* каждой локальной карте согласованной с гладкой структурой M в окрестности A набора k чисел – его локальных координат в этой системе координат – подчиненное условию тензорного преобразования при переходе от одной системы координат к другой системе с помощью матрицы Якоби координатной замены. Этот набор чисел называется координатным представлением данного касательного вектора, отвечающего данной локальной системе.

В согласии со случаем гладких подмногообразий $\mathbb{R}^n$, набор чисел, сопоставляемый данной системе координат, можно рассматривать как канонические координаты некоторого вектора $\mathbf{w}$ в линейном пространстве V_B, где B – прообраз точки A при отображении, задающем локальную систему координат. Дифференциал координатного преобразования переводит такой вектор $\mathbf{w}$, отвечающий одной системе координат, в вектор $\mathbf{w}'$, отвечающий другой системе координат, причем координаты нового вектора $\mathbf{w}'$ получаются из координат $\mathbf{w}$ умножением на матрицу Якоби преобразования, т.е. как раз по тензорному закону. Таким образом, канонические координаты вектора $\mathbf{w}'$ являются тем набором чисел, который сопоставлен второй координатной системе.

5. **Касательная плоскость и дифференциал отображения**

Касательная плоскость. Умножение набора чисел на матрицу является линейным преобразованием, которое переводит сумму векторов в сумму и умножение на число в умножение на число. Отсюда следует, что множество касательных векторов в данной точке $A \in M$ образует k-мерное линейное пространство. Это позволяет дать

Определение. *Касательной плоскостью* $\tau_A(M)$ к многообразию M в точке A называется линейное пространство касательных векторов в этой точке.

Как и раньше, мы будем в основном рассматривать $\tau_A(M)$ как линейное пространство, но при необходимости сохраним это обозначение и для соответствующего аффинного пространства. Заметим, что для подмногобразий $\mathbb{R}^n$ мы определили сначала касательные плоскости, а затем касательные векторы как векторы, лежащие в этих плоскостях. Для произвольного гладкого многообразия мы сначала определяем касательные векторы, а затем касательные плоскости как линейные пространства, составленные из этих векторов.

Замечание. Приведенное определение, возможно, вызывает затруднение, связанное с тем, что пространство $\tau_A(M)$ не определено как подмножество уже известного множества (как это было в случае подмногообразий $\mathbb{R}^n$), а задается своими представителями. На самом деле это обычный способ введения математических объектов. (Например, рациональные числа вводятся как дроби, но каждая дробь есть только представитель числа, а не само число.) В нашем случае представителями касательной плоскости являются векторные пространства V_B в точках $\mathbb{R}^k$, с фиксированными каноническими системами координат. Они *отождествляются* дифференциалами координатных преобразований.

Координатные реперы касательной плоскости. Итак, с каждой локальной системой координат касательная плоскость получает автоматически каноническую координатную систему и, в частности, координатный репер. (В случае подмногообразий $\mathbb{R}^n$ он представлен столбцами матрицы Якоби карты, которые обозначались $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки многообразия.)

Базисные векторы координатного репера, определенные в точке $\mathbf{x}$ карты гладкого многообразия, принято обозначать $\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\mathbf{x}}$.

Дифференциал гладкого отображения. Пусть теперь дано гладкое (класса $p \geq 1$) отображение $F : M_1 \to M_2$ одного гладкого многообразия размерности k в другое размерности l.

Пусть $A_1 \in M_1$, $A_2 = F(A_1) \in M_2$ и $f : W_1 \to W_2$ локальное представление отображения F в окрестности A, где W_1 и W_2 – области сотответственно в $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^l$, построенное с помощью карт $\varphi_i : W_i \to M_i$, $\varphi_i(W_i) = U_i$. Пусть $B_i = \varphi_i^{-1} A_i$.

Дифференциал df линейно отображает векторное пространство V_{B_1} в V_{B_2}, т.е. на деле представителя касательной плоскости τ_{A_1} в представителя касательной плоскости τ_{A_2}.

Эти линейные отображения согласованы, т.е. переходят друг в друга при координатных заменах:

Пусть в прообразе и образе мы перешли к новым картам $\tilde{\varphi}_i$. Новое локальное представление F будет
$$\tilde{f} = \tilde{\varphi}_2^{-1} F \tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2^{-1} \varphi_2 \varphi_2^{-1} F \varphi_1 \varphi_1^{-1} \tilde{\varphi}_1 = \psi_2^{-1} f \psi_1,$$
где ψ_i – координатные замены.

В таком случае
$$d\tilde{f} = (d\psi_2)^{-1}\, df\, d\psi_1.$$

Это значит, что дифференциал представления F в новых картах получается из дифференциала представления в старых картах с помощью линейных замен координат, определенных координатными преобразованиями. Значит, корректно следующее

Определение. *Дифференциалом dF отображения* $F : M_1 \to M_2$ в точке A_1 называется линейное отображение $\tau_{A_1}(M_1)$ в $\tau_{A_2}(M_2)$, заданное системой локальных представителей, которыми являются дифференциалы локальных представителей отображения F.

Замечание. Любое линейное отображение $L : \tau_{A_1}(M_1) \to \tau_{A_2}(M_2)$ по определению порождает линейное отображение $l : V_{B_1} \to V_{B_2}$ соответствующих представителей касательных плоскостей для локальных координат в окрестностях точек A_i, причем эти отображения будут переходить друг в друга при заменах координат по правилу
$$\tilde{l} = (d\psi_2)^{-1}\, l\, d\psi_1.$$

Если, обратно, для каждой пары локальных координат в окрестностях точек $A_i \in M_i$ заданы линейные отображения $l : V_{B_1} \to V_{B_2}$ с указанным правилом замены, то, очевидно, этим однозначно определено линейное отображение L одной касательной плоскости в другую. Мы можем назвать l локальными представителями отображения L.

Локальными представителями дифференциала отображения F являются дифференциалы локальных представителей f этого отображения.

Контрольный вопрос. Всякое ли линейное отображение касательной плоскости в касательную плоскость служит дифференциалом в данной точке некоторого гладкого отображения, заданного на окрестности этой точки?

Замечание. Регулярность отображения означает на этом языке, что дифференциал отображения имеет максимальный ранг в каждой точке (т.е. максимальный ранг имеют все представители).

О тензорах. Определение геометрического объекта как наборов чисел, сопоставленных локальным координатным системам и меняющимся по определенному линейному закону, не слишком наглядно и в этом отношении сильно уступает первоначальному определению вектора как стрелки. Зато с его помощью понятие касательного вектора вводится для абстрактного гладкого многообразия, для которого стрелки не определены.

Кроме того, отсутствие наглядности искупается возможностью широкого обобщения. На этом пути вводится обширная система геометрических объектов, называемых *тензорами*, которые позволяют очень глубоко исследовать геометрию многообразий. Их координаты преобразуются с помощью линейных преобразований, коэффициенты которых являются произведениями элементов матрицы Якоби.

(Имеются и дальнейшие обобщения, например, набор производных функции до порядка k, в которых допускаются более сложные преобразования координат геометрических объектов, включающие высшие производные координатных преобразований, но они теперь останутся за пределами нашего изложения.)

6. **Вектор как скорость**

Напоминание о гладких дугах и векторах скорости. Мы интерпретировали касательный вектор к гладкой кривой как вектор скорости локальной параметризации в данной точке. Мы воспользуемся этой интерпретацией, чтобы дать новое определение вектора. Сначала рассматриваем векторы в $\mathbb{R}^n$.

Эквивалентность в точке $A \in \mathbb{R}^n$ параметризованных дуг. Рассмотрим всевозможные дуги, проходящие в $\mathbb{R}^n$ через A, имеющие гладкие параметризации, для которых точка A отвечает нулевому значению параметра. Обозначим полученное множество Z. Заметим, что векторы-стрелки $\mathbf{t}$ с началом в A разбивают это множество на классы эквивалентности: две параметризации двух кривых отнесем к одному классу, если они имеют общий вектор скорости в A. Это задает отношение эквивалентности. Важно, что классы эквивалентных параметризаций характеризуются свойством, не использующим векторы:

Предложение. Две параметризованные кривые принадлежат к одному классу (имеют общий вектор скорости) тогда и только тогда, когда расстояние между их точками с общим значением параметра при стремлении этого параметра к нулю есть величина бесконечно малая более высокого порядка, чем само значение параметра.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай ненулевого вектора скорости. Как отрезок в $\mathbb{R}^n$ он имеет естественную линейную параметризацию с помощью дифференциала (т.е. отрезком [0,1]). Для каждой кривой, имеющей его своим вектором скорости, расстояние между точками на кривой и на векторе с одним значением параметра является бесконечно малой более высокого порядка, чем это значение параметра. Поэтому, если параметризации двух кривых имеют общий вектор скорости, то это условие будет выполнено и для них.

Обратно, вектор скорости является единственным вектором с таким свойством. Поэтому, если условие близости выполнено для параметризаций двух кривых, то вектор скорости одной, очевидно, является также вектором скорости и для другой, т.е. они принадлежат к одному классу эквивалентности.

Для нулевого класса рассуждение остается, в сущности, тем же, но вектор скорости параметризации теперь не отрезок, а точка. При стремлении параметра к нулю расстояние соответствующей точки кривой до A оказывается бесконечно малой более высокого порядка, чем параметр. Значит, и для двух кривых с нулевым вектором скорости расстояние между их точками с одним значением параметра – бесконечно малая более высокого порядка, чем сам параметр. ∎

Определение. Две кривые, имеющие близкие параметризации в смысле сформулированном в этом предложении, называются *соприкасающимися*.

Интерпретация в $\mathbb{R}^n$ векторов как векторов скорости. Итак, мы можем определить векторы в точке чисто локально (хотя при этом сами векторы могут быть сколь угодно большими): вектор есть класс экивалентных (соприкасающихся) в данной точке гладко параметризованных кривых. Однако, хотя эта интерпретация векторов очень важна и мы будем ею пользоваться, она не годится для *определения* векторов: с ее помощью трудно ввести линейные операции. Мы не будем этим заниматься.

Заметим теперь, что полученная интерпретация векторов как классов эквивалентности гладких параметризаций кривых легко переносится на касательные векторы гладких многообразий.

Гладкие кривые в гладких многообразиях. Гладкая локальная параметризация (возможно, не регулярная) кривой в многообразии M это гладкое отображение $L : I \to M$, $I = (a, b)$ интервала числовой прямой (рассматриваемой как гладкое многобразие). Пусть $0 \in I$ и $L(0) = A \in M$. Это отображение взаимно однозначно в окрестности нуля, если отображение регулярно. Если же дифференциал в нуле нулевой, то это — дополнительное условие.

Определение. *Вектором скорости* гладкой параметризации в точке A назовем образ единичного вектора при линейном отображении $dL|_0$.

(Здесь вектор в A понимается в тензорном смысле.)

Как и выше, назовем две гладко параметризованные кривые *эквивалентными в точке* A, если они имеют общий вектор скорости.

В этом случае мы не можем определить соприкосновение кривых в M тем же способом, как выше в $\mathbb{R}^n$, т.к. мы еще не умеем измерять расстояния в абстрактно определенном гладком многообразии. Но мы можем воспользоваться локальными картами.

Заметим, что мы имеем гладко параметризованную кривую $l : I \to W \subset \mathbb{R}^k$ для любой локальной карты $\varphi : W \to M$ в окрестности A (определенную, возможно, на меньшем интервале), вектором скорости которой служит локальный представитель вектора скорости кривой L. Очевидно, в таком случае, что классу эквивалентных в точке A кривых в M отвечает класс эквивалентных в точке $B = \varphi^{-1}A$ их локальных представителей. Обратно, если локальные представители двух параметризованных кривых в одной карте эквивалентны, то будут эквивалентны их локальные представители и в любой другой карте и, значит, они будут иметь общий вектор скорости.

Определение. Две гладко параметризованные кривые *соприкасаются* в точке A, если соприкасаются их представители в какой-либо локальной карте, содержащей A.

В этом случае будут соприкасаться представители и в любой другой карте. Действительно, эти представители будут иметь общий вектор скорости в этой карте и тогда в любой карте локальные представители будут иметь общий вектор скорости, и, значит, будут соприкасающимися. Итак,

Предложение. Две гладко параметризованные кривые имеют общий вектор скорости тогда и только тогда, когда они соприкасаются в данной точке. ■

Таким образом мы можем определить векторы в любом гладком многообразии через соприкосновение кривых.

7. **Вектор как дифференцирование**

Параметризованные кривые в многообразии M это отображения в M интервала числовой прямой. Обратимся теперь к двойственной ситуации – отображениям M в прямую, т.е. к гладким функциям на M. В этом случае вектор, как известно, определяет важную операцию дифференцирования.

Снова начнем с векторов в $\mathbb{R}^n$.

Производная по вектору в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что *производной* $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}}$ *функции* $F(\mathbf{x})$ *по вектору* $\mathbf{v}$ *в точке* $\mathbf{x}_0 \in R^n$ называется производная сложной функции $F(\mathbf{r}(t))$ в точке t_0, где $\mathbf{r}(t)$ – параметризованная кривая с вектором скорости $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Если F определена в окрестности точки x_0 в $\mathbb{R}^n$ и x^i – локальные координаты в этой окрестности, то $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial F}{\partial x^i} v^i$ (матричное умножение строки на столбец), откуда видно, что производная по вектору не зависит от выбора параметризованной кривой. (Она не зависит также от локальной карты, просто по определению, – но это видно и из приведенного выражения: $\frac{\partial F}{\partial x^{i'}} v^{i'} = \frac{\partial F}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} v^l = \frac{\partial F}{\partial x^k} \delta^k_l v^l = \frac{\partial F}{\partial x^k} v^k$.)

Замечание (важное для дальнейшего). Координаты v^i совпадают с производными координатных функций x^i по $\mathbf{v}$: $\frac{\partial x^i}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} v^j = \delta^i_j v^j = v^i$.

Производная по вектору в многообразии. Пусть теперь F определена в окрестности точки A k-мерного многообразия M. Пусть x^i – локальные координаты в окрестности A: $\varphi(\mathbf{x}) \in M$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$, $A = \varphi(\mathbf{x}_0)$.

Возьмем в M параметризованную кривую $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{u}(t_0) = A$, с вектором скорости $\mathbf{v}$ в точке A.

Перенесем функцию и кривую в пространство $\mathbb{R}^k$, взяв их локальных представителей: определим $\tilde{F}(\mathbf{x}) = F(\varphi(\mathbf{x}))$, $\mathbf{r}(t) = \varphi^{-1}(\mathbf{u}(t))$. Параметризация $\mathbf{r}(t)$ является гладкой, т.к. φ – диффеоморфизм окрестности точки $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^k$ на окрестность A в M. Тогда $d\varphi$ переводит вектор скорости $\tilde{\mathbf{v}}$ кривой $\mathbf{r}(t)$ в вектор $\mathbf{v}$, локальным представителем которого $\tilde{\mathbf{v}}$ является.

Мы можем определить $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}}$ как $\frac{dF(\mathbf{u}(t))}{dt}$, поскольку эта производная не зависит от выбора кривой $\mathbf{u}(t)$ с вектором скорости $\mathbf{v}$. Действительно, $F(\mathbf{u}(t)) = \tilde{F}(\mathbf{r}(t))$ и

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{\mathbf{v}}} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^j}\tilde{v^j}.$$

Это дает выражение производной по вектору на подмногообразии через произвольно выбранные локальные координаты.

Вектор как функционал. Если касательный вектор $\mathbf{v}$ к M в точке $\mathbf{x}_0$ фиксирован, а функция меняется, то мы получаем *функционал* A_v, т.е. отображение $A_v : C_{\mathbf{x}_0} \to \mathbb{R}$ пространства $C_{\mathbf{x}_0}$ гладких функций, заданных на (различных) окрестностях точки $\mathbf{x}_0$ в M, в числовую прямую $\mathbb{R}$. Он *линеен*, т.к. переводит сумму в сумму и произведение на число в произведение на то же число. Заметим, что его значение совпадает на паре функций, совпадающих на какой-либо окрестности точки $\mathbf{x}_0$.

Вектор как дифференцирование. Более того, функционал A_v является *дифференцированием*. Под этим понимается в данном случае не то, что он по определению есть производная, а то, что выполнено правило Лейбница дифференцирования произведения: $A_v(fg) = f(\mathbf{x}_0)A_v(g) + g(\mathbf{x}_0)A_v(f)$.

Иными словами вводится общее понятие:

Определение. Линейный функционал называется *дифференцированием*, если он удовлетворяет правилу Лейбница по отношению к умножению функций.

Следствие определения. Функционал, являющийся дифференцированием, равен нулю на постоянных функциях (как и требуется для дифференцирования).

Доказательство. Возьмем сначала константу, равную 1. Пусть функционал есть A. Тогда $A(1) = A(1 \cdot 1) = A(1) \cdot 1 + 1 \cdot A(1) = 2 \cdot A(1)$, откуда $A(1) = 0$. Для других констант это вытекает теперь из линейности A. ■

Оказывается, что векторы (точнее, дифференцирования по векторам) можно охарактеризовать как дифференцирования:

Теорема. *Всякий линейный функционал A на функциях, заданных в окрестностях точки $\mathbf{x}_0$ на многообразии M, принимающий равные значения на двух функциях, если они совпадают на какой-либо окрестности этой точки, и являющийся дифференцированием, является производной по некоторому касательному вектору к многообразию в этой точке.*

Область определения A. Заметим, что функции, на которых задан A, определены, вообще говоря, каждая на своей окрестности точки $\mathbf{x}_0$. Сумма двух функций определена на пересечении их областей определения (которое, конечно, тоже есть окрестность $\mathbf{x}_0$).

Нельзя фиксировать область задания этих функций, эти области должны образовывать *направленность* к точке x_0, т.е. нужно рассматривать систему всех окрестностей данной точки. Поэтому, строго говоря, мы должны в качестве области определения ввести пространство, полученное из пространства функций факторизацией. Именно, рассмотрим все функции (заданной гладкости), каждая из которых определена на своей окрестности точки $\mathbf{x}_0$. Они образуют линейное пространство L. Теперь нужно отождествить две функции, если они совпадают на некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0$.

Такое пространство называется пространством *ростков* функций в точке $\mathbf{x}_0$. Это – линейное пространство, получаемое из L факторизацией по подпространству тех функций, которые равны нулю на какой-либо окрестности этой точки. Мы не будем рассматривать детали этого (достаточно важного) понятия, ограничиваясь замечанием, что каждый элемент этого пространства имеет в качестве представителя функцию, определенную на окрестности точки $\mathbf{x}_0$, которую в процессе рассуждения можно конечное число раз произвольно заменить меньшими окрестностями.

Доказательство теоремы. Введя локальную карту в окрестности $\mathbf{x}_0$ в M, мы сведем дело к функционалу на функциях, заданных в окрестности точки O в $\mathbb{R}^k$.

Первый шаг основан на простой, но важной лемме, в которой функцию в окрестности точки представляется в виде многочлена Тейлора с переменными коэффициентами:

Лемма Адамара. Если в точке $\mathbf{x}_0$ непрерывно дифференцируемая функция $F(\mathbf{x})$ равна нулю, то ее можно представить в окрестности этой точки в виде

$$F(\mathbf{x}) = \sum H_i(\mathbf{x})(x^i - x_0^i), \qquad (!)$$

где $H_i(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируемы.

Доказательство леммы следует из формулы Ньютона–Лейбница

$$F(\mathbf{x}) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} F(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))\, dt :$$

проведя дифференцирование по t под знаком интеграла, мы получим

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= \int\limits_0^1 \sum\limits_{i=1}^k \tfrac{\partial F}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(x^i - x_0^i)\, dt = \\ & \sum\limits_{i=1}^k (x^i - x_0^i) \int\limits_0^1 \tfrac{\partial F}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))\, dt. \end{aligned}$$

Это дает требуемое разложение (!), т.к. интегралы $H_i(\mathbf{x}) = \int\limits_0^1 \frac{\partial F}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\, dt$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями от $\mathbf{x}$. Заметим, что $H_i(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial F}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0)$. ■

Следствие из леммы Адамара. В окрестности точки $\mathbf{x}_0$ имеем:

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x_0}) + \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{k}} (\mathbf{x^i} - \mathbf{x_0^i}) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x^i}}(\mathbf{x_0}) + \sum_{\mathbf{i,j=1}}^{\mathbf{k}} \mathbf{H_{ij}}(\mathbf{x})(\mathbf{x^i} - \mathbf{x_0^i})(\mathbf{x^j} - \mathbf{x_0^j}). \qquad (t)$$

Действительно, дифференцируя по x^i равенство Адамара $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_0) + \sum\limits_{i=1}^k H_i(\mathbf{x})(x^i - x_0^i)$, получим: $H_i(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial F}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0)$. Представляя таким же образом $H_i(\mathbf{x}) = H_i(\mathbf{x}_0) + H_{ij}(x^j - x_0^j)$ каждую из функций $H_i(\mathbf{x})$ и подставляя в это равенство, получим требуемое. ■

Конечно, этот процесс можно продолжать и дальше, пока существуют высшие производные данной функции.

Сопоставление вектора дифференцированию. Мы продолжаем доказательство теоремы. Применим дифференцирование A (т.е. линейный функционал, удовлетворяющий правилу Лейбница) к функции F, представленной в окрестности точки $\mathbf{x}_0$ в виде (t). Первое слагаемое обратится в нуль, т.к. A обращает в нуль константы. Третье слагаемое обратится в нуль, благодаря правилу Лейбница и тому, что одночлены $x^i - x_0^i$ обращаются в нуль в точке $\mathbf{x}_0$.

Мы получим:

$$A(F) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial F}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) A(x^i - x_0^i) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial F}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) A(x^i).$$

В другой системе координат мы получим также

$$A(F) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial F}{\partial x^{i\prime}}(\mathbf{x}_0) A(x^{i\prime}) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial F}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} A(x^{i'}).$$

Пусть F – координатная функция x^i. Для нее в этом выражении останется только одно слагаемое и мы имеем: $Ax^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} Ax^{i'}$. Значит, набор чисел $Ax^{i'}$ меняется при замене координат по векторному (тензорному) закону преобразования. Поэтому мы имеем право ввести вектор $\mathbf{v}$ с координатами $\xi^i = Ax^{i'}$ в каждой системе координат.

Более того, приведенная выше координатная запись показывает, что $A(F)$ совпадает с $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}}$. Итак, векторы и дифференцирования определяют друг друга.

Вектор $\mathbf{v}$ с координатами ξ^i определяется единственным образом. Иначе найдется вектор (разность двух векторов, отвечающих одному и тому же дифференцированию A), производная по которому равна нулю для всякой непрерывно дифференцируемой функции в окрестности $\mathbf{x}_0$. Но координаты вектора это производные координатных функций по этому вектору. Если производная по $\mathbf{v}$ нуль для координатных функций, то его координаты нулевые, т.е. $\mathbf{v}$ есть нуль-вектор. ■

Обозначение. $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$ обозначается также $\mathbf{v}(f)$ как вектор-функционал на функциях, определенных в окрестностях точки.

Подведение итога. Итак, мы начали с "наивного" определения вектора как стрелки в $\mathbb{R}^n$. Для подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ касательный вектор — это стрелка в касательной плоскости. Затем мы получили три интерпретации касательного вектора: тензорную, как вектора-скорости и как дифференцирований гладких функций.

Из этих интерпретаций основной является первая. Прежде всего с ней удобно вводятся линейные операции в пространстве векторов в данной точке, что трудно сделать со второй интерпретацией. Третья не удобна тем, что вводит посторонний объект – гладкие функции, к тому же с переменной областью определения. Однако, вторая и третья интерпретации являются "рабочими" в определенных классах задач, с которыми нам предстоит встречаться.

Глава 7. **Векторные и ковекторные поля. Скобка Ли.**

А. Касательное расслоение и векторные поля

1. **Касательное расслоение**

Как определить векторные функции на многообразиях? До сих пор мы рассматривали векторы на многообразиях и их свойства локально, в окрестности данной точки, и при этом убеждались, что в сущности эти рассмотрения эквивалентны рассмотрениям в областях аффинного пространства подходящей размерности.

Эквивалентность достигалась переходом к локальным представителям отображений и векторов с помощью диффеоморфизма окрестности точки многообразия на область в аффинном пространстве.

Однако мы знаем, что, вообще говоря, многообразие не может быть параметризовано целиком одной картой. Что делать, если, например, нам нужно определить понятие векторной функции от числового аргумента с значениями в касательных векторах многообразия (например, векторы скорости гладкой кривой в многообразии)?

Для подмногообразий пространства $\mathbb{R}^n$ трудности не возникает, т.к. в аффинном пространстве мы можем пользоваться единой *внешней* системой координат и считать, например, векторную функцию непрерывно дифференцируемой, если таковы ее координаты в $\mathbb{R}^n$. Но для общих гладких многообразий это решение не подходит.

Использование атласа. На самом деле указанная трудность не очень существенна и решается с помощью локальных представителей. Многообразие имеет атлас, т.е. совокупность (предположим для простоты, что конечную) карт $\varphi_i : V_i \to U_i$ с координатными переходами ψ_{ij} на пересечениях. Если мы непрерывно перемещаемся по многообразию, то мы последовательно проходим области значений U_i этих локальных параметризаций, переходя из одной в другую. В точке, принадлежащей сразу двум этим областям – предыдущей и последующей – мы можем считать, что мы находимся в уже рассмотренной выше ситуации замены локальных координат: возьмем для этого малую окрестность точки, лежащую одновременно в каждой из этих карт.

Дадим точное определение в важном специальном случае.

Векторное поле. Пусть в каждой точке $\mathbf{x}$ области U многообразия M задан касательный вектор $\mathbf{v}_\mathbf{x}$. Мы скажем, что этим определено непрерывно дифференцируемое *векторное поле*, если в каждой локальной карте координаты вектора непрерывно дифференцируемы.

Для этого достаточно, чтобы для каждой точки они были непрерывно дифференцируемыми в какой-нибудь одной карте, содержащей эту точку, *при условии, что класс гладкости многообразия не меньше 2.* Тогда это будет верно и для других карт в силу правила замены координат вектора. Напомним это правило:

Пусть $\varphi_i : W_i \to U_i$, $i = 1, 2$, – две локальные карты ($\varphi_i(\mathbf{t}_i) = \mathbf{x}$) и $\psi_{12}(\mathbf{t}_1) = \mathbf{t}_2$ – координатный переход (это диффеоморфизм, определенный на прообразе $\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$ для первой карты и отображающей его в прообраз $\varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ для второй карты). Тогда координаты вектора во второй карте получаются из координат в первой умножением на матрицу Якоби преобразования:

$$v_2^i = \frac{\partial \psi_{12}}{\partial t^j}(\mathbf{t}_1)^i v_1^j.$$

Мы видим, что условие, чтобы класс гладкости многообразия был на единицу выше, чем нужный класс гладкости поля, связан с тем, что в формулу преобразования векторов входят производные функций координатного преобразования.

Другие поля. Нам придется рассматривать различные вариации этого понятия, например, векторные поля, определенные в точках не обязательно открытых подмножеств, скажем, в точках кривой, а также параметризованные векторные поля, когда каждой точке некоторого пространства (интервала или куба в $\mathbb{R}^p$ и т.п.) отвечают векторы в точках многообразия. Кроме полей векторов, приходится рассматривать и другие поля, например, когда в каждой точке некоторого подмножества многообразия задана линейная или квадратичная форма и т.п.

Нам нет необходимости каждый раз заново формулировать определение. Мы можем объединить все касательные векторы во всех точках подмногообразия в единое пространство. Рассмотрим вначале снова подмногообразия в $\mathbb{R}^n$.

Касательное пространство подмногообразия $\mathbb{R}^n$. Все векторы во всех точках аффинного пространства $\mathbb{R}^n$ образуют пространство, которое отождествляется с $\mathbb{R}^{2n}$. Это можно делать по-разному, например: первые n координат – координаты начала стрелки, последние n – ее конца или, что для нас удобнее, первые – координаты начальной точки, последние – самого вектора.

Касательные векторы к подмногообразию M в $\mathbb{R}^n$ образуют подпространство этого пространства $\mathbb{R}^{2n}$. Более того, это подмножество оказывается гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^{2n}$. Оно называется *касательным расслоением* многообразия и обозначается τM. (Расслоением оно называется в силу того, что расслоено на касательные плоскости $\tau_A M$ в понятном смысле.)

Локальная параметризация касательного расслоения. Локальная карта в области $U \subset M$ порождает локальную параметризацию в открытом подмножестве касательного расслоения, состоящем из всех касательных плоскостей точек области U.

Точка касательного расслоения это касательный вектор $\mathbf{v}$ в точке $\mathbf{x} \in U$. Ее координатами служат координаты $\mathbf{x}$ в данной карте вместе с координатами $\mathbf{v}$ в базисе касательной плоскости, выбранном по параметризации *этой* карты. Таким образом, τM имеет размерность $2k$ – вдвое большую, чем M.

Мы видим также, что τM является многообразием. Однако, изучение его гладкой структуры мы проведем в общем случае произвольного гладкого многообразия. Дадим общее определение. Нам нужно построить атлас в τM.

Построение атласа в касательном расслоении. Возьмем произвольную карту $\varphi : W \to U$ для M. Для каждого касательного вектора в какой-либо точке $A \in U \subset M$ мы имеем набор из $2k$ чисел: k координат u^i точки A в этой карте и k координат вектора v^i в канонических координатах в координатной плоскости $\tau_A(M)$ в этой точке, *согласованных с данной картой* (в базисе $\frac{\partial}{\partial u^i}$).

Мы имеем взаимно однозначное соответствие множества касательных векторов в точках U с прямым произведением $W \times \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{2k}$, т.е. с открытым подмножеством пространства $\mathbb{R}^{2k}$, и в этом множестве мы имеем канонические координаты. Это значит, что мы имеем локальную карту и также атлас, поскольку каждый касательный вектор принадлежит одной из таких карт.

Остается проверить, что координатные преобразования будут задаваться гладкими функциями.

Класс гладкости τM на единицу меньше класса M. Оказывается, однако, что класс гладкости этих функций будет, вообще говоря, на единицу ниже класса гладкости координатных преобразований для M. Дело в том, что координатные преобразования для касательного расслоения будут выражены через производные функций, задающих координатные преобразования для M.

Матрица Якоби для координатной замены в τM. В самом деле, при координатной замене ψ для карт в M новые координаты вектора в локальной карте для координатного расслоения $(x^{i'}, a^{i'})$ будут выражены через старые (x^i, a^i) по формулам (в сокращенной записи) $(\psi(x), d\psi|_{(x)}(a))$. Первый член вовсе не зависит от координат вектора, но второй линейно зависит от этих координат и нелинейно зависит от координат точки. Поэтому матрица Якоби этого координатного преобразования будет иметь блочный вид

$$\begin{pmatrix} J & 0 \\ Z & J \end{pmatrix}.$$

Здесь J – матрица Якоби координатного преобразования для M, а Z – матрица, элементы которой выражены через первые и вторые производные координатных функций этого преобразования. Видно, что якобиан получившегося преобразования отличен от нуля, и положителен (равен квадрату $\det J$).

Упражнение. Докажите, что отображение $F : K \to M$ гладких многообразий трансверсально относительно гладкого подмногообразия $N \subset M$ в точке $\mathbf{x}_0 \in K$ тогда и только тогда, когда касательное пространство $\tau_{\mathbf{y}_0} N$, $\mathbf{y}_0 = F(\mathbf{x}_0)$, и образ касательного пространства $\tau_{\mathbf{x}_0} K$ относительно дифференциала F вместе порождают $\tau_{\mathbf{y}_0} M$.

Проекция касательного расслоения и сечения. Имеется естественное отображение τM в M. Оно ставит каждому вектору из τM точку его приложения в M. Это отображение называется *проекцией* расслоения и обычно будет обозначаться $p : \tau M \to M$. В следующем пункте мы рассмотрим встречные отображения подмножеств M в τM, которые точки $x \in M$ переводят в векторы в соответствующих $\tau_x M$. Такие отображения для произвольных расслоений называются *сечениями.* Они служат обобщением понятия "график отображения" и являются графиками отображения, если расслоение тривиально, т.е. есть прямое произведение. (Если $p : X \times Y \to Y$ переводит (x, y) в y, то график любого отображения $f : Y \to X$ является сечением $y \mapsto (f(y), y)$.)

2. Векторные поля

Теперь, когда все касательные векторы гладкого многообразия M соединены в одно гладкое многообразие τM удвоенной размерности, можно определить объекты нового типа – полевые – с которыми главным образом и имеет дело дифференциальная геометрия. Одно из самых важных мест среди них занимают *векторные поля.*

Определение. Векторным полем X, заданным на подмножестве K гладкого многообразия M, называется отображение $X : K \to \tau M$, при котором для каждой точки $\mathbf{x} \in K$ касательный вектор $X(\mathbf{x})$ в $\mathbf{x}$ принадлежит $\tau_{\mathbf{x}}(M)$.

Обозначения. Довольно часто векторные поля обозначают большими латинскими буквами X, Y и др. Как правило, мы так и будем поступать.

Ясно, что мы можем говорить о непрерывности векторного поля, а если K есть гладкое подмногообразие, например, открытое подмножество M, то и о гладкости этого поля. Однако для этого гладким должно быть также τM и, значит, M должно иметь класс гладкости по крайней мере 2.

Локальное представление векторного поля. Если дана локальная карта $\varphi : W \to U$, то векторы векторного поля $X(\mathbf{x})$ получают координаты и в таком случае мы имеем k функций $X^i(\mathbf{x})$, которые составляют локальное представление поля X. Непрерывность и гладкость поля эквивалентна одновременной непрерывности и, соотв., гладкости всех этих функций.

Векторные поля и гладкие отображения. Если дано гладкое отображение F одного многообразия M_1 в другое M_2 и в некоторой области M_1 задано векторное поле X, то дифференциал F отображает вектор поля в каждой точке в некоторый вектор в точке образа. Однако, вообще говоря, мы не получаем векторного поля в образе, просто потому, что в одну точку в M_2 могут отобразиться две и больше точек из M_1. Мы получим поле в одном из двух случаев. Во-первых, если отображение есть диффеоморфизм. Во-вторых, если специально оговорено, что дифференциалы переводят векторы поля в двух точках в один общий вектор, когда эти точки имеют общий образ. В последнем случае говорят, что векторные поля в образе и прообразе *связаны.*

В следующем пункте нам особенно будет важен случай диффеоморфизма.

3. Векторные поля и обыкновенные дифференциальные уравнения

Локальная запись векторного поля как функции от точки многообразия вместе с представлением вектора как вектора скорости параметризации гладкой кривой приводит к инвариантной (не зависящей от координат) форме представления обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть в окрестности точки $\mathbf{x}_0$ на многообразии взяты локальные координаты x^i и задано векторное поле $X(\mathbf{x})$. Во взятых координатах точки и в соответствующих координатах в касательной плоскости мы получаем запись этого поля как системы из k функций: $X^i = f^i(x^j)$.

Поскольку в каждой точке $\mathbf{x}$ касательный вектор $X(\mathbf{x})$ данного поля является вектор-скоростью класса параметризованных кривых, естественно поставить вопрос об отыскании параметризованных кривых, для которых в каждой их точке вектор скорости совпадает с вектором поля в этой точке. Если $\mathbf{x}(t)$ - параметризация искомой кривой и $x^i(t)$ - координаты ее точки для значения параметра

t, то координаты ее вектора скорости равны $\dot{x}^i(t) = X^i$, т.е. мы приходим к дифференциальному уравнению

$$\dot{x}^i(t) = f^i(x^j(t)).$$

Обратно, система дифференциальных уравнений в такой форме (называемой нормальной) говорит, что вектором скорости $\dot{\gamma}(t)$ искомой кривой $\mathbf{x} = \gamma(t)$ для каждого значения параметра t служит вектор векторного поля, заданного правой частью системы: $\dot{\mathbf{x}}(t) = X(\mathbf{x}(t))$.

Эта система будет по разному выглядеть в разных системах координат, т.к. в правой части надо подставить формулы замены координат, а в левой – умножить на матрицу Якоби этой замены. Таким образом векторное поле (которое при этом не меняется) связывает большое число различных дифференциальных уравнений. В частности, решение одного приводит к решению остальных, если только нам даны координатные замены. (Примеры см. в справочнике по обыкновенным дифференциальным уравнениям Э.Камке.)

С другой стороны теория обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка позволяет уточнить и очень существенно пополнить геометрическую картину векторного поля. Мы отметим три важных момента.

1). Параметр. Во-первых, теорема существования и единственности утверждает в сущности, что через каждую точку проходит ровно одна *интегральная кривая* поля, т.е. параметризованная кривая, векторы скорости которой совпадают во всех ее точках с векторами поля.

На самом деле, параметризацию можно заменить с помощью сдвига на константу, поскольку правая часть уравнения при заменах не меняется, а левая является производной по параметру и не изменится, если к параметру добавить константу.

Итак, параметризация интегральной кривой определяется полем с точностью до сдвига. Мы иногда будем называть эту параметризацию *канонической*. Конечно, все это справедливо лишь в некоторой малой, вообще говоря, окрестности данной точки.

Замечание. Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в нормальной форме, в правую часть которого не входит параметр, в механике называется *автономным* и также *динамической системой*, оно описывает установившийся процесс. (И неустановившийся, если t входит в правую часть.)

2). Локальная группа преобразований. Во-вторых, теорема о дифференцируемой зависимости решения от начальных условий означает, что для каждого (малого) t_0 мы получаем обратимое непрерывно дифференцируемое отображение малой окрестности данной точки в $\mathbb{R}^k$, переводящее точку $\mathbf{x}(t)$ в точку $\mathbf{x}(t + t_0)$.

Каждое параметризованное решение при этом испытывает допустимую смену параметризации (т.е. сдвиг). Таким образом мы имеем локальные диффеоморфизмы φ_t и, очевидно, $\varphi_{t_1+t_2} = \varphi_{t_2}\varphi_{t_1}$:

$$\varphi_{t_1+t_2}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t + t_1 + t_2) = \varphi_{t_2}(\varphi_{t_1}(\mathbf{x}(t))).$$

Это равенство справедливо там, где композиция определена, т.е. во всяком случае в достаточно малой окрестности данной точки.

Верно также, что $\varphi_0 = id$ (тождественное отображение), и $\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$. Все это можно было бы подытожить, сказав, что мы имеем гомоморфизм аддитивной группы вещественных чисел в группу диффеоморфизмов областей аффинного пространства. В частности, эта группа коммутативна.

Но диффеоморфизмы областей не образуют группы, т.к. композиция их не всюду определена, кроме того, наш гомоморфизм определен лишь на малом интервале, а не на всей прямой. Поэтому систему диффеоморфизмов окрестностей точки с такими алгебраическими свойствами называют *локальной однопараметрической группой преобразований* и также *потоком*, особенно в том случае, когда решения оказываются определенными на всей прямой. (Если параметр оказывается определенным на всей прямой для всех интегральных кривых, то поле называется *полным*. В частности, поле оказывается полным, если поле задано во всех точках *компактного* многообразия.)

Мы не будем стремиться уточнить это понятие с полной строгостью (см. Понтрягин “Непрерывные группы”...), но будем часто им пользоваться.

Действие диффеоморфизма на поле. Пусть даны диффеоморфизм ψ и векторное поле X, определенные в окрестности некоторой точки $\mathbf{x}_0$ многообразия. Переходя к локальным представителям, мы можем принять, что это – область пространства $\mathbb{R}^k$, которую ψ отображает на окрестность точки $\psi(\mathbf{x}_0)$.)

Дифференциал диффеоморфизма $d\psi$ в каждой точке переводит вектор скорости кривой в вектор скорости ее образа, т.е. $d\psi(\dot{\mathbf{x}}(t)) = \dot{\mathbf{y}}(t)$, где $\mathbf{y}(t) = \psi(\mathbf{x}(t))$.

Значит, диффеоморфизм переводит интегральные кривые данного поля в интегральные кривые образа этого поля при дифференциале диффеоморфизма.

При этом параметризации интегральных кривых соответствуют друг другу. Тогда соответствуют и локальные группы преобразований, порожденные данным полем и его образом, т.е.

$$\psi(\varphi_t(\mathbf{x})) = \tilde{\varphi}_t(\psi(\mathbf{x})),$$

где φ_t и $\tilde{\varphi}_t$ – локальные группы, порожденные полем X и его образом соответственно.

Следствие *(критерий инвариантности поля).* Поле X называется *инвариантным* относительно диффеоморфизма ψ, если дифференциал $d\psi$ диффеоморфизма переводит каждый вектор поля X в другой вектор того же поля: $d\psi\,(X(\mathbf{x})) = X(\psi(\mathbf{x}))$. X тогда и только тогда инвариантно относительно ψ, когда ψ коммутирует со всеми диффеоморфизмами φ_t локальной группы, порожденной полем X: $\psi\varphi_t = \varphi_t\psi$. ■

(“Всеми” означает “всеми при достаточно малых t”, при больших t мы можем выйти за пределы области определения поля.)

В частности, дифференциалы всех диффеоморфизмов этой группы переводят поле в себя, т.к. локальная группа преобразований φ_t коммутативна. (Это, впрочем, и так ясно: интегральные кривые переходят в себя с линейным сдвигом параметра, так что вектор скорости должен перейти в вектор скорости, т.е. вектор поля – в вектор поля.)

3). Выпрямляющий диффеоморфизм. В третьих, дифференциальное уравнение, определенное в окрестности точки, с непрерывно дифференцируемой и не обращающейся в нуль правой частью может быть в некоторой окрестности этой точки “выпрямлено”: имеется *выпрямляющий диффеоморфизм*, который переводит уравнение в уравнение параллельного сдвига вдоль координатной оси, например, Ox^1. Мы не приводим детального доказательства (см. Арнольд “Обыкновенные дифференциальные уравнения”....), а опишем процедуру приведения.

Пусть вектор X_0 векторного поля X в точке $\mathbf{x}_0$ отличен от нуля. Рассмотрим (n-1)-мерную плоскость P, проходящую через $\mathbf{x}_0$ и не содержащую вектора X_0. Близкие векторы поля образуют с P ненулевые углы большие некоторого $\varepsilon > 0$.

Введем в P систему линейных координат с началом в $\mathbf{x}_0$, нумеруя их, начиная с x^2, и пусть x^1 совпадает с параметром вдоль интегральных кривых с нулевым значением для точек на P. Эта локальная система координат определяет требуемый диффеоморфизм Φ окрестности $\mathbf{x}_0$ на окрестность начала в $\mathbb{R}^k$: точки на интегральных кривых имеют постоянные координаты $x^i, i > 1$, а первая координата совпадает с параметром, определяемым уравнением; якобиан Φ всюду отличен от нуля, что достаточно проверить в точке $\mathbf{x}_0$, в силу непрерывности.

В $\mathbf{x}_0$ якобиан не нуль, т.к. дифференциал отображения Φ переводит репер, состоящий из репера в плскости P и X_0, в координатный репер в $\mathbb{R}^k$.

4. **Число вращения векторного поля в изолированной особой точке на плоскости**

Точка, в которой вектор поля равен нулю, называется особой точкой этого поля. С помощью степени отображения окружности в окружность (см. главу 3 п.11) вводится очень полезная характеристика изолированной особой точки векторного поля на плоскости (и тем самым также на любом двумерном многообразии).

Определение. Пусть дано векторное поле $X(\mathbf{x})$ в окрестности $U(O)$ начала $O \in \mathbb{R}^2$. Допустим, что $X(O) = 0$, но других особых точек поля X в U нет. Рассмотрим малый круг B с центром O и краем S и рассмотрим векторы поля в точках $\mathbf{x} \in S$. Каждый такой вектор $X(\mathbf{x})$ после параллельного переноса в O определяет луч, который пересекает S в определенной точке. Обозначим ее $g(\mathbf{x})$. Мы получаем непрерывное отображение S в себя, которое имеет определенную степень $\deg g$. Эта степень называется *числом вращения* или *индексом* векторного поля X в особой точке O и обозначается $ind_O X$.

Мы можем взять для вычисления $ind_O X$ произвольное отображение f окружности S в $U \setminus O$, которое гомотопно в $U \setminus O$ тождественному отображению. Перенося вектор $X(f(\mathbf{x}))$ параллельно в O и, как и раньше, беря точку пересечения соответствующего луча с S, мы получим отображение S в себя, которое будет, очевидно, гомотопно g, если f гомотопно тождественному отображению S.

Упражнения. Подсчитайте индекс в нуле векторных полей (x, y), $(-y, x)$, $(x, -y)$.

Покажите, что если в круге B задано векторное поле X без особых точек, то вращение этого поля по краю S круга равно нулю.

Из этого следует, что если в области U на плоскости задано векторное поле, вращение которого на кривой, ограничивающей область $V \subset U$, в которой эта кривая стягивается в точку, не равно нулю, то в V имеется особая точка. Это полезно для нахождения и изучения положений равновесия динамической системы, описываемой соответствующей системой дифференциальных уравнений.

Упражнение. Пусть на двумерной сфере S^2 дано касательное векторное поле X, не равное нулю в северном полюсе N. В круговой окрестности $U(N)$ поле может быть выпрямлено. Его индекс в N равен нулю. Замыкание дополнения $S^2 \setminus U$ может быть диффеоморфно отображено на круг в плоскости (например, центральной проекцией из N).

Покажите, что "с точки зрения" этого круга число вращения поля X на границе области равно 2. Так как оно не нуль, на сфере обязательно имеется особая точка поля.

5. **Скобка Ли**

Мы воспользуемся сейчас локальной группой преобразований, определенной векторным полем, чтобы ввести интересную операцию, которая является с одной стороны своего рода умножением (выполнен закон дистрибутивности) векторных полей, а с другой дифференцированием, которое естественным образом распространяет дифференцирование функций на дифференцирование векторных полей.

Обозначение. Эту операцию называют *скобкой Ли* и скобку Ли векторных полей X и Y обозначают $[X, Y]$. (Порядок существенен.)

Имеется несколько путей для введения этой операции. Сначала рассмотрим более формальный.

Первый способ введения скобки Ли. Векторные поля это *линейные операторы* на функциональном пространстве: в каждой точке каждой функции вектор поля сопоставляет число – ее производную по этому вектору. В результате получается функция от точки. Свойство линейности очевидно. Итак, векторное поле ставит функциям в соответствие функции, соблюдая линейность. (Мы, как обычно, не обсуждаем вопроса о классе гладкости и об области определения, считая, что все происходит "в достаточно малой окрестности" точки $\mathbf{x}$ многообразия и все "достаточно гладко").

Обозначение. Оператор, соответствующий векторному полю, будем обозначать той же буквой, но жирной. Например, $\mathbf{X}$ для поля X.

В таком случае, если даны два векторных поля X и Y, мы вправе рассмотреть композицию $\mathbf{YX}$, применяя сначала к данной функции оператор $\mathbf{X}$, а затем к результату оператор $\mathbf{Y}$. Мы получим, линейный оператор на пространстве функций. *Но этот оператор не будет дифференцированием!* Это легко проверить. Но столь же легко проверить, что дифференцированием будет *коммутатор* $\mathbf{YX} - \mathbf{XY}$ этих двух операторов. Это чисто формальное утверждение, пространство функций можно заменить на любое кольцо:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{Y}, \mathbf{X}](f \cdot g) = (\mathbf{YX} - \mathbf{XY})(f \cdot g) \quad &= \\
\mathbf{Y}(\mathbf{X}f \cdot g + f \cdot \mathbf{X}g) - \mathbf{X}(\mathbf{Y}f \cdot g + f \cdot \mathbf{Y}g) \quad &= \\
\mathbf{YX}f \cdot g + \mathbf{Y}f \cdot \mathbf{X}g + \mathbf{X}f \cdot \mathbf{Y}g + f \cdot \mathbf{YX}g \quad &- \\
\mathbf{XY}f \cdot g - \mathbf{Y}f \cdot \mathbf{X}g - \mathbf{X}f \cdot \mathbf{Y}g - f \cdot \mathbf{XY}g \quad &= \\
(\mathbf{YX} - \mathbf{XY})f \cdot g + f \cdot (\mathbf{YX} - \mathbf{XY})g \quad &.
\end{aligned}$$

Второй способ. Формальный способ оказался простым, но мало "инструктивным" и не наглядным. Рассмотрим более геометричный способ. Мы хотим распространить дифференцирование функций на векторные поля. Как можно продифференцировать одно векторное поле по другому?

Трудность в том, что для образования производной нужно до предельного перехода взять разность значений (в нашем случае векторного поля) в разных, хотя и близких точках. В случае функций никаких проблем нет, т.к. вычитать нужно два числа. Но в случае векторных полей нужно сравнивать два вектора в двух разных точках. Пока мы находимся в аффинном пространстве и в линейной системе координат, трудность исчезает, т.к. можно воспользоваться параллельным сдвигом (отождествляя векторы, получающиеся друг из друга при параллельном сдвиге).

Но в нелинейной системе координат, тем более для касательных векторов к подмногообразию, параллельностью нельзя воспользоваться, векторы в разных точках обычно не параллельны! (Скажем, на сфере.)

Здесь нам на помощь и приходит локальная группа преобразований, порождаемая векторным полем. Пусть мы хотим продифференцировать в многообразии M векторное поле X по векторному полю Y. (Дифференцирование векторного поля *по вектору* не определяется!)

Рассмотрим локальную однопараметрическую группу преобразований в окрестности точки $\mathbf{x}_0 \in M$, порожденную полем $Y(\mathbf{x})$. Пусть $\varphi_t(\mathbf{x})$ – диффеоморфизмы этой группы для малых t с матрицами Якоби (J_t) этого отображения в данной точке $\mathbf{x}_0$. Через эту точку проходит интегральная кривая $\varphi_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_t$, $\mathbf{x}_0$ отвечает нулевому значению параметра. Обозначим через X_t и Y_t векторы полей X и Y, приложенные в точке этой кривой с параметром t $(Y_t = \dot{\mathbf{x}}_t)$.

Дифференциал $d\varphi_t$ в точке $\mathbf{x}_0$ переводит вектор X_0 в вектор $\tilde{X}_t = (J_t)(X_0)$, приложенный в точке $\mathbf{x}_t$, который мы и будем сравнивать с вектором X_t.

Для образования производной нужно вычесть из значения поля в смещенной точке значение в данной точке, разделить на разность значений параметра и перейти к пределу, устремив эту разность к нулю. В нашем случае нужно из вектора X_t вычесть *приложенный к той же точке* $\mathbf{x}_t$ вектор $\tilde{X}_t$, который мы считаем вектором X_0, перенесенным потоком поля Y в эту точку. Эту разность надо разделить на t и перейти к пределу при $t \to 0$. Здесь приходится рассматривать предел по значениям меняющегося вектора, принадлежащим к разным касательным плоскостям, но в этом нет проблемы, т.к. все касательные плоскости мы уже соединили в одно многообразие – касательное расслоение. Итак,

$$[Y, X](\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{X_t - \tilde{X}_t}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{X(\varphi_t(\mathbf{x}_0)) - d\varphi_t(X(\mathbf{x}_0))}{t}.$$

Утверждение: *два определения скобки Ли совпадают.* Мы докажем это, показав, что они приводят к одинаковым выражениям в координатах. Начнем со второго способа.

Координаты $[Y, X]$ *по второму способу.* Линеаризуем оба вектора в числителе дроби по t, поскольку бесконечно малые высших порядков все равно исчезнут при переходе к пределу. Мы предполагаем, что в окрестности точки $\mathbf{x}_0$ дана локальная система координат x^i.

Вектор X_t. Берем покоординатное разложение (в нашем случае $dt = t$): $X_t^i \approx X_0^i + \frac{dX^i}{dt}|_0 t = X_0^i + \frac{\partial X^i}{\partial x^j}|_0 \frac{dx^j}{dt}|_0 t = X_0^i + \frac{\partial X^i}{\partial x^j}|_0 Y_0^j t$.
(Напомним, что вектор Y_t служит вектором скорости используемой здесь параметризации кривой.)

Вектор $\tilde{X}_t$: $\tilde{X}_t^i = (d\varphi_t|_{\mathbf{x}_0}(X_0))^i = (\frac{\partial(\varphi(\mathbf{x}))^i}{\partial x^j}|_0)(X_0^j) \approx$
$\approx (\frac{\partial(x^i + \dot{x}^i t)}{\partial x^j}|_0)(X_0^j) = (\delta_j^i + \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}|_0 t)(X_0^j) = X_0^i + \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}|_0 X_0^j t$.
Мы использовали матричное умножение. После вычитания и сокращения X_0^i и t получим ответ:

$$[Y, X]^i = (\frac{\partial X^i}{\partial x^j}|_0 Y_0^j - \frac{\partial Y_0^i}{\partial x^j}|_0 X_0^j).$$

Координаты $[Y, X]$ *по первому способу.* Такой же ответ мы получим для координат и при первом способе определения скобки Ли. Рассуждения здесь более простые.

YX. Получим сначала координатное выражение для применения композиции YX к функции f:

$$\begin{aligned} Y(X(f))|_0 \quad &= Y(\tfrac{\partial f}{\partial x^i} X^i)|_0 = \tfrac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x^i} X^i)}{\partial x^j}|_0 Y|_0^j = \\ &= \tfrac{\partial f}{\partial x^i}|_0 \tfrac{\partial X^i}{\partial x^j}|_0 Y|_0^j + \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}|_0 X|_0^i Y|_0^j. \end{aligned}$$

XY. Аналогично, имеем:

$$X(Y(f))|_0 = \frac{\partial f}{\partial x^i}|_0 \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}|_0 X|_0^j + \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}|_0 Y|_0^i X_0^j$$

.

Вычитая, получим, учитывая симметрию вторых частных производных и опуская индекс 0:

$$[Y, X](f) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j - \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} X^j = (\frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j - \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} X^j) \frac{\partial f}{\partial x^i}. \qquad \blacksquare$$

6. **Свойства скобки Ли**

Тождество Якоби. Скобка Ли удовлетворяет простым, но важным алгебраическим соотношениям.

Во-первых, она не коммутативна, но *кососоммутативна*: $[X, Y] = -[Y, X]$, что очевидно из первого определения (и, возможно, несколько удивительно с точки зрения второго).

Далее, возьмем двойную скобку Ли $[Z, [Y, X]]$ для трех векторных полей X, Y, Z и *циклируем* ее, т.е. рассмотрим сумму трех таких выражений, в которых поля переставляются в циклическом порядке. Получится нуль:

$$[Z, [Y, X]] + [Y, [X, Z]] + [X, [Z, Y]] = 0. \qquad L$$

Это прямо следует из первого определения скобки, поскольку эта сумма разложится на шесть пар взаимно сокращающихся слагаемых.

Это очень важное соотношение, называемое *тождеством Якоби.* Оно означает, что векторные поля (определенные в одной и той же области) образуют *алгебру Ли.* Это *алгебра* в том смысле, что это – векторное пространство с умножением (скобкой). Правда, это умножение не только не коммутативно, но и не ассоциативно, что вытекает из тождества Якоби и кососоммутативности. Действительно, $[[Z, Y], X] = -[X, [Z, Y]]$, т.е. в формуле (L) первое и последнее слагаемое сократились бы в случае ассоциативности, и двойная скобка всегда была бы нулевой, что, конечно, не имеет места.

Однако, это умножение оправдывает свое название тем, что оно линейно по каждому сомножителю.

Используя кососоммутативность, тождество Якоби можно переписать в следующем виде:

$$[Y, [X, Z]] - [X, [Y, Z]] = [[Y, X], Z].$$

Т.е. скобка как оператор дифференцирования векторных полей есть коммутатор операторов, заданных полями-сомножителями. Это свойство мы проверяли для дифференцирования функций.

Сохранение скобки при диффеоморфизмах. Пусть даны три векторных поля X, Y, $Z = [X, Y]$ в области $U \subset \mathbb{R}^k$. (Мы можем рассматривать случай области аффинного пространства, поскольку общий случай полей на многообразии все равно к нему сводится стандартным образом с помощью локальных представителей.)

Пусть дан диффеоморфизм $\psi : U \to U_1$. Обозначим через $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, $\tilde{Z}$ образы данных полей при дифференциале $d\psi$.Нам нужно проверить, что $\tilde{Z} = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$. Проще всего это увидеть из координатного выражения скобки. Мы оставим эту проверку в качестве полезного упражнения.

Будем исходить из определения скобки Z как производной поля X по полю Y. Обозначим через φ_t диффеоморфизмы локальной группы Y. Дифференциал диффеоморфизма ψ переводит интегральные кривые Y в интегральные кривые $\tilde{Y}$ и диффеоморфизмы φ_t в диффеоморфизмы локальной группы $\psi\varphi_t\psi^{-1}$ (с сохранением параметра). При этом $d\psi d\varphi_t = d(\psi\varphi_t) = d(\psi\varphi_t\psi^{-1}\psi) = d(\psi\varphi_t\psi^{-1})d\psi$. Значит, сдвиг вектора X на величину параметра t вдоль интегральной кривой поля Y дифференциал ψ переводит в сдвиг вектора $\tilde{X}$ вдоль образа интегральных кривых на ту же величину параметра. В пределе мы получим, что производная Z перейдет в производную $\tilde{Z}$. ■

Сохранение скобки для подмногообразий. Пусть теперь даны два многообразия: M_2 и M_1 – гладкое подмногобразие M_2. Пусть снова даны три поля X, Y и $Z = [X, Y]$ в области $U \subset M_2$, пересекающей M_1. Допустим, что в точках принадлежащих M_1 поля X и Y касаются M_1. Тогда Z также касается M_1.

Для доказательства достаточно заметить, что если интегральная кривая поля Y пересекает M_1, то она (в силу теоремы единственности) целиком лежит в M_1. Поэтому диффеоморфизмы локальной группы поля Y переводят точки M_1 в точки M_1 и, значит, их дифференциалы переводят касательные векторы к M_1 в векторы касательные к M_1. В частности, образ поля X останется касательным к M_1 под действием такого диффеоморфизма. Разности векторов этих полей останутся касательными к M_1 и в пределе производная также будет касательной к M_1. ■

7. **Коммутирование векторных полей**

Равенство нулю скобки $[X, Y]$ означает, что векторные поля *коммутируют,* т.е. коммутируют диффеоморфизмы порожденных ими локальных групп.

Определение. Векторные поля X и Y, определнные в области U гладкого многообразия M, *коммутируют*, если для всех достаточно малых s и t

$$\varphi_t(\psi_s(\mathbf{x})) = \psi_s(\varphi_t(\mathbf{x})),$$

где φ_t – локальная группа поля X, а ψ_s – поля Y.

Это важное свойство может быть сформулировано иначе. Если мы сдвигаемся из точки A сначала по интегральной кривой поля X на величину параметра t и далее по интегральной кривой поля Y на величину параметра этого поля s, то мы придем в ту же точку, в какую попадем, если сначала сдвинемся на s по интегральной кривой Y, а затем на t по кривой X. Это прямо следует из определений.

Теорема. Векторные поля X и Y коммутируют тогда и только тогда, когда [X,Y]=0.

Доказательство. Можно считать, очевидно, что в данной точке вектор одного из полей не нуль. Пусть не нуль вектор поля Y. Построим для Y выпрямляющий диффеоморфизм в окрестности этой точки, переводящий его в единичное поле $\mathbf{e}_1$ параллельное оси x^1.

Так как скобка сохраняется при диффеоморфизме, ее координатное выражение показывает, что в нашем случае $[Y, X]$ переходит в дифференцирование X по первой координате (остальные координаты вектора $\mathbf{e}_1$ равны нулю, а координатs всех векторов $\mathbf{e}_i$ постоянны).

Если $[Y, X] = 0$, то и образ скобки, который равен скобке образов, есть нуль, и тогда поле X переходит в поле, производные которого по первой координате равны нулю, т.е. оно не меняется при диффеоморфизмах однопараметрической группы (в этом случае состоящей из параллельных сдвигов вдоль первой координатной оси.) Значит, поле X также не меняется (вектор поля переходит в вектор поля) при диффеоморфизмах локальной группы поля Y.

Обратно, если при сдвиге по локальной группе поля Y поле X переходит в себя, то уже до перехода к пределу при вычислении производной разность в числителе равна нулю. ■

8. **Дифференциалы функций и ковекторы**

Дифференциалы функций и ковекторы. Рассмотрим формулу

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} = v^i \frac{\partial F}{\partial x^i}. \tag{d}$$

При фиксированном векторе $\mathbf{v}$ мы получали линейный функционал на бесконечномерном пространстве гладких функций.

Фиксируем теперь F (в окрестности начала в $\mathbb{R}^n$). Мы получим линейную форму на векторах $\mathbf{v}$ пространства $\mathbb{R}^n$, которая в курсе математического анализа называлась *дифференциалом* функции F и также *градиентом* F. Она обозначается dF или ∇F.

В эти термины вкладывается не совсем одинаковый смысл. Название дифференциал согласовано с общим применением этого термина к отображению, в данном случае – в прямую, т.к. производные $\frac{\partial F}{\partial x^i}$ составляют $(1 \times n)$-матрицу Якоби этого отображения.

Линейная форма, т.е. линейная функция на векторах, однозначно записывается как $c_i x^i$, причем ее коэффициенты служат ее координатами в сопряженном линейном пространстве относительно базиса этого пространства двойственного к данному базису в $\mathbb{R}^n$.

(Напомним, что базису $\mathbf{e}_i$ в линейном пространстве V, отвечает в сопряженном пространстве V^*, состоящем из линейных форм на V, двойственный (или сопряженный) базис $\mathbf{e}^i$ (нумерация индексами вверху!). Значение формы $\mathbf{e}^i$ на $\mathbf{e_j}$ равно δ^i_j, т.е. нулю, если $i \neq j$, и 1, если $i = j$. Значение формы $\alpha_i \mathbf{e}^i$ на векторе $v^i \mathbf{e}_i$ равно $\alpha_i v^i$.)

Дифференциал F, рассматриваемый как линейная форма (и называемый в этом случае часто *градиент*), оказывается элементом сопряженного пространства. Из приведенной формулы производной видно, что его координатами являются частные производные $\frac{\partial F}{\partial x^i}$. В нашем случае в качестве исходного пространства V мы берем $\mathbb{R}^n$ с фиксированным началом (точнее – пространство V_0). Договоримся обозначать базисные векторы, связанные с выбранной системой координат x^i, через $\frac{\partial}{\partial x^i}$, а сопряженный базис через dx^i. Тогда запись дифференциала F получит естественный смысл как координатная запись линейной формы: $dF = \frac{\partial F}{\partial x^i} dx^i$ (в первом сомножителе индекс i нижний, а во втором – верхний). Обозначение $\frac{\partial}{\partial x^i}$ напоминает о смысле вектора как дифференцирования и может рассматриваться как обозначение функционала: этот функционал переводит функцию в значение ее частной производной в данной точке (производную по вектору-орту i-ой координатной оси: $\frac{\partial F}{\partial x^i} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{e}_i}$).

Напомним, что если в пространстве V мы переходим от базиса $\mathbf{e}_i$ к базису $\mathbf{f}_i$ с помощью матрицы A (ее элементы служат коэффицентами в выражении нового базиса через старый), то в сопряженном пространстве “сопряженный” переход от базиса $\mathbf{e}^i$ к базису $\mathbf{f}^i$ осуществляется матрицей $(A^T)^{-1}$, т.е. обратной к транспонированной. Эти переходы называются контрагредиентными (противоположными) по отношению друг к другу. Элементы V^* называются *ковекторами.*

Градиент функции ∇F служит элементом сопряженного пространства к касательному пространству или *ковектором.*

Замечание. Всякий ковектор a_i можно представить как градиент в точке некоторой функции, например, как градиент функции $a_i x^i$.

Обозначения. Сейчас мы убедимся в удобстве той системы обозначений, которую мы постепенно строим. Запишем матрицу замены координат как матрицу Якоби (имея в виду возможность нелинейных замен). При этом новые координаты нам удобно будет обозначать *штрихованными индексами*: $x^{i'}$. Тогда имеем формулы преобразований:

$$\text{вектор } \mathbf{x}\colon x^{i'} = \tfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}x^i, \mathbf{x} = x^i\tfrac{\partial}{\partial x^i} = x^i\tfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\tfrac{\partial}{\partial x^{i'}} = x^{i'}\tfrac{\partial}{\partial x^{i'}}$$
$$\text{ковектор } \mathbf{a}\colon a_{i'} = \tfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}a_i, \mathbf{a} = a_i dx^i = a_i\tfrac{\partial x^i}{\partial x'}dx^{i'} = a_{i'}dx^{i'}$$
$$\text{значение } \mathbf{a}(\mathbf{x})\colon a_{i'}x^{i'} = a_k\tfrac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\tfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^s}x^s = a_i x^i$$

Последнее равенство следует из того, что $(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i})$ и $(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}})$ являются взаимно обратными матрицами как матрицы Якоби обратных преобразований (суммирование по i' дает 1 при $k = s$ и нуль в противном случае), причем транспонирование учитывается суммированием по верхнему индексу матрицы.

Кокасательная плоскость. Множество всех ковекторов в данной точке $\mathbf{x}$ подмногообразия $M \subset \mathbb{R}^n$ размерности p образует линейное p-мерное пространство двойственное касательной плоскости $\tau_{\mathbf{x}}(M)$. оно называется *кокасательной плоскостью* к M в этой точке и обозначается $\tau^*_{\mathbf{x}}(M)$.

Б. Кокасательное расслоение и ковекторные поля

1. **Ковекторные поля (пфаффовы формы)**

Градиентные поля. До сих пор мы рассматривали формулу (d) в одной точке, к которой приложен вектор $\mathbf{v}$. Рассмотрим ее в целой окрестности, заменив вектор векторным полем X. При фиксированном поле мы получаем *оператор* $\mathbf{X}$, переводящий функцию F в функцию XF – ее производную по полю X, так что мы имеем $dF(X) = XF$. (Это оператор, действующий в одном пространстве функций, если рассматриваются только бесконечно дифференцируемые функции, и оператор из одного пространство в другое с функциями с числом производных на единицу меньше, если допускаются все функции данного класса гладкости.)

Если в той же формуле (d) фиксировать функцию, то получится оператор, который каждому гладкому векторному полю ставит в соответствие функцию – производную F по этому векторному полю. Но мы можем интерпретировать это действие еще и иным образом. Именно, в каждой точке мы имеем линейную функцию или ковектор $dF(X(\mathbf{x}))$. Иными словами мы имеем поле ковекторов (обычно говорят *ковекторное поле*), которое называется также *градиентным* и обозначается как dF, так и ∇F.

Ковекторные поля. Естественно теперь рассмотреть общее ковекторное поле, т.е. объект, который каждой точке подмногообразия M ставит в соответствие ковектор в этой точке, т.е. линейную функцию на касательном пространстве (или вектор из кокасательного пространства в этой точке). Мы, конечно, будем рассматривать гладкие, т.е. непрерывно дифференцируемые поля.

Кокасательные ковекторные поля на многообразии. Фиксируем некоторую карту с локальными координатами x^i, ей в каждой касательной плоскости отвечает координатный репер $\frac{\partial}{\partial x^i}$ и сопряженный репер dx^i в кокасательной плоскости. Тогда линейная форма, отвечающая нашему полю в каждой точке $\mathbf{x}$, имеет запись $a_i(\mathbf{x})dx^i$, где $a_i(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируемые функции координат – условие, которое не зависит от выбора карты. Следовательно, определено понятие гладкого ковекторного поля на всем многообразии.

Двойственность векторных и ковекторных полей. Итак, имеются два бесконечномерных линейных пространства, связанных с гладким многообразием M: пространство гладких векторных и гладких ковекторных полей (понимая для простоты под гладкостью бесконечную дифференцируемость). Естественно ожидать, что эти пространства сопряжены. Однако, естественное их спаривание – поточечное – дает не число, а функцию $(\boldsymbol{\alpha}, X)|_{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\alpha}|_{\mathbf{x}}(X|_{\mathbf{x}})$. Чтобы получить число, мы могли бы проинтегрировать эту функцию по M, но мы пока не умеем интегрировать по произвольному многообразию. (Впрочем, каждое из этих двух пространств оказывается только частью полного двойственного пространства для другого. Полные пространства функционалов строятся с помощью обобщенных функций.)

Пространство полей – модуль над кольцом функций. Однако, есть еще одна точка зрения, которая для нас сейчас также преждевременна, но ее зато можно изложить теперь без больших усилий. Она состоит в том, чтобы рассматривать в качестве коэффициентов не числовое пространство $\mathbb{R}$, а функциональное $C^\infty(M)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на M. (Т.е. рассматривать конечные суммы векторных или ковекторных полей, умноженных на функции.)

За это стоит то, что такое спаривание линейно по обоим аргументам, в частности, $f(\boldsymbol{\alpha}(X)) = (f\boldsymbol{\alpha})(X) = (\boldsymbol{\alpha}(fX))$, где f – гладкая функция. Эти выражения равны $f(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}_i(\mathbf{x})X^i(\mathbf{x})$.

(Эта линейность по отношению к функциям имеет большое значение. Она связана с *тензорным* характером этих пространств. Отметим, что скобка Ли не является линейной по отношению к функциям, а только по отношению к константам.)

Против этого – то, что пространство функций $C^\infty(M)$ алгебраически не является полем (не всегда определено деление), и мы не можем сказать, что пространства векторных и ковекторных полей являются векторными пространствами над $C^\infty(M)$ (хотя они и являются векторными пространствами над $\mathbb{R}$). Но благодаря свойству линейности над $C^\infty(M)$ мы можем пользоваться языком линейной алгебры.

(Общий случай, когда сложение в абелевой группе A оказывается линейным по отношению к умножению на элементы некоторого кольца, выражают, говоря, что A есть *модуль над кольцом*.)

В частности, можно говорить о базисах. Если базис имеется, модуль называется *свободным*. В нашей локальной ситуаци он имеется! В обоих наших пространствах для каждой карты имеются *базисы над* $C^\infty(M)$, это сопряженные координатные реперы $\frac{\partial}{\partial x^i}$ и dx^i. (Т.е. векторное поле $X(\mathbf{x})$ однозначно представляется в форме $x^i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x^i}$, а ковекторное – $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ в форме $\boldsymbol{\alpha}_i(\mathbf{x})dx^i$.)

Еще раз: это базисы над $C^\infty(M)$, а не над $\mathbb{R}$. Кроме того, это локальные базисы, заданные в пределах одной карты, хотя поля могут быть заданы на всем многообразии или на большой его части и базисы могут не существовать во всей области задания!

(Модуль, имеющий базис, называется свободным. Обычное векторное пространство – свободный модуль над числовым полем. Но, скажем, поля касательных векторов на двумерной сфере S^2 образуют модуль над $C^\infty(S^2)$, не являющийся свободным.)

Точность (интегрируемость) формы. Поле ковекторов называется также *дифференциалом* или пфафовой формой. В отличие от ситуации в одной точке (где каждая линейная форма представляется дифференциалом функции) мы не можем сказать, что каждый дифференциал является градиентным или *полным*, т.е., что имеется функция, дифференциалом которой он является. (Чтобы определить общий дифференциал, *нужно k функций* – k его координат.) Для этого должно быть выполнено условие равенства производных $\frac{\partial a_i}{\partial x^j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$, известное из курса математического анализа как условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.

В случае, если это имеет место, говорят, что соответствующая пфаффова форма *интегрируема* или *точная*. Напомним, что это условие не является достаточным, но будет таким в *односвязной* области, во всяком случае для координатной области, определенной на кубе.

Векторные поля также иногда задаются посредством одной функции, но это требует введения тех или иных дополнительных структур на многообразии. Некоторые такие случаи нам встретятся в дальнейшем.

2. **Кокасательное расслоение** τ^*M

Ковекторное поле $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ на многообразии M определяется заданием ковектора в каждой его точке, т.е. линейной формы на касательной плоскости в каждой его точке $\mathbf{x}$.

Чтобы иметь право говорить о непрерывности или гладкости поля, мы должны рассматривать его как отображение одного топологического пространства в другое или как отображение гладкого многообразия M в другое гладкое многообразие. Прямой путь для этого - объединить все ковекторы во всех точках многообразия в одно пространство, которое можно было бы представить как новое гладкое многообразие, расслоенное над M, так что кокасательные поля оказывались бы его сечениями. Так мы поступали выше с касательными векторами для определения гладких векторных полей.

Здесь мы пошли обходным путем через локальное представление ковекторного поля с помощью координатного базиса и опираясь на то, что свойство гладкости не зависит от выбора координатного представления. Поле гладко, если оно гладко в каждой карте.

Однако можно и для ковекторных полей определить единое пространство, аналогичное касательному расслоению, которое будет называться кокасательным расслоением и которое как множество состоит из кокасательных плоскостей (*расслоено* на плоскости, как и касательное расслоение).

Для подмногообразия M в $\mathbb{R}^n$ мы имели возможность построить τM прямо как подмногообразие пространства $\mathbb{R}^{2n}$ векторов аффинного пространства $\mathbb{R}^n$. Проделать это же для ковекторов немного сложнее, чем для векторов. Мы построим $\tau^* M$ для всех гладких многообразий M класса гладкости 2, непосредственно задав гладкую структуру атласом, как это было сделано для касательного расслоения.

Теперь для нас это уже стандартная задача. Мы должны построить атлас и указать координатные переходы.

Атлас кокасательного расслоения. Для данной карты $\varphi : W \to U \subset M$ мы имеем: во-первых, стандартное координатное поле $\mathbf{e}_i|_{\mathbf{t}}$ в точках $\mathbf{t} \in W \subset \mathbb{R}^k$, затем порожденное им координатное касательное поле реперов $\frac{\partial}{\partial x^i}$ в точках $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{t})$ области U (x^i – стандартные координаты в $\mathbb{R}^k$ и они же – нелинейные координаты в U), наконец, двойственное координатное поле кореперов $dx^i|_{\mathbf{x}}$.

Каждый касательный (можно сказать и “кокасательный”) ковектор $\boldsymbol{\alpha}$ определен однозначно, во-первых, точкой $\mathbf{x} \in U$ и, во-вторых, своими координатами c_i (индексы внизу!) в кокасательной плоскости $\tau^*_{\mathbf{x}}$, с помощью которых он получает выражение $c_i(\mathbf{x})dx^i|_{\mathbf{x}}$.

Таким образом ковектору $\boldsymbol{\alpha}$ отвечает точка в пространстве $U \times \mathbb{R}^k$ (второй сомножитель, строго говоря, сопряжен стандартному линейному пространству, но он также изоморфен ему). Эта точка имеет стандартные координаты $(x^1, \ldots, x^k, c_1, \ldots, c_k)$ в пространстве $\mathbb{R}^{2k}$. (Мы можем заменить $U \subset M$ на $W \subset \mathbb{R}^k$, с помощью отображения карты.) Мы получаем взаимно однозначное отображение множества всех ковекторов в точках U на открытое подмножество $W \times \mathbb{R}^k$ пространства $\mathbb{R}^{2k}$. Это – требуемая карта и множество таких карт является атласом для $\tau^* M$, т.к. каждый касательный ковектор лежит в одной из таких карт.

Координатная замена. Пусть даны две карты атласа построенного для $\tau^* M$. Это значит, что даны две карты $\varphi_i : W_i \to U_i$, $i = 1, 2$ исходного атласа для M с координатным переходом $\psi : W_1 \to W_2$ (как и раньше, можно считать, что $U_1 = U_2$). В кокасательной плоскости $\tau^*_{\mathbf{x}}$ индуцируется линейная замена с матрицей $Q = J^{-1T}$, где J – матрица Якоби координатной замены ψ, а T означает транспонирование.

Тогда матрица координатной замены для двух карт построенного атласа будет иметь блочный вид

$$\begin{pmatrix} J & 0 \\ Z & Q \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен 1, что, согласитесь, довольно неожиданно!

Ковекторное поле $\alpha(\mathbf{x})$ есть отображение $\alpha : M\tau^* M$ многообразия в его кокасательное расслоение и поэтому можно говорить о его непрерывности и гладкости.

Для кокасательного расслоения *проекция* $p^* : \tau^* M \to M$ определена так же, как для τM (каждый ковектор отображается в точку его приложения) и ковекторное поле $\alpha(\mathbf{x})$ есть сечение, т.е. $p^*(\alpha(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$.

3. **Физические интерпретации**

Очень полезно дать физические иллюстрации введенным понятиям.

Силовое поле $F(\mathbf{x})$ можно рассматривать как ковекторное. Действительно, в каждой точке $\mathbf{x}$ “малому смещению” (вектору) $d\mathbf{x}$ оно ставит в соответствие число – работу на этом смещении: $dA = F(\mathbf{x})d\mathbf{x}$.

Хотя обозначение dA принято, его не следует понимать как дифференциал функции A. Для этого поле должно быть *потенциальным*, т.е. ковекторное поле должно быть точным (что, как мы уже вспомнили, локально обеспечивается известным условием $\frac{\partial F_i}{\partial x^j} = \frac{\partial F_j}{\partial x^i}$.)

Функция, дифференциал которой совпадает с $-dA$, определена (если существует) с точностью до добавления константы и называется потенциальной энергией системы, которая порождает данное силовое поле.

Теплота, температура и энтропия. В теории тепла (термодинамике) рассматривается форма $P_i dV^i$, в которой P_i – давление, V^i – объем i-ой компоненты системы, которая имеет также *внутреннюю энергию* U^i. Величины V^i вместе с U^i рассматриваются как координаты составной системы, а P_i как коэффициенты формы, понимаемой как работа, изменяющая внутреннюю энергию. Изменение, не связанное с совершенной работой, приписывается (в феноменологической теории, не основанной на молекулярно-кинетических представлениях) энергии, сообщенной или отнятой через *передачу тепла*, без видимого перемещения масс. Поэтому эту форму записывают в виде

$$dQ = P_i dV^i + dU_i.$$

Это – первый закон термодинамики, закон сохранения энергии.

В случае однокомпонентной системы PdV простое интегрирование дает функцию (с точностью до аддитивной константы), для которой эта форма есть ее дифференциал. Если более реальная однокомпонентная система записана с внутренней энергией – $PdV + dU$, то такая функция уже не обязательно существует, но можно показать (позже мы это проделаем), что имеется такая функция (так называемый *интегрирующий множитель*) $\frac{1}{T}$, после умножения на которую форма станет полным дифференциалом некоторой функции $S(V)$: $dS = \frac{1}{T}PdV + \frac{1}{T}dU$. Функция $T(V)$ является *температурой*, а $S(V)$ – *энтропией* системы.

В однокомпонентном случае существование этих функций, имеющихся для всякой формы (т.е. для любой пары функций P, U), является математическим, а не физическим фактом, т.е. не выражает физического закона, физического ограничения. Важно, что такие же две функции существуют для любой многокомпонентной термодинамической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия (без теплообмена, мы не можем здесь вдаваться в обсуждение этих понятий). Хотя уже для формы в трехмерном пространстве в математически типичном случае они, *как правило*, не существуют.

Математическое условие существования этих функций дается *теоремой Фробениуса*, с которой мы будем встречаться и далее, особенно во втором томе.

Физически оказывается, что существование этих функций эквивалентно тому, что для *равновесной системы* выполнен второй закон термодинамики, согласно которому тепло не может быть передано от холодного тела к горячему. Это означает выполнение условий *теоремы Каратеодори*: если форма такова, что не для всяких двух точек в координатном пространстве (V_i, U_i) найдется соединяющий их гладкий путь, векторы скорости которого в любой момент обращают ее в нуль, то условия Фробениуса будут выполнены (локально) и функции S, T существуют.

Подробнее см. небольшую книгу "Геометрические методы математической физики" Б.Шутца (1984).

Глава 8. **Реперные поля. Ориентируемость. Матричные группы**

А. Реперные поля. Ориентация и матричные группы

1. **Реперные поля. Параллелизуемость**

Координатные реперы. Мы встретились уже с одним случаем, когда заданы сразу k векторных полей в координатной окрестности, линейно независимых в каждой точке. Это координатный репер $(\frac{\partial}{\partial x^i})$. Он определен по координатной системе и только в пределах одной карты.

Реперные поля. Очевидное обобщение этой ситуации состоит в том, чтобы рассмотреть на k-мерном многообразии p векторных полей, линейно независимых в каждой точке. Если, кроме того, их порядок фиксирован, то мы получаем в каждой точке p-репер в касательной плоскости. Поэтому в таком случае говорят о *p-реперном поле* (или иногда о *подвижном p-репере*). Если $p = k$, говорят просто о реперном поле.

Замечание. Мы определили реперное поле, опираясь на понятие векторного поля, как набор векторных полей линейно независимых в каждой точке. Разумеется, можно дать определение и по аналогии с тем, как были определены векторные и ковекторные поля. Иными словами можно ввести многообразие $V_p(M)$, точками которого являются всевозможные p-реперы, векторы которых являются касательными к M в общей точке. При этом отображение, которое сопоставляет реперу точку его приложения, будет гладким расслоением. Реперное поле в таком случае определяется как сечение такого расслоения. Однако, мы ограничимся локальным определением, данным выше, отсылая интересующихся к книгам, где теория раслоений излагается с большей полнотой (например, ...)

Возникает два естественных вопроса: существует ли на всем многообразии хотя бы одно реперное поле и можно ли каждое реперное поле локально представить как координатное.

Параллелизуемость. Если реперное поле существует, то говорят, что многообразие *параллелизуемо.* Действительно, возникает естественная возможность определить равенство векторов, приложенных в разных точках (и назвать их параллельными): векторы равны, если их координаты в реперах, взятых в точках их приложения, равны. Эта параллельность все же имеет свои дефекты, о чем возможно будет сказать лишь во втором томе.

Но даже и такая параллельность существует далеко не на всех многообразиях. Например, двумерная сфера не параллелизуема. Это – любопытная *теорема о еже* (“ежа нельзя причесать”), о ней также во втором томе. Не параллелизуемы неориентируемые многообразия вроде листа Мебиуса. Зато, как мы скоро увидим, параллелизуемы матричные группы.

2. **Интегрируемость и коммутативность реперного поля**

Интегрируемость. На второй вопрос мы готовы дать достаточно полный ответ. Координатные реперы обладают очевидной коммутативностью:

Предложение. Скобки Ли координатных полей $\frac{\partial}{\partial x^i}$ равны нулю.

Доказательство. Проверяется непосредственно. ■

Значит, необходимым условием, чтобы набор линейно независимых в каждой точке векторных полей X_i оказался координатным для некоторой системы локальных координат, является равенство нулю их попарных скобок Ли. Оно и достаточно.

Лемма. Если попарные скобки Ли k векторных полей X_i линейно независимых в каждой точке области U k–мерного многообразия равны нулю, то эти поля образуют поле координатных реперов в малой окрестности $U(A)$ каждой точки $A \in U$, т.е. для A имеется карта $\varphi : W(A) \to U(A)$, дифференциал которой в каждой точке $\mathbf{t} \in W$ переводит канонический координатный репер $(\mathbf{e}_i(\mathbf{t}))$ в репер векторов $X_i(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{t})$.

Доказательство. Начнем с того, что проведем через A интегральные кривые γ_1 и γ_2 векторных полей X_1 и X_2, принимая, что значения их параметров в точке A равны нулю. Затем через каждую точку γ_1 проведем интегральную кривую поля X_2, также считая, что в этих точках значение параметров нулевое. Мы получим отображение малого квадрата Q с центром в начале $O \in \mathbb{R}^2$ в окрестность точки A в M, при этом векторы поля X_2 будут образом координатного орта в каждой точке Q. Действительно, параметр на каждой из проведенных кривых будет совпадать с координатой x^2 соответствующей точки из Q.

В силу того, что локальные группы полей X_1 и X_2 коммутируют, мы можем утверждать, во-первых, что интегральные кривые поля X_1, проведенные через точки γ_2 лежат в образе Q. Во-вторых, эти кривые будут образами прямых, параллельных оси Ox_1. В третьих, если мы также примем, что в точках γ_2 значение параметров этих кривых нулевое, то параметром точки на такой кривой будет служит координата x_1 ее прообраза в Q и, значит, вектор X_1 будет образом координатного орта.

Это построение очевидным образом продолжается. Оставим это в качестве упражнения. ■

3. **Теорема Фробениуса**

Более слабое утверждение имеет фундаментальное значение. Оно относится к существенно более общей ситуации. Мы говорим об одной из форм *теоремы Фробениуса*, которую мы упомянули в предыдущей главе и с которой нам еще предстоит встречаться.

Если в $\mathbb{R}^n$ дано поле k-реперов $X_i, 1 \le i \le k$, и k-мерное подмногообразие M так, что все поля X_i в точках M касаются M, то попарные скобки этих полей в точках M также касаются M.

Ясно, что данное реперное поле порождает реперное поле на M и так как число векторных полей в реперном поле совпадает с размерностью многообразия, мы получаем в каждой касательной плоскости к M возможность выразить попарные скобки полей X_i через сами поля X_i :

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k.$$

Пусть теперь нам дано k-реперное поле X_i и мы хотим отыскать k-мерные подмногообразия M, в точках которых это реперное поле было бы касательным, т.е. все k векторов поля были бы в точке M касательными.

(Можно заметить, что эта задача естественно обобщает задачу интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения, к которой она сводится в случае $k = 1$.)

Оказывается, что для этого достаточно, чтобы попарные скобки Ли векторных полей линейно в каждой точке выражались через векторы этих полей, т.е., чтобы существовали функции $c_{ij}^k(\mathbf{x})$, для которых было бы выполнено условие (Ф).

4. **Реперные поля вдоль кривых**

Можно говорить о реперном поле, заданном не во всех точках многообразия и не обязательно в открытом подмножестве. Более того, рассматривают реперы, зависящие от некоторого параметра t, который чаще всего предполагается принадлежащим некоторому интервалу (a, b) числовой прямой. Иными словами предполагается, что репер задан в каждой точке параметризованной кривой $\mathbf{x}(t)$. Это значит, что каждому значению параметра t отвечают векторы репера в касательной плоскости в точке $\mathbf{x}(t)$. При этом кривая может быть достаточно произвольной, например, с кратными самопересечениями или сжавшейся в одну точку. В таком случае в одной точке многообразия будет иметься несколько или даже бесконечно много реперов.

Поле реперов $X_i(t)$ является гладким, если оказываются гладкими соответствующие отображения параметра в касательное расслоение.

Сейчас мы воспользуемся реперными полями вдоль кривых для анализа понятия ориентируемости.

5. **Ориентация**

Ориентация линейного пространства. Напомним, что в $\mathbb{R}^n$ имеется два класса реперов и выбор одного из них в качестве "положительного" означает ориентацию $\mathbb{R}^n$. Важна не "положительность" (это просто фигуральное выражение), а возможность сравнения реперов с точки зрения принадлежности к одному классу.

Реперы в одном классе переводятся друг в друга непрерывным перемещением в пространстве. Иначе говоря, имеется параметризованная кривая $\mathbf{r}(t)$, соединяющая точку приложения одного репера с точкой приложения другого, и для каждого значения t параметра имеется репер в точке $\mathbf{r}(t)$, непрерывно зависящий от t и совпадающий в двух конечных точках с данными там реперами.

В частности, каждый репер может быть таким образом переведен в репер, приложенный к началу O. Далее мы можем, не меняя начала (и, конечно, сохраняя линейную независимость) перевести репер в положение, в котором все его векторы, кроме одного, совпадают с векторами с такими же номерами одного фиксированного репера. Мы фактически доказали это, когда показывали линейную связность двух компонент группы $\mathbf{GL(n}, \mathbb{R})$. Последние векторы обоих реперов можно сделать коллинеарными, но их направления либо совпадут, либо будут противоположными. Этим доказывается, что имеется не более двух классов. То, что их ровно два, следует из сравнения знаков определителей матриц, выражающих векторы одного репера в другом репере. Второй класс получается изменением направления одного из векторов в каждом репере первого класса. Знак определителя этого перехода минус, но внутри каждого из двух классов знаки положительны, т.к. не меняются при непрерывном изменении репера.

Напомним, что пока мы говорили о реперах и ориентации в $\mathbb{R}^n$.

Ориентация многообразия. Это определение годится для произвольного многообразия:

Определение. Связное многообразие *ориентируемо*, если все реперы во всех касательных плоскостях можно разбить на два класса так, что реперы из одного класса соединимы кривой с непрерывным полем реперов, а из разных нет.

(Подробнее: для двух реперов из одного класса имеется кривая, соединяющая точки их приложения и непрерывное поле реперов вдоль кривой, совпадающее в концах с данными реперами.)

Нужно только сделать несколько замечаний.

Неориентируемые многообразия. Лист Мебиуса. Пример известного *листа Мебиуса* показывает, что существуют *неориентируемые многообразия*. В нем каждые два репера переводятся друг в друг непрерывно, т.е. имеется только один класс реперов.

Лист Мебиуса можно представить, например, с помощью такого построения. В каждой точке единичной окружности плоскости Oxy возьмем отрезок единичной длины с центром в этой точке и в плоскости, проведенный через нее и ось Oz, который отклонен от вертикали на угол 2φ, где φ – азимут точки. Заметьте, что концы отрезков образуют одну окружность, два раза обходящую вокруг оси Oz.

Упражнения. Проективная прямая на проективной плоскости имеет окрестность гомеоморфную листу Мебиуса. Множество прямых на плоскости гомеоморфно открытому листу Мебиуса (т.е. без граничной окружности) и гомеоморфно проективной плоскости без одной точки.

Ориентация несвязного многообразия. Во-вторых, если многообразие имеет несколько связных компонент, то ориентация определяется отдельно для каждой компоненты, если она существует, так что если компонент k и все компоненты ориентируемы, то возможных ориентаций многообразия 2^k. Если имеется неориентируемая компонента, то все многообразие считается неориентируемым.

Ориентирующий атлас. Наконец, ориентируемость многообразия может быть определена иным путем, через атласы. Пусть дан атлас с картами φ_i, он называется *ориентирующим*, если в каждой точке, принадлежащей двум его картам, якобиан перехода имеет положительный знак. Многообразие *ориентируемо*, если оно имеет ориентирующий атлас.

Если в одной точке даны два репера и определитель матрицы, выражающей один из них в другом положителен, мы скажем, что положителен переход от одного репера к другому. Аналогично для перехода от одной карты к другой, если положительны якобианы перехода во всех общих точках. В противном случае переходы называются отрицательными.

Теорема. Оба определения ориентируемости многообразия согласованы.

Доказательство. Заметим сначала, что все для каждой карты определены положительные реперы и если карта связна, то они соединимы непрерывным путем, т.е. кривой с непрерывным полем реперов.

Пусть многообразие ориентируемо в силу первого определения, т.е. все реперы разбиты на два класса. Два репера в одной точке, связанные положительным переходом, принадлежат одному классу. (Почему?)

Обратно, если два репера в одной точке принадлежат одному классу, то переход от одного к другому положителен. В самом деле, в силу связности многообразия любой репер соединим с каким-нибудь репером в данной точке. Если одному классу принадлежат два репера, связанные отрицательным переходом, то тогда в многообразии все реперы принадлежат одному классу.

Для каждого репера можно построить связную карту так, что он будет для нее координатным. (Это простое упражнение.) Выберем один из двух классов реперов и возьмем в каждой точке один репер из этого класса. Построив для каждого из них такую карту, мы получим требуемый атлас. Докажем это.

Все координатные реперы во всех построенных картах принадлежат выбранному классу. Пусть точка $\mathbf{x}$ принадлежит двум картам, построенным для реперов, взятых в точках $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Координатные реперы двух карт в точке $\mathbf{x}$ принадлежат одному классу и, следовательно. связаны положительным переходом. Но эта матрица есть матрица Якоби координатного преобразования в данной точке. Значит, многообразие ориентируемо в смысле второго определения.

Обратно. Пусть дан ориентирующий атлас, карты которого, очевидно, можно считать связными. Для каждой его карты возьмем в каждой точке координатный репер. Эти реперы положительно связаны в смысле первого определения в пределах одной карты, т.к. карты связны. Если карты пересекаются, то их координатные реперы в точке, лежащей в пересечении, связаны положительным переходом и потому лежат в одном классе. Тогда и все координатные реперы этих двух карт лежат в одном классе. В силу связности многообразия тогда в одном классе лежат все координатные реперы карт атласа. Отсюда вытекает, что имеется не более двух классов. Если в какой-нибудь точке взять репер ориентированный противоположно к координатному, то он не может быть соединен ни с каким из выбранных координатных реперов, т.к. такой путь можно было бы разбить на конечное число кусков, каждый из которых принадлежит одной окрестности. Вдоль одного куска знак определителя репера по отношению к координатным реперам не меняется из-за непрерывности, а при переходе к другой окрестности он также сохраняется в силу условия положительности якобиана координатного преобразования. Значит, имеется два класса, т.е. многообразие ориентируемо в первом смысле. ■

6. **Использование ориентируемости**.

Само по себе свойство ориентируемости или неориентируемости любопытно, но, конечно, важно знать, как оно применяется. Мы не можем здесь говорить об этом достаточно подробно и ограничимся парой замечаний.

Топологическая инвариантность. Во-первых, это свойство, оба определения которого относятся к дифференциальной геометрии (используют знак якобиана), топологически инвариантно, как мы сможем увидеть только во втором томе. Например, мы можем утверждать, что лист Мебиуса не гомеоморфен кольцу – плоской области между двумя концентрическими окружностями. (Это, впрочем, следует также из того, что лист Мебиуса ограничен одной окружностью, а кольцо двумя.)

Стороны подмногообразий. Ориентируемое подмногообразие размерности на единицу меньшую размерности объемлющего линейного пространства $\mathbb{R}^n$ автоматически оказывается *двусторонним*: близкие к нему точки $\mathbb{R}^n$ можно разбить на лежащие с положительной и лежащие с отрицательной стороны. В самом деле, выберем в касательной плоскости в точке подмногообразия ориентирующий репер. Его можно дополнить последним вектором (скажем, ортогональным плоскости) до полного n-репера одним из двух способов. Назовем положительным дополняющий вектор, если полученный репер оказывается ориентирующим для $\mathbb{R}^n$. Этот вектор указывает в положительную сторону от многообразия. Точки, близкие к связному многообразию и лежащие с одной и той же стороны, можно соединить путем, остающимся с этой стороны и не огибающим края.

Локальная степень. Но, возможно, главное состоит в том, что ориентируемость позволяет различать "прямые" и "обратные" отображения. Именно, прямое отображение – то, которое сохраняет ориентацию, а обратное то, которое ее обращает. Проще всего эти понятия определить в одной точке. Если имеется отображение F области линейного пространства в линейное пространство той же размерности, то матрица квадратная и в неособой точке определитель ее, т.е. якобиан, не нуль. Его знак и связывает ориентации образа и прообраза, определенные заданными системами координат. Отображение "прямое" в этой точке, если знак якобиана плюс, "обратное" если минус.

Если теперь имеется отображение ориентируемых многообразий одной размерности, то локально картина та же самая, как только что описано: в неособой точке по знаку якобиана можно сказать, прямое отображение или обратное, для чего локально нужно взять карты с положительной ориентацией и в образе и в прообразе.

Степень отображения. Пусть отображение $F : M_1 \to M_2$, M_2 связно, таково, что прообраз каждой точки конечен (как при складывании куска ткани или бумаги). Без особого труда доказывается (в последней главе мы обсудим более общую теорему – теорему Сарда), что имеются точки в M_2, полные прообразы которых или пусты или состоят из неособых (и тогда изолированных) точек. Такие точки называются регулярными или правильными.

Посчитаем число прообразов такой точки с учетом знаков, т.е. из числа прямых вычтем число обратных. Оказывается, что полученное число не зависит от выбора точки с правильными прообразами в M_2 и может рассматриваться как число существенных накрытий многообразием M_1 многообразия M_2. (Например, если есть точка с пустым прообразом, то это число для всех правильных точек есть нуль.)

7. **Основные примеры ориентируемых многообразий**.

Среди ориентируемых многообразий укажем прежде всего параллелизуемые многообразия. Их ориентируемость очевидна. Наоборот, ориентируемые многообразия не обязательно параллелизуемы (например, двумерная сфера). Однако, ориентируемые *трехмерные* многообразия (например, трехмерная сфера) параллелизуемы. Это довольно трудная теорема.

Компактное подмногообразие *коразмерности 1* (т.е. имеющее размерность $n-1$) в ориентируемом n-мерном многообразии само ориентируемо. (Например, $(n-1)$-мерная сфера в $\mathbb{R}^n$.)

Это вытекает из того, что связное $(n-1)$-подмногообразие $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ *разбивает* $\mathbb{R}^n$ на две области (а если не связно, то на $p+1$ областей, где p – число компонент). Это значит, что точки дополнения распадаются на два класса, причем пары точек в одном классе можно связать путем, не пересекающим многообразия, а в разных нельзя.

Наметим доказательство этого утверждения.

Возьмем в какой-либо точке $A \in M^{n-1}$ отрезок $[a, b]$, трансверсально пересекающий многообразие в своей средней точке c. (Это значит, что он ортогонален касательной плоскости и пересекает ее в точке c.) Если дополнение к M^{n-1} связно, то можно соединить концы отрезка путем $\gamma(t)$, не пересекающим M^{n-1}. Отрезок $[a, b]$ вместе с путем $\gamma(t)$ определяют отображение q окружности $\mathbb{S}^1$ в $\mathbb{R}^n$. Если $n \geq 3$ (только этот случай и интересен, т.к. одномерные многообразия, очевидно, все ориентируемы), то можно допустить, немного продеформировав это отображение, что оно будет гладким вложением. Его нетрудно продолжить до отображения Q диска B^2 ограниченного окружностью $\mathbb{S}^1$ (например, отобразив каждый радиус $O\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^1$ линейно на отрезок $[q(\mathbf{x}), C]$, где $C \in \mathbb{R}^n$ – фиксированная точка.)

Ключевой момент состоит в том, что мы можем, во-первых, аппроксимировать отображение Q гладким отображением, и, во-вторых, добиться, чтобы оно было трансверсальным к M^{n-1}. Эта техника основана в общем виде на применении упоминавшейся теоремы Сарда, и мы скажем о ней в будущем.

Прообраз в диске B пересечения образа Q с M^{n-1} является одномерным многообразием с краем, т.е. конечной системой дуг изамкнутых кривых. При этом край, т.е. концы отрезков, должен лежать на $\mathbb{S}^1$. Число этих концов четно, но на $\mathbb{S}^1$ лежит только одна точка прообраза M^{n-1}. Таким образом, точки a и b лежат в разных компонентах дополнения.

Нетрудно показать, что для связного M^{n-1} этих компонент будет ровно две.

Если теперь в какой-либо точке A многообразия дан репер, последний вектор которого ортогонален касательной плоскости, то при непрерывном перемещении этого репера по многообразию мы не сможем вернуться в A так, чтобы последний вектор стал указывать в противоположное направление. В таком случае, первые $n-1$ векторов репера определляют ориентацию M^{n-1}.

Проективная плоскость является компактным неориентируемым многообразием. Из сказанного вытекает, что ее нельзя реализовать в трехмерном пространстве (и, значит, нельзя “посмотреть” на нее в ее целом виде). Она неориентируема, т.к. содержит листы Мебиуса, например, в качестве замыканий окрестностей проективных прямых).

К параллелизуемым многообразиям относятся, как мы сейчас увидим, матричные группы. Значит, *все матричные группы ориентируемы.*

8. **Матричные группы и их касательные пространства**

Рассмотрим в качестве важного примера матричные группы, которые мы уже представили как подмногообразия в $\mathbb{R}^{n^2}$.

Матрицы, преобразования и реперы. Напомним, что матричные группы, с которыми мы имеем дело, определяются как группы линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ для того или иного n. Если мы фиксировали базис в $\mathbb{R}^n$ ("по умолчанию" это канонический репер), то линейный оператор в $\mathbb{R}^n$ (не обязательно невырожденный) отождествляется с его матрицей. Невырожденные матрицы отвечают обратимым матрицам, и мы можем говорить о данной группе линейных преобразований $\mathbb{R}^n$ как о группе матриц (операции композиции отвечает матричное умножение).

Наконец, мы можем сопоставить (при фиксированном базисе) преобразованию образ базисного репера. При этом получается взаимно однозначное соответствие между всеми реперами в $\mathbb{R}^n$ и всеми невырожденными преобразованиями $\mathbb{R}^n$. Каждой группе отвечают свои реперы и группу преобразований мы можем интерпретировать как многообразие, состоящее из реперов с тем или иным свойством.

По матрице данного преобразования соответствующий репер, как известно, определяется просто – как репер столбцов этой матрицы.

Нас интересуют прежде всего касательные плоскости. Достаточно рассмотреть, как мы позже поймем, касательную плоскость в единичном элементе группы, т.е. в единичной матрице E.

Общая линейная группа. Сначала как всеобщее вместилище матричных групп рассмотрим общую линейную группу $GL(n,\mathbb{R})$.

$GL(n,\mathbb{R})$ открыто как подмножество в пространстве $\mathbf{M}(n,\mathbb{R})$ всех матриц, которое отождествлено с $\mathbb{R}^{n^2}$, с сохранением линейной структуры ($(n\times n)$-матрицы можно складывать и умножать на числа). Поэтому касательный вектор $\mathbf{v}$ в единичной матрице к подмногообразию $GL(n,\mathbb{R})$ можно задать как стрелку с началом в единичной матрице и с концом в произвольно заданной матрице U. Тогда его координатами являются элементы матрицы $V = U - E$.

Гладкая кривая в $GL(n,\mathbb{R})$ это параметризованное семейство матриц $U(t) = (a_{ij}(t))$, где функции $a_{ij}(t)$ непрерывно дифференцируемы (см. главу 5 п.2). Пусть $t = 0$ отвечает единичной матрице. Очевидно, координатами касательного вектора будут производные этих функций по t при нулевом значении параметра.

Касательная плоскость к ортогональной группе. Рассмотрим некоторые подгруппы в $GL(n,\mathbb{R})$, с которыми мы уже знакомы.

Предложение. Матрица представляет касательный вектор к ортогональной группе $O(n,\mathbb{R})$ в единичном элементе E тогда и только тогда, когда она кососимметрическая.

Доказательство. Элементы $O(n,\mathbb{R})$ служат решениями матричного уравнения $UU^T = E$.

Дифференцирование матриц по параметру удовлетворяет правилу Лейбница (см. глава 5 п.2) и обращению в нуль производной постоянной матрицы. Поэтому, дифференцирование по t дает уравнение $\dot{U}U^T + U(U^T)^{\cdot} = 0$ (нуль здесь на самом деле – нуль-матрица, матрица из нулей).

При $t \to 0$ матрица U стремится к единичной, как и ее транспонированная, так что у нас в левой части останутся только две матрицы $\dot{U}$ и ее транспонированная:

$$\dot{U} + (U^T)^{\cdot} = \dot{U} + (\dot{U})^T = 0. \qquad /$$

Мы только что видели, что $\dot{U}|_{t=0}$ есть матрица, представляющая касательный вектор к нашей кривой в точке E. Мы доказали, что касательные векторы к $O(n,\mathbb{R})$ в E представляются матрицами, удовлетворяющими уравнению (/), которое, очевидно, означает, что эти матрицы кососимметричны. Кососимметрические матрицы не образуют группы, но образуют линейное пространство, (так же, как и симметрические.) Его размерность, очевидно, есть $1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, т.е. равна размерности группы $O(n,\mathbb{R})$. Значит, оно совпадает с касательным пространством. ■

Касательная плоскость к специальной группе.

Предложение. Вектор, представленный матрицей Z, является касательным к группе $\mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$ в единичном элементе тогда и только тогда, когда след Z равен нулю.

Доказательство. Подгруппа $\mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$ матриц с определителем $+1$ выделяется одним уравнением $\det U = 1$, т.е. является подмногообразием коразмерности 1. Вообще, если многообразие определено уравнением $F = 0$, то его касательные векторы v^i удовлетворяют уравнению $\frac{\partial F}{\partial x^i} v^i = 0$ (по правилу неявного дифференцирования). В нашем случае один индекс надо заменить парой (ij) и мы получаем уравнение $\frac{\partial \det U}{\partial a^{ij}} v^{ij} = 0$.

Производная детерминанта по его элементу a^{ij} есть алгебраическое дополнение A_{ij} этого элемента, что следует из разложения определителя по строкам. Получается уравнение $A_{ij}v^{ij} = 0$. В нашей точке E только диагональные элементы A^{ii} не нули, они равны все 1. Поэтому уравнение превращается в сумму диагональных элементов матрицы v^{ij}, т.е. в ее след. Итак, касательное пространство специальной линейной группы в точке E состоит из матриц с нулевым следом.

Обратно: матрицы с нулевым следом образуют линейное пространство размерности $n^2 - 1$, как и касательное пространство, содержащееся в нем. Значит, оба совпадают. ■

Почему мы интересуемся касательной плоскостью группы только в одной точке E?

Во-первых, потому, что группа *однородна,* т.е. то, что происходит в одной точке автоматически и однозначно переносится и в другие точки. Но в единичном элементе группы формулы (как мы видели) упрощаются.

Однородность многообразия означает, что для любых двух точек имеется гомеоморфизм (у нас диффеоморфизм), переводящий одну точку в другую. С помощью него поведение многообразия вблизи одной точки (топологическое в общем случае, дифференциальное в гладком случае) отождествляется с поведением относительно другой точки.

Сдвиги в группе. В случае матричной группы имеется специальный диффеоморфизм, переводящий одну точку U в другую V : сдвиг группы умножением каждого элемента слева на VU^{-1}.

То, что это диффеоморфизм, ясно, т.к. в группе имеется обратный элемент (UV^{-1}) и, кроме того, формулы умножения являются аналитическими (даже линейными) функциями, причем дифференциал линейного отображения совпадает с ним самим.

Определение. Диффеоморфизм, определенный умножением элементов группы слева на данный ее элемент g, называется *левым сдвигом.* Мы обозначим его ${}_g\varphi$. (Правый сдвиг и диффеоморфизм φ_g определяются аналогично.)

Заметим, что эти сдвиги на самом деле являются линейными (обратимыми) преобразованиями пространства матриц $\mathbf{M}(n,\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^{n^2}$.

Упражнение. Чему равен определитель ${}_g\varphi$?

Предложение. С помощью дифференциала сдвига ${}_U\varphi$ на матрицу U касательный вектор в E представленный матрицей V, переходит в касательный вектор в U, представленный матрицей UV.

Доказательство. Вообще дифференциал диффеоморфизма многообразия переводит касательные векторы в касательные векторы.

В нашем случае мы имеем диффеоморфизм (левый сдвиг ${}_U\varphi$), определенный на всем пространстве $\mathbb{R}^{n^2} = M(n,\mathbb{R})$. Он переводит в себя каждую подгруппу, содержащую U. Значит, если $Z = V - E$ – касательный вектор в E к подгруппе G и $U \in G$, то матрица $UZ = UV - U$ есть вектор, касательный к G в точке U. ■

Выражение касательных векторов в $\mathbf{M}(n,\mathbb{R})$ *в сдвинутом репере.* Пусть теперь дан репер, который в каноническом репере записывается матрицей G (векторы репера являются ее столбцами). Тогда произвольный вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ будет иметь в этом репере вид $G^{-1}\mathbf{a}$. Рассмотрим левый сдвиг ${}_G\varphi$ в пространстве всех квадратных матриц. Будем смотреть на квадратную матрицу M как на набор векторов – ее столбцов. Левый сдвиг переведет эти векторы в векторы, которые в каноническом репере задаются столбцами матрицы GM. В таком случае в *данном репере* набор этих векторов будет выражен матрицей $G^{-1}GM = M$. Иными словами, после левого сдвига в $\mathbf{M}(n,\mathbb{R})$ на матрицу G векторы сдвинутого набора будут иметь в репере G те же координаты, которые векторы исходного набора имели в каноническом репере.

В частности, беря в качестве набора столбцы матрицы вида $M - E$, т.е. вектора в единичном элементе в $\mathbf{M}(n,\mathbb{R})$, мы после левого сдвига получим матрицу $GM - G$, которая представляет сдвинутый вектор с началом в элементе G. Он выражается в репере G с помощью матрицы $M - E$, т.е. так, как исходный набор в каноническом репере. (Надеемся, читатель различает векторы в $\mathbb{R}^n$ и векторы в $\mathbf{M}(n, \mathbb{R})$.)

Касательные векторы в произвольном элементе группы. Если мы берем касательный вектор Z к некоторой группе матриц $\Gamma \subset \mathbf{M}(n, \mathbb{R})$ и делаем левый сдвиг на элемент $G \subset \Gamma$, то мы получаем, что этот вектор перейдет в вектор GZ, касательный к Γ в элементе G, который будет записан той же матрицей, что и исходный вектор, но в отличие от него не в каноническом репере, а в сдвинутом, т.е. в репере, представленном матрицей G.

Таким образом, например, векторы, касательные в любом элементе ортогональной группы, будут представляться кососимметрическими матрицами *в репере, заданным этим элементом.* Касательные векторы группы $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$, будут представляться аналогично матрицами с нулевым следом и проч.

Вторая причина интересоваться касательной плоскостью в точке E в том, что она получает от умножения в группе новую алгебраическую структуру — структуру *алгебры Ли.*

Б. Алгебры Ли и экспоненциальное отображение

1. **Алгебры Ли матричных групп**

Определение. *Алгебра Ли* это линейное пространство, в котором задано умножение (дистрибутивное относительно сложения), которое не ассоциативно, а удовлетворяет *тождеству Ли* (с которым мы уже встречались в случае векторных полей): $(A(BC))+(B(CA))+(C(AB)) = 0$ и *кососоммутативно*: $AB = -BA$. В частности, $AA = 0$.

Например: векторные поля на многообразии образуют алгебру Ли относительно скобки Ли.

Алгебра Ли матричной группы. Мы должны ввести структуру алгебры Ли в касательной плоскости в единичной матрице к произвольной матричной группе. Проще всего было бы заменить операцию в группе на новую операцию, удовлетворяющую тождеству Ли: $[A, B] = AB - BA$. Эта операция, как легко убедиться, действительно кососоммутативна и удовлетворяет тождеству Ли. Но для этого нужно, чтобы операция в группе уже была умножением с дистрибутивным законом относительно сложения, т.е. чтобы мы имели дело с кольцом. Группы матриц не являются кольцами (нуль-матрица не принадлежит ни одной группе). Но они лежат в кольце всех матриц $\mathbf{M}(n, \mathbb{R})$, которое таким образом действительно превращается в алгебру Ли.

Эту скобку назовем кольцевым коммутатором (в отличие от группового коммутатора $UVU^{-1}V^{-1}$).

Так как $\mathbb{R}^{n^2}$ как линейное пространство естественно отождествляется с касательным пространством любой точки любого его открытого подмножества, мы выполнили нашу задачу для общей линейной группы $\mathrm{GL}\,(n, \mathbb{R})$. Однако это пока чисто формальное решение. Мы отождествим эту скобку со скобкой Ли векторных полей специального типа – инвариантных.

Мы воспользуемся этим решением для любой матричной группы, показав, что ее касательное пространство в E является не только линейным подпространством $\mathbb{R}^{n^2} = \mathbf{M}(n, \mathbb{R})$, но и *подалгеброй*, т.е. операция кольцевого коммутирования $[A, B] = AB - BA$ переводит пару элементов A и B этого подпространства в элемент того же подпространства. (Например, если A и B кососимметричны, то и $[A, B]$ тоже, если след у A и B нулевой, то и у $[A, B]$ тоже.)

Касательное пространство в точке E к матричной группе G состоит из векторов-матриц U, являющихся векторами скорости параметризованных кривых в G, проходящих через E. Дифференциал левого сдвига ${}_g\varphi$ переводит такой вектор U в однозначно определенный вектор в касательной плоскости в точке g группы. Беря всевозможные $g \in G$, мы получаем векторное поле $\mathbf{U}$, очевидно, гладкое и даже аналитическое. Это поле обладает замечательным свойством: оно *инвариантно* относительно левых сдвигов.

Предложение. Векторное поле, полученное из касательного вектора в E дифференциалами левых сдвигов, инвариантно относительно левых сдвигов.

Доказательство. Рассмотрим гладкие кривые $h_g(t) = gh(t)$ в группе, полученные действием всевозможных левых сдвигов ${}_g\varphi$ на какую-нибудь кривую $h(t)$, $h(0) = E$, с данным вектором скорости U в E. Такая кривая представляет вектор gU в точке g.

Подействуем теперь левым сдвигом φ_f на элементы группы и на касательные векторы построенного поля. Элемент $f^{-1}g$ перейдет в g, кривая $f^{-1}gh(t)$ в кривую $gh(t)$, т.е. в кривую построенную для точки g. Значит, вектор построенного поля в точке $f^{-1}g$ перейдет в вектор этого же поля в точке g. Т.к. g был взят произвольно, поле, построенное по вектору-матрице U, инвариантно относительно левого сдвига φ_f, т.к. f взят произвольно, оно является *инвариантным*. Наконец, U также произвольна и утверждение доказано. ■

Итак, мы сопоставили каждому вектору U в касательной плоскости в E к нашей группе векторное поле $\mathbf{U}$, инвариантное относительно левых сдвигов. Ясно, что эта процедура обратима и взаимно однозначна: для инвариантного поля мы должны просто взять его вектор в E.

Заметим, что по вектору U инвариантное поле строится на всей группе $GL(n,\mathbb{R})$, распространяя то, которое мы построили на G.

Если два поля касаются подмногообразия, то и их скобка его касается. Поэтому, если мы покажем, что для $GL(n,\mathbb{R})$ скобка, определенная выше через кольцевое коммутирование, совпадает с скобкой Ли – коммутатором инвариантных векторных полей, то это будет доказано также и для ее подгрупп $(O(n,\mathbb{R}), SL(n,\mathbb{R})$ и проч.), являющихся ее подмногообразиями.

Итак, мы пришли к тому, чтобы доказать следующее

Предложение. В пространстве матриц кольцевое коммутирование совпадает с коммутированием соответствующих инвариантных полей.

Доказательство. Возьмем две квадратные матрицы (a^i_j) и (b^i_j), рассматривая их как векторы с началом в точке E. Построим две кривые, для которых они являются векторами скорости: $\delta^i_j + ta^i_j$ и $\delta^i_j + tb^i_j$.

(Заметим, что эти кривые на самом деле являются прямыми, но они не будут ни подгруппами в $GL(n,\mathbb{R})$, ни интегральными кривыми соответствующих инвариантных полей, хотя и будут отличаться от них на бесконечно малые более высокого порядка, чем первый.)

Векторы инвариантных полей X и Y, порожденных векторами (a^i_j) и (b^i_j), имеют координатами элементы матриц, которые, очевидно, получаются теми же левыми сдвигами: $(X|_g)^k_j = g^k_i a^i_j$ и $(Y|_g)^k_j = g^k_i b^i_j$, как и кривые, имеющие эти векторы своими векторами скорости в точке g^k_j: $g^k_j + tg^k_i a^i_j$, $g^k_j + tg^k_i b^i_j$.

Координаты скобки Ли [X,Y] в точке E равны

$$[X,Y]^k_j = \frac{\partial g^k_i a^i_j}{\partial x^p_q} b^p_q - \frac{\partial g^k_i b^i_j}{\partial x^p_q} a^p_q$$

Матрицы (a^i_j) и (b^i_j) постоянные, производная радиус-вектора по координате – орт соответствующей координатной оси. В нашем случае роль радиус-вектора играет g^k_i, так что мы получаем:

$$[X,Y]^k_j = \frac{\partial g^k_i}{\partial x^p_q} a^i_j b^p_q - \frac{\partial g^k_i}{\partial x^p_q} b^i_j a^p_q = a^i_j b^k_i - b^i_j a^k_i.$$

Это матричный кольцевой коммутатор, что и требовалось. ■

2. **Экспоненциальное отображение**

Матричная экспонента. Для матричных групп имеется операция, отображающая касательную плоскость в точке E в саму группу с тождественным дифференциалом. Эта операция осуществляется экспоненциальной функцией от матрицы и называется *экспонентой*. Она служит прямым обобщением обычной функции e^x, которая изоморфно переводит аддитивную группу $\mathbb{R}$ в мультипликативную группу положительных чисел, и также экспоненты $e^{i\varphi}$, которая переводит $\mathbb{R}$ в мультипликативную группу комплексных чисел с единичным модулем. В обоих случаях $\mathbb{R}$ отождествляется очевидным образом с касательной прямой к мультипликативной группе в единице.

Экспонента матрицы A определяется с помощью ряда Тейлора, сходимость которого доказывается как обычно в математическом анализе, и здесь опускается (см. Понтрягин “Непрерывные группы”...):

$$e^A = \exp(A) = E + A + \frac{1}{2}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots . \qquad e$$

К сожалению, матричная экспонента не обладает основным свойством обычной экспоненциальной функции: гомоморфностью. Правило $\exp(A+B) = \exp A \exp B$ справедливо только, если матрицы A и B коммутируют (тогда оно доказывается обычным умножением рядов). В общем случае имеется очень сложная *формула Кэмпбелла-Хаусдорфа-Дынкина*, которую мы не приводим, (см. Кириллов “Основы теории представлений”.)

Однопараметрические подгруппы. Важно, что матрицы At, где t – скаляр, коммутируют. Поэтому образом прямой At в группе будет *однопараметрическая подгруппа* $\exp At$. Более того:

Лемма. Для кривой $p(t)$ в матричной группе, проходящей через E и с касательным вектором скорости A в E, эквивалентны следующие три утверждения:
1) она является образом прямой At при экспоненциальном отображении,
2) она является интегральной кривой инвариантного поля, построенного по вектору A,
3) она является однопараметрической подгруппой с касательным вектором A в E.

Доказательство. $1 \Rightarrow 3$. Мы уже знаем, что образ At является однопараметрической подгруппой. То, что вектор A является касательным вектором к кривой $\exp At$ в точке $E = \exp 0$, доказывается непосредственно на основе определения с рядами.

$3 \Rightarrow 2$. Векторы инвариантного поля, построенного по касательному вектору к подгруппе в E, будут касательными во всех точках этой группы и, следовательно, эта кривая будет интегральной. Более того, вектор A является вектором скорости для прямой At в касательной плоскости и потому также вектором скорости для образа этой прямой (с соответствующей параметризацией). Значит, касательные векторы инвариантного поля в точках кривой будут также ее векторами скорости в этих точках и поэтому t является стандартным параметром интегральной кривой.

$2 \Rightarrow 1$ следует из теоремы единственности решения дифференциального уравнения с данным начальным условием. Действительно, мы уже показали, что из 1 следует 2, т.е. образ прямой At является интегральной кривой инвариантного векторного поля, построенного по вектору A. Но такая кривая только одна. ■

Матричное уравнение экспоненты. Обычная экспонента e^{at} замечательна тем, что служит решением простейшего дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = ax(t)$ с начальным условием $x(0) = 1$. Это верно и для матричной экспоненты: $(\exp At)^{\cdot} = A \exp At$, что также доказывается формальными действиями с рядами.

Но мы уже видели, что правая часть матричного уравнения $\dot{x}(t) = x(t)A$ есть вектор в точке $x(t)$, полученный левым сдвигом из касательного вектора A в точке E (в группе $GL(n, \mathbb{R})$). Наше уравнение, таким образом, показывает, что решение этого уравнения $x(t)$ есть интегральная кривая правоинвариантного векторного поля, построенного по вектору A.

Однако мы также видели, что если A принадлежит касательной плоскости подгруппы группы $GL(n, \mathbb{R})$, являющейся подмногообразием, то инвариантное поле в точках этой подгруппы будет касательным к ней. В силу теоремы о единственности решений дифференциальных уравнений мы получаем, что решение $\exp At$ целиком принадлежит данной подгруппе.

Экспоненциальное отображение. Итак, мы получаем следующий результат:

Если G – матричная подгруппа, являющаяся одновременно подмногообразием в $GL(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$, то экспоненциальное отображение, определенное для $GL(n, \mathbb{R})$, отображает касательную плоскость к G в точке E в группу G, причем так, что каждая прямая At переходит в однопараметрическую подгруппу, для которой A служит в точке E вектором скорости. При этом каждая однопараметрическая группа получается таким образом.

Дифференциал экспоненциального отображения в нуле касательной плоскости (т.е. в нуль-матрице), очевидно, есть тождественное отображение.

Это, впрочем, требует уточнения. Дифференциал есть отображение касательных плоскостей. В нашем случае дифференциал отображает касательную плоскость в нуле к касательной плоскости в единице группы в касательную плоскость к группе в единице. Но касательная плоскость к линейному пространству в каждой точке отождествляется с самим этим линейным пространством (начало каждого вектора может быть параллельно перемещено в начало пространства). Поэтому оказывается, что дифференциал отображает касательную плоскость группы в себя (и начало в начало). Поэтому имеет смысл сказать, что дифференциал экспоненциального отображения есть тождество. Линеаризация этого отображения дает $\exp A \approx E + A$, так что дифференциал действительно есть тождество.

Экспоненциальное отображение не обязательно есть "отображение на" и не обязательно взаимно однозначно (как видно из примера с окружностью). Однако, поскольку якобиан этого отображения вблизи начала не нуль, мы получаем, что это отображение взаимно однозначно в окрестности начала. В частности, мы можем использовать это отображение, чтобы построить локальную карту в окрестности E.

С другой стороны определено обратное отображение, которое имеет разложение в ряд, полученное формальным обращением ряда экспоненты. Мы получаем ряд логарифма:

$$\log g = g - \frac{1}{2}g^2 + \cdots \pm \frac{1}{n}g^n + \cdots .$$

Таким образом для матриц достаточно близких к единичной определен логарифм как обращение экспоненциального отображения.

Экспонента для известных групп. Для знакомых наших подгрупп $O(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$ (и тех, с которыми мы познакомимся позже) изложенные свойства экспоненциального отображения можно проверить непосредственно. Например, если A - кососимметрическая матрица, то $\exp A$ – ортогональная, а если след A равен нулю, то определитель $\exp A$ равен 1.

Простейшей связной компактной группой является группа окружности – $SO(2, \mathbb{R})$, элементами которой являются матрицы вращения плоскости на углы φ. Кососимметрические матрицы второго порядка имеют вид $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Мы легко получаем: $e^A = \exp\left(\begin{smallmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{smallmatrix}\right)$.

Рассмотрим теперь комплексный вариант теории многообразий. Комплексные факты порождают соответствующие вещественные с помощью простого забывания об умножении на мнимую единицу $\mathbf{i}$. Эта операция называется *овеществлением*. Наша задача состоит не только в том, чтобы построить комплексную теорию аналогично вещественной, но также и в том, чтобы установить, как комплексные факты согласуются с вещественными, которые они порождают. Оказывается, что это требует довольно кропотливой работы, и мы начнем с подробного рассмотрения одномерного случая.

1. **Одномерный случай.**

Комплексная прямая и вещественная плоскость. Начнем с гауссова представления комплексных чисел $\mathbb{C}$ на вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$, в которой вещественная и мнимая единицы образуют основной репер.

Договоримся различать три объекта, которые совпадают как множества: поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, одномерное комплексное векторное пространство $V^1_{\mathbb{C}}$ с базисным вектором $\mathbf{e} = 1$ и началом 0 и одномерное аффинное "числовое" пространство (над $\mathbb{C}$), которое обозначим $\mathbb{C}^1$.

Область вещественных чисел $\mathbb{R}$ вкладывается, как обычно, в качестве вещественной оси в $\mathbb{C}$, овеществлением для $\mathbb{C}^1$ служит $\mathbb{R}^2$, а для $V^1_{\mathbb{C}}$ – вещественное двумерное векторное пространство $V^2_{\mathbb{R}}$ с естественным базисом $\mathbf{e}_x = 1$, $\mathbf{e}_y = \mathbf{i}$.

Линейные отображения одномерных векторных над $\mathbb{C}$ пространств. Введем для определенности различные обозначения в образе и в прообразе. Обозначим пространство-прообраз $V^1_{\mathbb{C}}$, пространство-образ – $V^1_{1\mathbb{C}}$, в прообразе базисный элемент обозначим $\mathbf{e}$, в образе – $\mathbf{f}$, координату соотв. $z = x + \mathbf{i}y$ и $w = u + \mathbf{i}v$. Соответственно овеществление прообраза обозначим $V^2_{\mathbb{R}}$, образа – $V^2_{1\mathbb{R}}$, с базисами $\mathbf{e}_x$,$\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{e}_u$,$\mathbf{e}_v$.

Комплексно линейное отображение $l : V^1_{\mathbb{C}} \to V^1_{1\mathbb{C}}$ – это при фиксированных базисных элементах просто умножение на комплексное число $c = a+\mathbf{i}b$: $z \mapsto w = cz$. Каждое такое отображение l_c порождает вещественно линейное отображение $l^r_c : V^2_{\mathbb{R}} \to V^2_{1\mathbb{R}}$ с матрицей $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ (при указанных выше базисах). Действительно,

$$\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ax-by \\ bx+ay \end{pmatrix}$$

и $w = u+\mathbf{i}v = (a+\mathbf{i}b)(x+\mathbf{i}y) = (ax-by)+\mathbf{i}(bx+ay)$. Обратно, c восстанавливается очевидным образом по первому столбцу матрицы такого вида.

Пространство линейных над $\mathbb{R}$ отображений $V^2_{\mathbb{R}} \to V^2_{1\mathbb{R}}$ мы обозначим L. Это четырехмерное линейное над $\mathbb{R}$ пространство, элементы которого мы будем представлять матрицами $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ в введенных выше базисах. Вещественно линейные отображения вида l^r_c (полученные овеществлением комплексно линейных l_c) образуют двумерное линейное (над $\mathbb{R}$) подпространство L_z. Они, как сказано, имеют матрицы вида

$$\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right). \qquad -$$

L_z имеет в L дополнительное линейное подпространство $L_{\bar{z}}$ (т.е. $L = L_z \oplus L_{\bar{z}}$), состоящее из комплексно антилинейных отображений.

Отображение $l : V^1_{\mathbb{C}} \to V^1_{1C}$ называется *антилинейным*, если $l(az) = \bar{a}l(z)$ и $l(z_1+z_2) = l(z_1)+l(z_2)$. Равносильно, оно представляется композицией комплексно линейного отображения и комплексного сопряжения, (т.к. $\overline{l(az)} = a\overline{l(z)}$, т.е. композиция l с сопряжением линейна).

Антилинейному отображению $l_c(z) = \overline{cz}$, $c = a+\mathbf{i}b$, отвечает матрица

$$\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ -b & -a \end{smallmatrix}\right). \qquad +$$

(Имеем: $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ -b & -a \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ax-by \\ -bx-ay \end{pmatrix}$ и $\overline{(a+\mathbf{i}b)(x+\mathbf{i}y)} = (ax-by)+\mathbf{i}(-bx-ay)$.) Она имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$, где первый сомножитель отвечает комплексному сопряжению, а второй умножению на $a+\mathbf{i}b$.

Ясно, что пересечение L_z и $L_{\bar{z}}$ содержит только нуль-матрицу, и т.к. оба пространства двумерны, а L четырехмерно, они задают разложение $L = L_z \oplus L_{\bar{z}}$. Явным образом этому разложению отвечает представление общей матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ суммой матриц вида $(-)$ и $(+)$:

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+d & -(c-b) \\ c-b & a+d \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a-d & b+c \\ b+c & -(a-d) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, каждое линейное над $\mathbb{R}$ отображение однозначно представляется в виде суммы двух линейных над $\mathbb{R}$ отображений, отвечающих соотв. комплексному умножению на $\frac{1}{2}(a+d+\mathbf{i}(c-b))$ и композиции умножения на $\frac{1}{2}(a-d-\mathbf{i}(b+c))$ с сопряжением.

Прямо проверяется, что оба пространства L_z и $L_{\bar{z}}$ переходят в себя при умножении на $\mathbf{i}$, (т.е. на матрицу $\left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$). Этим они отождествляются с одномерным над $\mathbb{C}$ линейным пространством. В качестве базисного вектора в L_z возьмем отображение с единичной матрицей $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, а в $L_{\bar{z}}$ - с матрицей $\left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)$.

Пространство L оказывается представленным как двумерное линейное пространство над $\mathbb{C}$ и эти матрицы образуют в нем базис. Мы обозначим соответствующие им отображения $\mathbf{f}_z$ и $\mathbf{f}_{\bar{z}}$.

Имеется иное представление L в виде прямой суммы двух одномерных комплексных подпространств. Начнем с $\mathbb{R}$-линейных отображений $\mathbf{f}_x$ и $\mathbf{f}_y$ пространства $V^2_{\mathbb{R}}$ на вещественную ось $\mathbb{R}^1_1 \subset \mathbb{C}^1_1 = V^1_{1\mathbb{C}}$, причем $\mathbf{f}_x$ переводит в нуль ось ординат, а $\mathbf{f}_y$ – ось абсцисс. Их матрицы – $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$.

Пусть L_x состоит из отображений, матрицы которых имеют вид $\left(\begin{smallmatrix}a & -b\\ b & a\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ b & 0\end{smallmatrix}\right)$, L_y – из матриц $\left(\begin{smallmatrix}a & -b\\ b & a\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0 & a\\ 0 & b\end{smallmatrix}\right)$, т.е. L_x состоит из композиций $\mathbf{f}_x$ с умножением на комплексное число, а L_y из композиций $\mathbf{f}_y$ с умножением на комплексное число. Ясно, что L_x и L_y – комплексные одномерные над $\mathbb{C}$ линейные подпространства в $L \approx V^2_{\mathbb{C}}$, причем $L_x \cap L_y = \emptyset$. Значит, $L = L_x \oplus L_y$.

Отображения $\mathbf{f}_x$ и $\mathbf{f}_y$ это $\mathbb{R}$-линейные формы, они принадлежат двойственному пространству $V^*_{\mathbb{R}}$ (мы избегаем термина “сопряженное пространство”, чтобы не путать с комплексной сопряженностью).

(L_z состоит из комплексно линейных отображений $V^1_{\mathbb{C}}$ в $V^1_{1\mathbb{C}} \approx \mathbb{C}^1$ и казалось бы нам следует отождествить L_z с $V^*_{\mathbb{C}}$. Однако, чтобы не упустить связь комплексной и вещественной точек зрения, нам придется отождествить L_z с пространством сопряженным к другой комплексной прямой.)

Комплексификация. Введем операцию противоположную овеществлению. Пусть дано вещественное линейное пространство $V_{\mathbb{R}}$. Назовем его *комплексификацией* комплексное пространство $V_{\mathbb{C}}$, полученное следующим образом. Возьмем второй экземпляр $V_{1\mathbb{R}}$ того же пространства и определим в прямой сумме $V_{\mathbb{R}} \oplus V_{1\mathbb{R}}$ умножение на мнимую единицу $\mathbf{i}$ по правилу:

$$\mathbf{i}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (-\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1).$$

(Здесь оба вектора берутся из пространства $V_{\mathbb{R}}$, но в скобке первый элемент берется из первого экземпляра этого пространства, а второй из второго экземпляра.) Ясно, что векторы второго экземпляра в этой прямой сумме можно записать в виде $\mathbf{iv}$, $\mathbf{v} \in V_{\mathbb{R}}$ $((0, v) = \mathbf{i}(v, 0))$, так что саму прямую сумму можно записать в виде $V_{\mathbb{R}} \oplus \mathbf{i}V_{\mathbb{R}}$. По линейности мы получаем умножение векторов этой прямой суммы на любое комплексное число, т.е. это пространство превращается в комплексно линейное.

Если теперь $l : V_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ – $\mathbb{R}$-линейная форма ($\mathbb{R}$ – вещественная ось в $\mathbb{C}$), то мы получим комплексно линейную форму $\hat{l}$ на комплексификации $V_{\mathbb{C}}$ пространства $V_{\mathbb{R}}$, положив для $\mathbf{v} \in V_{\mathbb{R}}$ $\hat{l}(\mathbf{v}) = l(\mathbf{v})$ и $\hat{l}(\mathbf{iv}) = \mathbf{i}l(\mathbf{v})$. По линейности имеем: $\hat{l}(\mathbf{u} + \mathbf{iv}) = l(\mathbf{u}) + \mathbf{i}l(\mathbf{v})$.

Применим это к формам $\mathbf{f}_x$ и $\mathbf{f}_y$. Комплексифицируем пространство $V^2_{\mathbb{R}}$ до -линейного пространства $V^2_{\mathbb{C}}$ и определим формы $\hat{\mathbf{f}}_x$ и $\hat{\mathbf{f}}_y$.

Векторы $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, рассматриваемые в комплексифицированном пространстве, обозначим $\hat{\mathbf{e}}_x$ и $\hat{\mathbf{e}}_y$. Они по-прежнему образуют базис, но теперь в $V^2_{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}$.

Двойственное к $V^2_{\mathbb{C}}$ пространство $V^{2*}_{\mathbb{C}}$ двумерно над $\mathbb{C}$ и, очевидно, векторы $\hat{\mathbf{f}}_x$,$\hat{\mathbf{f}}_y$ образуют в нем базис, причем базис двойственный базису $\hat{\mathbf{e}}_x$,$\hat{\mathbf{e}}_y$.

Сделаем теперь следующее основное утверждение. Соответствие $l \mapsto \hat{l}$ устанавливает изоморфизм над $\mathbb{R}$ пространств L и $V^{2*}_{\mathbb{C}}$.

Действительно, оба эти пространства четырехмерны над $\mathbb{R}$, это отображение линейно над $\mathbb{R}$ и имеет нулевое ядро.

Построим в пространстве $V^2_{\mathbb{C}}$ базис двойственный базису $\hat{\mathbf{f}}_z$,$\hat{\mathbf{f}}_{\bar{z}}$.

Мы имеем: $\hat{\mathbf{f}}_z = \hat{\mathbf{f}}_x + \mathbf{i}\hat{\mathbf{f}}_y$, $\hat{\mathbf{f}}_{\bar{z}} = \overline{\hat{\mathbf{f}}_x + \mathbf{i}\hat{\mathbf{f}}_y}$. (В матричной форме: $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\right)$.)

Прямо проверяется, что базис $\hat{\mathbf{f}}_z, \hat{\mathbf{f}}_{\bar{z}}$ двойствен базису $\hat{\mathbf{e}}_z = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{e}}_x - \mathbf{i}\hat{\mathbf{e}}_y), \hat{\mathbf{e}}_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{e}}_x + \mathbf{i}\hat{\mathbf{e}}_y)$. (Например, $(\hat{\mathbf{f}}_x + \mathbf{i}\hat{\mathbf{f}}_y)(\frac{\hat{\mathbf{e}}_x - \mathbf{i}\hat{\mathbf{e}}_y}{2}) = \frac{1+0+0+1}{2} = 1$ и $(\hat{\mathbf{f}}_x + \mathbf{i}\hat{\mathbf{f}}_y)(\frac{\hat{\mathbf{e}}_x + \mathbf{i}\hat{\mathbf{e}}_y}{2}) = 0$.)

Заметим, что $\hat{\mathbf{e}}_x = \hat{\mathbf{e}}_z + \hat{\mathbf{e}}_{\bar{z}}$ и $\hat{\mathbf{e}}_y = \mathbf{i}(\hat{\mathbf{e}}_z - \hat{\mathbf{e}}_{\bar{z}})$.

(Обратим внимание на то, что здесь операции векторные, а не числовые, хотя при наших отождествлениях эти базисные векторы переходят в вещественную и мнимую единицы комплексных чисел.)

Дальше будем опускать знак крышки над комплексными векторами, полученными комплексификацией из вещественных. Это не должно вызвать недоразумения.

Обозначим комплексные прямые с направляющими векторами $\mathbf{e}_z$ и $\mathbf{e}_{\bar z}$ в $V^2_{\mathbb{C}}$ через $\mathbb{C}_z$ и $\mathbb{C}_{\bar z}$. Тогда имеем: $V^2_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_z \oplus \mathbb{C}_{\bar z}$. Если взять векторы $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{ie}_x, \mathbf{ie}_y$ в качестве вещественного базиса, то векторы в $\mathbb{C}_z$ получат координаты вида $(a, b, b, -a)$, а в $\mathbb{C}_{\bar z}$ – $(a, -b, b, a)$.

Формы из L_z равны нулю на $\mathbb{C}_{\bar z}$. Поэтому их можно считать формами на $\mathbb{C}_z$ (строго говоря, на фактор-пространстве $V^2_{\mathbb{C}}/\mathbb{C}_{\bar z}$). Значит, L_z совпадает с $\mathbb{C}^*_z$. Аналогично, $L_{\bar z}$ отождествляется с $\mathbb{C}^*_{\bar z}$. Это пространство называется антидвойственным к $\mathbb{C}_z$.

Прежде чем идти дальше, подведем итог сделанному. Мы овеществили комплексную прямую $\mathbb{C}^1$, получив $\mathbb{R}$-плоскость $V^2_{\mathbb{R}}$, которую мы затем комплексифицировали до $\mathbb{C}$-плоскости $V^2_{\mathbb{C}}$. В ней выделено два базиса: $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ (это также $\mathbb{R}$-базис в $V^2_{\mathbb{R}}$ и вещественная и мнимая единицы в $\mathbb{C}^1$) и базис $\mathbf{e}_z = \frac{\mathbf{e}_x - \mathbf{ie}_y}{2}, \mathbf{e}_{\bar z} = \frac{\mathbf{e}_x + \mathbf{ie}_y}{2}$. Эти базисы определяют два разложения $V^2_{\mathbb{C}}$ в прямую сумму: $\mathbb{C}_x \oplus \mathbb{C}_y$ и $\mathbb{C}_z \oplus \mathbb{C}_{\bar z}$.

Двойственное пространство $V^{2*}_{\mathbb{C}}$ совпадает над $\mathbb{R}$ с пространством L $\mathbb{R}$-линейных отображений $V^2_{\mathbb{R}} \to V^2_{1\mathbb{R}}$. В нем также выделено два базиса: $\mathbf{f}_x, \mathbf{f}_y$, двойственный базису $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ и $\mathbf{f}_z, \mathbf{f}_{\bar z}$ двойственный базису $\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{\bar z}$ в $V^2_{\mathbb{C}}$.

Прямая L_z, определенная вектором $\mathbf{f}_z$, отождествляется с пространством двойственным прямой $\mathbb{C}_z$ в $V^2_{\mathbb{C}}$, определенной вектором $\mathbf{e}_z$, прямая $L_{\bar z}$ двойственна прямой $\mathbb{C}_{\bar z}$ и называется прямой антидвойственной к $\mathbb{C}_z$.

Теперь изменим обозначения, чтобы ближе связать изложение с вещественной ситуацией и чтобы более понятен стал смысл дальнейшего.

Векторы $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{\bar z}$ мы дальше обозначаем соответственно $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar z}$; формы $\mathbf{f}_x, \mathbf{f}_y, \mathbf{f}_z, \mathbf{f}_{\bar z}$ – через $dx, dy, dz, d\bar z$.

Иными словами мы переходим к дифференцированию функций и мы будем понимать векторы как операторы дифференцирования, а ковекторы как дифференциалы.

Но мы должны сделать два замечания.

Во-первых, комплексным функциям отвечают при забывании умножения на $\mathbf{i}$ отображения не в прямую, а в плоскость, т.е. не вещественные функции, а отображения.

Во-вторых, условие комплексной дифференцируемости гораздо ограничительнее вещественной. Нас интересуют все комплексные функции, дифференцируемые как вещественные отображения, хотя и не обязательно дифференцируемые в комплексном смысле. В частности, мы выделим те из этих отображений, которые отвечают комплексно дифференцируемым функциям (т.е. голоморфным).

Определим прежде всего касательное пространство. В нашем одномерном (модельном) случае нам нужно определить касательное пространство к $\mathbb{C}^1$ в начале. Мы определим три касательных пространства.

Во-первых, овеществляя $\mathbb{C}^1$, мы имеем вещественное двумерное (над $\mathbb{R}$) касательное пространство, которое совпадает с $V^2_{\mathbb{R}}$.

Во-вторых, за *полное* касательное пространство возьмем комплексификацию предыдущего, т.е. двумерное над $\mathbb{C}$ пространство $V^2_{\mathbb{C}}$.

В третьих, *голоморфным* касательным пространством к пространству $\mathbb{C}^1$ в начале назовем пространство $\mathbb{C}_z$. Назовем также *антиголоморфным* касательным пространством пространство $\mathbb{C}_{\bar z}$. (Корректнее в этих двух случаях было бы взять соответствующие фактор-пространства, как уже отмечалось выше, но для нас это несущественно.)

Двойственные пространства назовем соответственно *кокасательными* пространствами. В частности, пространство L_z назовем голоморфным кокасательным пространством.

Отметим, что пространство $V^1_{\mathbb{C}}$ *не считается* касательным. Но оно естественно отождествляется с пространством $\mathbb{C}_z$ через проекцию вдоль $\mathbb{C}_{\bar z}$: $z = x + \mathbf{i}y \in V^1_{\mathbb{C}}$ отождествляется с вектором $x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} = z\frac{\partial}{\partial z} + \bar z\frac{\partial}{\partial \bar z}$ в пространстве $V^2_{\mathbb{C}}$ и, значит, с вектором $z\frac{\partial}{\partial z}$ в $\mathbb{C}_z$. Через это отождествление мы можем рассматривать $V^1_{\mathbb{C}}$ как голоморфное касательное пространство.

Пусть теперь $f : \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}$ – комплексная функция непрерывно дифференцируемая над $\mathbb{R}$. Для удобства пусть она переводит начало в 0.

Дифференциал df (над $\mathbb{R}$) в начале есть линейное отображение $V^2_{\mathbb{R}} \to V^2_{1R}$. Его матрицей в базисах $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$, в прообразе и $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$ в образе служит матрица Якоби $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$.

Из курса комплексного анализа известно, что голоморфность непрерывно дифференцируемой f эквивалентна выполнению условий Коши-Римана. Это значит, что наша матрица Якоби J имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix},$$

т.е. df линейно в комплексном смысле, т.е. принадлежит L_z (которое мы и назвали голоморфным кокасательным пространством).

(Мы могли бы назвать функцию антиголоморфной в случае, если ее дифференциал принадлежит антиголоморфному кокасательному пространству. Но это просто функции комплексно сопряженные с голоморфными.)

В общем случае матрица Якоби J однозначно разлагается в сумму двух матриц, отвечающих комплексным линейным формам на $\mathbb{C}_z$ и $\mathbb{C}_{\bar z}$. Эти линейные отображения в сумме дают дифференциал f. Введем формально два "комплексных дифференциала": первое слагаемое назовем голоморфным дифференциалом и обозначим его $d_z f$, а второе – антиголоморфным дифференциалом и обозначим его $d_{\bar z} f$. Оказывается, эти слагаемые могут быть представлены в "обычном" виде $\frac{\partial f}{\partial z}dz$ и $\frac{\partial f}{\partial \bar z}\overline{dz}$, если ввести в качестве формальных производных операторы $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y})$ и $\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y})$.

Действительно, это разложение для матрицы Якоби имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} & -(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}) \\ \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} & -(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}) \end{pmatrix}$$

Первое слагаемое действует на $V^2_{\mathbb{R}} \approx V^1_{\mathbb{C}}$ как комплексное умножение на число

$$\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\mathbf{i}}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial(u+\mathbf{i}v)}{\partial x} - \mathbf{i}\frac{\partial(u+\mathbf{i}v)}{\partial y}) =$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y})f = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Аналогично получим, что второе слагаемое комплексно сопряжено с умножением на число

$$\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) - \frac{\mathbf{i}}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial(u-\mathbf{i}v)}{\partial x} - \mathbf{i}\frac{\partial(u-\mathbf{i}v)}{\partial y}) =$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar f}{\partial x} - \mathbf{i}\frac{\partial \bar f}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y})\bar f = \frac{\partial \bar f}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar z}}.$$

Но действие комплексно линейного оператора на $V^1_{\mathbb{C}}$ совпадает (после естественного продолжения на пространство $V^2_{\mathbb{C}}$, полученное комплексификацией овеществления) с его действием на $\mathbb{C}_z$, а комплексно антилинейного – с действием на $\mathbb{C}_{\bar z}$ (после указанных выше отождествлений). Таким образом, на пространстве $\mathbb{C}_z$ дифференциал действует умножением на $\frac{\partial f}{\partial z}$, а на пространстве $\mathbb{C}_{\bar z}$ комплексно сопряжен с умножением на $\frac{\partial f}{\partial \bar z}$.

Если теперь нам дан вектор в пространстве $V^1_{\mathbb{C}}$, который мы обозначим $dz\mathbf{e}$ (dz – координата, а $\mathbf{e}$ – базисный вектор, т.е. вещественная единица в комплексной плоскости), то в базисе $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar z}$ он имеет координаты (dz и $\overline{dz}$). Значение вещественного дифференциала нашего отображения после его комплексификации на векторе пространства $V^1_{\mathbb{C}}$ (которое лежит в $V^2_{\mathbb{C}}$ не как координатная прямая !) равно сумме значений на составляющих в этом разложении. Как комплексное число оно равно $d_z f(dz) + d_{\bar z} f(\overline{dz})$, т.е. $df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar z}\overline{dz}$.

Мы пришли к важной формуле комплексного дифференциала необязательно комплексно дифференцируемой функции. Если f голоморфна, то $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial z}$ совпадает с обычной комплексной производной:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(= \frac{\partial f}{\partial y}),$$

как и должно быть, т.к. производная голоморфной функции не зависит от направления.

Детерминант голоморфной матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ равен a^2+b^2. Т.к. матрица Якоби голоморфной функции голоморфна, то получается, что якобиан голоморфного отображения неотрицателен и в неособой точке положителен. В частности, голоморфное отображение в окрестности такой точки сохраняет ориентацию (если в образе и прообразе взять ориентацию, порожденную комплексной структурой, т.е. считать, например, умножение на $\mathbf{i}$ вращением в положительном направлении).

Если дано $\mathbb{R}$-линейное отображение $\varphi : V^2_{\mathbb{R}} \to V^2_{1\mathbb{R}}$ с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ в обычных базисах, то оно продолжается до $\mathbb{C}$-линейного отображения $\bar{\varphi} : V^2_{\mathbb{C}} \to V^2_{1\mathbb{C}}$ с той же матрицей и в тех же базисах. Если перейти к базисам $\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{\bar{z}}$ в $V^2_{\mathbb{C}}$ и $\mathbf{e}_w, \mathbf{e}_{\bar{w}}$ в $V^2_{1\mathbb{C}}$, то матрица заменится на

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ 1 & -\mathbf{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\mathbf{i}}{2} & \frac{\mathbf{i}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a-b\mathbf{i}+c\mathbf{i}+d & a+b\mathbf{i}+c\mathbf{i}-d \\ a-b\mathbf{i}-c\mathbf{i}-d & a+b\mathbf{i}-c\mathbf{i}+d \end{pmatrix}.$$

Для голоморфной матрицы, т.е. при $a = d, b = -c$ получится $\begin{pmatrix} a+c\mathbf{i} & 0 \\ 0 & a-c\mathbf{i} \end{pmatrix}$, для антиголоморфной $a = -d, b = c$ и $\begin{pmatrix} 0 & a+c\mathbf{i} \\ a-c\mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}$.

Определитель голоморфной матрицы равен $a^2 + c^2$, антиголоморфной $-(a^2 + c^2)$.

2. **Общий случай.**

Теперь после подробного изложения одномерного случая его распространение на общий случай возможно провести в сжатой форме, не останавливаясь на деталях.

Линейная часть. Здесь по-существу нужно лишь повторить покоординатно сказанное выше для одномерного случая.

Пусть даны два $\mathbb{C}$-линейных пространства размерностей n и m, V^n и V_1^m. Их овеществления – $2n$ и $2m$-мерные над $\mathbb{R}$ пространства $V^{2n}_{\mathbb{R}}$ и $V_1^{2m}\mathbb{R}$. Комплексификации этих пространств – $2n$ и $2m$-мерные над $\mathbb{C}$ пространства обозначим $V_{\mathbb{C}}$ и $V_{1\mathbb{C}}$.

Выберем базисы. В $\mathbb{C}$-пространствах V^n, V_1^m базисы обозначим $\mathbf{e}_{xj}$ и $\mathbf{e}_{uj}$, а в их овеществлениях к этим же векторам (сохраняя их обозначение) добавим векторы $\mathbf{e}_{yj} = \mathbf{i}\mathbf{e}_{xj}$,$\mathbf{e}_{vj} = \mathbf{i}\mathbf{e}_{uj}$.

Координаты в V^n и V_1^m обозначаем $z_j = x_j + \mathbf{i}y_j$ и $w_j = u_j + \mathbf{i}v_j$, координаты в их овеществлениях x_j, y_j и u_j, v_j (для определенности считаем, что первыми идут вещественные координаты, затем мнимые). В комплексифицированных пространствах сохраняем те же базисы (и их обозначения), а координаты в этих базисах обозначаем z_{xj}, z_{yj} и w_{uj}, w_{vj}. Кроме того, в этих пространствах вводим новые базисы $\mathbf{e}_{zj} = \frac{\mathbf{e}_{xj} - \mathbf{i}\mathbf{e}_{yj}}{2}, e_{\bar{z}j} = \frac{\mathbf{e}_{xj} + \mathbf{i}\mathbf{e}_{yj}}{2}$ и аналогично $\mathbf{e}_{wj}, \mathbf{e}_{\bar{w}j}$.

Заметим, что $\mathbf{e}_{xj} = \mathbf{e}_{zj} + \mathbf{e}_{\bar{z}j},\ \mathbf{e}_{yj} = \mathbf{i}(\mathbf{e}_{zj} - \mathbf{e}_{\bar{z}j})$.

Линейное пространство V', натянутое на векторы $\mathbf{e}_{zj}$ называется голоморфным подпространством, пространство V'' – антиголоморфным. Аналогично – в пространстве $V_{1\mathbb{C}}$. Имеем: $V_{\mathbb{C}} = V' \oplus V''$, $V_{1\mathbb{C}} = V_1' \oplus V_1''$.

При проекции $V_{\mathbb{C}}$ на V' вектор с координатами (x_j, y_j) перейдет в вектор с координатами $(x_j + \mathbf{i}y_j)$ в базисе $\mathbf{e}_{zj}$ голоморфного подпространства, а проекция на V_1'' – в вектор $(x_j - \mathbf{i}y_j)$ в базисе $\mathbf{e}_{\bar{z}j}$.

Соответственно определены двойственные базисы. В пространстве $V^{2n*}_{\mathbb{R}}$, базис двойственный базису $(\mathbf{e}_{xj}, \mathbf{e}_{yj})$ обозначим $(\mathbf{f}_{xj}, \mathbf{f}_{yj})$. Этот же базис сохраняется и в комплексифицированном пространстве, оставаясь двойственным тому же базису. Но в этом пространстве мы вводим еще базис $(\mathbf{f}_{zj}, \mathbf{f}_{\bar{z}j})$, двойственный базису $(\mathbf{e}_{zj}, \mathbf{e}_{\bar{z}j})$.

Линейное отображение $l : V^{2n}_{\mathbb{R}} \to V^{2m}_{\mathbb{R}}$ задается в базисах $\mathbf{e}_{xj}, \mathbf{e}_{yj}$ и

$$\mathbf{e}_{uj}, \mathbf{e}_{vj}$$

$2n \times 2m$-матрицей $\begin{pmatrix} a_{jk} & b_{jk} \\ c_{jk} & d_{jk} \end{pmatrix}$. Та же матрица в тех же базисах задает комплексифицированное $\mathbb{C}$-линейное отображение комплексифицированных пространств. Мы сохраним за комплексификацией обозначение l. Если l было уже $\mathbb{C}$-линейно как отображение исходных пространств $V^n \to V^m$, то элементы его матрицы удовлетворяют соотношениям: $a_{jk} = d_{jk},\ b_{jk} = -c_{jk}$. Переход к базисам $\mathbf{e}_{zj}, \mathbf{e}_{\bar{z}j}$ и $\mathbf{e}_{wj}, \mathbf{e}_{\bar{w}j}$ в комплексифицированных пространствах заменит эту матрицу на матрицу вида $\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & \bar{J} \end{pmatrix}$, где J матрица ограничения комплексифицированного отображения на голоморфное подпространство в прообразе с последующей проекцией на голоморфное подпространство в образе.

В частности, если $m = n$, то определитель оказывается положительным, т.е. комплексно линейные отображения всегда имеют положительный определитель. В частности, комплексное пространство имеет каноническую ориентацию, не зависящую от выбора базиса (комплексного).

(Достаточно применить это утверждение к тождественному отображению в разных базисах. Но, конечно, этот факт ясен и непосредственно. Ведь любая перестановка комплексных координат есть четная перестановка соответствующих вещественных координат, т.к. одна комплексная транспозиция дает две вещественные.)

Функции многих комплексных переменных. Рассмотрим теперь *нелинейные* отображения комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ в другое комплексное пространство $\mathbb{C}^m$. Изменим, как и в одномерном случае, обозначения базисов $\mathbf{e}_{xj}, \mathbf{e}_{yj}, \mathbf{e}_{zj}, \mathbf{e}_{\bar{z}j}$ и $\mathbf{f}_{xj}, \mathbf{f}_{yj}, \mathbf{f}_{zj}, \mathbf{f}_{\bar{z}j}$ и аналогично для второго пространства.

Рассмотрим сначала случай $m = 1$, т.е. случай комплексной функции $f = u + \mathbf{i}v$, (заданной в окрестности начала $O \in \mathbb{C}^n$). Ее овеществление есть отображение $V_{\mathbb{R}}$ в двумерную плоскость $V^2 \approx \mathbb{C}$. Вещественный дифференциал в обычных базисах задается $2 \times n$-матрицей Якоби с производными $\frac{\partial u}{\partial x^i}, \frac{\partial u}{\partial y^i}$ и $\frac{\partial v}{\partial x^i}, \frac{\partial v}{\partial y^i}$ в качестве ее элементов. Эта матрица (в тех же базисах) сохраняется и для комплексифицированного отображения.

Перейдем в образе и прообразе к базисам $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ и $\frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial \bar{w}}$. Мы имеем последовательно:

$$\begin{aligned}
du &= \tfrac{\partial u}{\partial x^j} dx^j + \tfrac{\partial u}{\partial y^j} dy^j \\
dv &= \tfrac{\partial v}{\partial x^j} dx^j + \tfrac{\partial v}{\partial y^j} dy^j \\
du &= \tfrac{\partial u}{\partial x^j} \tfrac{dz+d\bar{z}}{2} - \mathbf{i} \tfrac{\partial u}{\partial y^j} \tfrac{dz-d\bar{z}}{2} \\
dv &= \tfrac{\partial v}{\partial x^j} \tfrac{dz+d\bar{z}}{2} - \mathbf{i} \tfrac{\partial v}{\partial y^j} \tfrac{dz-d\bar{z}}{2} \\
dw = du + \mathbf{i}dv &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial u+\mathbf{i}v}{\partial x^j} - \mathbf{i}\tfrac{\partial u+\mathbf{i}v}{\partial y^j}\right)dz + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial u+\mathbf{i}v}{\partial x^j} + \mathbf{i}\tfrac{\partial u+\mathbf{i}v}{\partial y^j}\right)d\bar{z} \\
d\bar{w} = du - \mathbf{i}dv &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial u-\mathbf{i}v}{\partial x^j} - \mathbf{i}\tfrac{\partial u-\mathbf{i}v}{\partial y^j}\right)dz + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial u-\mathbf{i}v}{\partial x^j} + \mathbf{i}\tfrac{\partial u-\mathbf{i}v}{\partial y^j}\right)d\bar{z}.
\end{aligned}$$

Обычно ограничиваются только первой компонентой (вторая комплексно сопряжена с первой) и пишут:

$$df = \frac{\partial f}{\partial z^j} dz^j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j} d\bar{z}^j$$

Для второй компоненты получается $d\bar{w} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z^j} dz^j + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}^j} d\bar{z}^j$.

Для непрерывно дифференцируемой в вещественном смысле комплексной функции n переменных имеется несколько способов определить ее голоморфность. Основное определение – разложимость в ряд в окрестности каждой точки. Это эквивалентно возможности разложения в ряд по каждой координате z^j и, значит, выполнению условий Коши-Римана по каждой координате, что в свою очередь эквивалентно, как мы знаем, обращению в нуль каждой частной производной $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$. В этом случае мы имеем дифференциал $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz$.

Как указано выше в случае одной переменной, формальная производная по z в этом выражении совпадает с производными по x и по y, т.е. с обычной комплексной производной голоморфной функции.

Приведем дополнительно некоторые факты без доказательства.

Для гладкой функции g, заданной в круге, существует гладкая функция f, для которой $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$.

Для голоморфной функции многих переменных, заданной в открытой области справедлив принцип максимума: ее модуль не достигает экстремального значения ни в одной внутренней точки. (Иным словами – образ открытого множества открыт.)

Если две голоморфные функции совпадают на непустом открытом множестве, то они совпадают и на любом содержащем его связном открытом множестве.

Голоморфная функция с более чем одним аргументом, заданная в окрестности точки на ее дополнении, продолжается значением в этой точке до голоморфной функции на окрестности точки.

Множества общих нулей нескольких голоморфных функций обладают многими важными свойствами, которые делают их объектами изучения под названием аналитических множеств (Гриффитс и Харрис “Принципы алгебраической геометрии”). Однако нас интересуют многообразия.

3. **Комплексные отображения и теорема о неявной функции.**

Если теперь дано отображение F области $\mathbb{C}^k$ в область в $\mathbb{C}^n$, допустим для определенности, что это – окрестности начальных точек и отображение F переводит начало O в начало O_1, то в вещественных базисах его матрицу Якоби в O можно записать как блочную $(2n \times 2k)$-матрицу с блоками

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u^s}{\partial x^t} & \frac{\partial u^s}{\partial y^t} \\ \frac{\partial v^s}{\partial x^t} & \frac{\partial v^s}{\partial y^t} \end{pmatrix}.$$

Эта же матрица служит и для комплексифицированного отображения в тех же базисах.

Отображение голоморфно, если каждая координата его образа оказывается заданной голоморфной функцией. Из сказанного выше о функциях вытекает, что для этого необходимо и достаточно, чтобы комплексификация дифференциала переводила голоморфное касательное пространство в голоморфное. Иначе говоря, чтобы в координатах $\frac{\partial}{\partial z^j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}$ и $\frac{\partial}{\partial w^j}, \frac{\partial}{\partial \bar{w}^j}$ матрица Якоби имела вид

$$J_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & \bar{J} \end{pmatrix},$$

$J = (\frac{\partial w^s}{\partial z^t})$.

В случае $k = n$ определитель матрицы не изменится, но он окажется равным $\det J \det \bar{J} = |\det J|^2$, т.е. неотрицательным: *голоморфные отображения сохраняют ориентацию.*

Теперь рассмотрим комплексный (голоморфный) вариант теоремы о неявной функции.

Теорема о неявной функции. Пусть $F : U \to V$ – голоморфное отображение области в $\mathbb{C}^k$ в область в $\mathbb{C}^n$ максимального ранга в точке $\mathbf{z}^0$, $F(\mathbf{z}^0) = \mathbf{w}^0$; допустим, $\mathbb{C}^k = \mathbb{C}_1^n \oplus \mathbb{C}_2^{k-n}$ – разложение в прямую сумму координатных плоскостей с координатами z_1^j и z_2^j, причем минор матрицы Якоби $\det(\frac{\partial w^s}{\partial z_1^t})|_{\mathbf{z}^0} \neq 0$. Тогда множество $F^{-1}(\mathbf{w}^0)$ представляется вблизи $\mathbf{z}^0$ графиком голоморфного отображения $f : U_1 \to U_2$, где U_1 – область в $\mathbb{C}_1^n$, а U_2 – в $\mathbb{C}_2^{k-n}$ и $U_1 \times U_2$ –окрестность $\mathbf{z}^0$, лежащая в U.

(Иными словами, $F(f(\mathbf{z}_2), \mathbf{z}_2) = \mathbf{w}^0$ для всех $\mathbf{z}_2 \in U_2$.)

Доказательство. Отображение, непрерывно дифференцируемое в вещественном смысле, существует в силу вещественной теоремы о неявной функции. Чтобы доказать, что это отображение голоморфно, нужно, как мы теперь знаем, показать, что все производные $\frac{\partial f^j}{\partial \bar{z}_2^s}$ равны нулю. Но данные нам функции голоморфны, поэтому

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^s} \quad & (F^j(f(\mathbf{z}_2), \mathbf{z}_2))|_{\mathbf{z}_2} = \tfrac{\partial F^j}{\partial \bar{z}^s}(f(\mathbf{z}_2), \mathbf{z}_2)|_{\mathbf{z}} + \\ + \frac{\partial f^l}{\partial \bar{z}^s} \frac{\partial F^j}{\partial z_1^l} \quad & (f(\mathbf{z}_2), \mathbf{z}_2)|_{\mathbf{z}} + \tfrac{\partial \bar{f}^l}{\partial \bar{z}^s} \tfrac{\partial F^j}{\partial \bar{z}_1^l}(f(\mathbf{z}_2), \mathbf{z}_2)|_{\mathbf{z}} = \\ & = \tfrac{\partial f^l}{\partial \bar{z}^s} \tfrac{\partial F^j}{\partial z_1^l}(f(\mathbf{z}_2), \mathbf{z}_2)|_{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

(Мы, как обычно, используем условие суммирования.)

Здесь первое и третье слагаемое второй строки равны нулю в силу голоморфности F. Определитель получившейся однородной системы уравнений не равен нулю, в силу условия теоремы, и потому производные $\frac{\partial F^j}{\partial z_1^l}$ равны нулю, что означает голоморфность функций f^j.

Так же просто доказывается голоморфная

Теорема об обратном отображении. Пусть $f : U \to V$ голоморфное отображение области $\mathbb{C}^n$ в область $\mathbb{C}^n, F(\mathbf{z}^0) = \mathbf{w}^0$, с невырожденной матрицей Якоби в точке $\mathbf{z}^0$. Имеется обратное к f голоморфное отображение g, определенное в некоторой окрестности точки $\mathbf{w}^0$, т.е. $f(g(\mathbf{w})) = \mathbf{w}$ и $g(f(\mathbf{z})) = \mathbf{z}$.

Доказательство. Снова обратное непрерывно дифференцируемое отображение g существует по вещественной теореме об обратном отображении.

Дифференцирование тождества $g(f(\mathbf{z})) = \mathbf{z}$ и здесь дает однородную систему линейных уравнений с определителем, отличным от нуля по условию:

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{\partial}{\partial \bar{z}^s}(g(f(\mathbf{z})))^j = \\ &= \tfrac{\partial g^j}{\partial z^k} \tfrac{\partial f^k}{\partial \bar{z}^s} + \tfrac{\partial g^j}{\partial \bar{z}^k} \tfrac{\partial \bar{f}^k}{\partial \bar{z}^s} = \tfrac{\partial g^j}{\partial \bar{z}^k} \overline{(\tfrac{\partial f^k}{\partial z^s})}. \end{aligned}$$

Отметим, кстати, без доказательства любопытный факт, который не имеет места, вообще говоря, в вещественном случае:

Якобиан взаимно однозначного голоморфного отображения открытого множества ненулевой во всех точках, т.е. обратное отображение голоморфно. (Функция x^3 в нуле дает очевидный противоречащий пример в вещественном случае. Ее комплексификация нарушает взаимную однозначность. Проверьте!)

Теоремы выпрямления отображений из первой главы сохраняют силу и в ситуации голоморфных отображений вместе с данными там доказательствами.

Комплексные подмногообразия $\mathbb{C}^k$. Теперь можно повторить все, что говорилось в вещественном случае, чтобы, используя теорему о неявной функции, убедиться в эквивалентности трех определений комплексных подмногообразий комплексного пространства $\mathbb{C}^k$: это подмножества, которые локально представляются

1. как прообраз точки при голоморфном невырожденном отображении открытого подмножества в $\mathbb{C}^n,\ k \geq n$,

2. как образ открытого подмножества $\mathbb{C}^n$ при голоморфном невырожденном отображении в $\mathbb{C}^k,\ k \geq n$,

3. как график голоморфного отображения открытого подмножества одной координатной плоскости $\mathbb{C}^n$ в другую координатную плоскость $\mathbb{C}^{k-n}$.

В двух последних случаях размерность подмногообразия над $\mathbb{C}$ равна n, а в первом равна $k-n$.

Определение 2 приводит, как и в вещественном случае, к понятию локальной системы координат или локальной карты. Для карт с пересекающимися образами возникает координатное преобразование, которое будет голоморфным. Доказательство, данное в вещественном случае для диффеоморфности преобразования, применимо и в нашем случае.

Вот два основных *определения.*

Для комплексного подмногообразия M в $\mathbb{C}^k$ комплексной размерности *n голоморфной системой координат или локальной картой* в окрестности точки $\mathbf{z} \in M$ называется взаимно однозначное отображение области пространства $\mathbb{C}^n$ на окрестность $\mathbf{z}$ относительно M, которое является голоморфным и невырожденным как отображение в $\mathbb{C}^k$.

Если даны две такие карты $\varphi_1 : U_1 \to M$ и $\varphi_2 : U_2 \to M$, образы которых содержат точку $\mathbf{z} \in M$, то *координатным преобразованием* (или координатной заменой) от первой карты ко второй называется диффеоморфизм $\psi_{12} = \varphi_2^{-1}\varphi_1$, переводящий прообраз пересечения образов двух карт при диффеоморфизме φ_1 в его прообраз при втором диффеоморфизме. При этом ψ_{12} оказывается голоморфным.

Соответственно определяются комплексные структуры на топологических многообразиях, не обязательно заданных как подмногообразия $\mathbb{C}^k$. Более того, в комплексном случае не справедлив прямой аналог теоремы Уитни: не для всякого комплексного многообразия имеется голоморфное вложение в $\mathbb{C}^N$ для какого-нибудь N. Например, имеются компактные комплексные многообразия (простейший пример – двумерная сфера есть одномерное комплексное многообразие), но они не допускают такого вложения, т.к. каждая координата есть голоморфная функция и не может иметь экстремумов.

Знакомство с начальными примерами комплексных многообразий – римановыми поверхностями – отложим до главы 16. Сейчас же рассмотрим пример многообразия, которое *не* является комплексным многообразием, хотя и играет ключевую роль в их теории – с унитарной группой.

4. **Унитарная группа**

Общая линейная группа. Естественно поставить вопрос, что является аналогом основных матричных групп в комплексном случае. Группа невырожденных комплексных матриц порядка $n\times n$ является прямым аналогом $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$. Она обозначается $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ и называется *общей линейной группой над* $\mathbb{C}$. Она содержит $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ в качестве подгруппы и является, так сказать, основным вместилищем остальных матричных групп.

Однако основное значение в комплексном анализе на многообразиях имеет комплексный аналог ортогональной группы.

Одномерный случай. Чтобы корректно его ввести, начнем с одномерного случая. Очевидное условие состоит в том, что модуль определителя (в одномерном случае единственного элемента матрицы) равняется единице. Квадрат модуля комплексного числа z записывается как $z\bar{z}$, а число, модуль которого равен 1 – как $e^{\mathbf{i}\varphi}$, где φ вещественно.

Эрмитово скалярное произведение. Отсюда следует несколько выводов.

Во-первых, вместо матричного уравнения ортогональной группы $AA^T = E$ следует написать $A\bar{A}^T = E$ (E – единичная матрица, черта – комплексное сопряжение.)

Во-вторых, скалярное произведение, сохраняемое преобразованиями с такими матрицами, записывается как $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \Sigma z_1^i \bar{z}_2^i$. Элементы матричного произведения $\bar{A}^T A$ являются попарными скалярными произведениями столбцов матрицы A в этом смысле. Поэтому реперы, в которых скалярное произведение записывается такой формулой, должны быть ортонормальными в смысле этого произведения.

Кроме того, скалярный квадрат вектора оказывается квадратом его длины в овеществленном пространстве, т.к. $\Sigma z^i \bar{z}^i = \Sigma x^{i2} + y^{i2}$. Поэтому *унитарное преобразование*, т.е. комплексное преобразование, сохраняющее евклидову длину в $\mathbb{C}^n$, должно записываться унитарной матрицей в ортонормальном репере.

(Напомним, что скалярное произведение однозначно восстанавливается по скалярному квадрату: $2(a, b) = (a + b, a + b) - (a, a) - (b, b)$, а столбцы матрицы составляют образ канонического репера при преобразовании, которое эта матрица выражает в каноническом репере.)

Итак, мы вводим скалярное произведение $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \Sigma z_1^i \bar{z}_2^i$, которое называем *эрмитовым* и обозначаем $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$. Его алгебраические свойства известны из курса высшей алгебры и мы можем на них не останавливаться.

Унитарная группа. Группа матриц, задающих в каноническом репере преобразования, которые сохраняют это скалярное произведение, называется *унитарной*. Ее обозначение $\mathbf{U}(n)$. Она выделяется матричным уравнением $A\bar{A}^T = E$.

Определитель унитарной матрицы d удовлетворяет соответственно уравнению $d\bar{d} = 1$ и поэтому по модулю равен 1, т.е. имеет представление $e^{\mathbf{i}\varphi}$.

Ортонормированные реперы. Реперы $\mathbf{f}_i$, в которых введенное скалярное произведение сохраняет указанный вид, или (эквивалентно) в которых матрицы преобразований, сохраняющих такое скалярное произведение, удовлетворяют уравнению $A\bar{A}^T = E$, подчинены условиям $(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j) = \delta_{ij}$. Эти реперы, как и в вещественном случае, называются *ортонормированными*.

Топологические свойства. В третьих, унитарная группа связна и компактна. Доказательства практически не отличаются от доказательств для ортогональной группы.

Комплексный репер составляет только половину вещественного репера овеществленного пространства $\mathbb{C}^n$ и его легко непрерывно перевести в любой другой репер, например, полученный из него отражением одного вектора в плоскости остальных. (В плоскости комплексных чисел это достигается непрерывным поворотом на $180°$.) Мы видим, что для комплексного пространства теряет значение понятие ориентации.

Унитарная группа не является комплексно аналитическим многообразием. В четвертых, хотя унитарная группа имеет фундаментальное значение в теории комплексно аналитических многообразий, сама она *не является* комплексно аналитическим многообразием!

Это видно уже в одномерном случае: $\mathbf{U}(1, \mathbb{C})$ есть окружность комплексных чисел, по модулю равных 1, т.е. одномерное многообразие, а комплексные многообразия должны иметь четную размерность. В общем случае характеристический многочлен матрицы является голоморфной функцией ее коэффициентов. На компактном многообразии такая функция должна быть постоянной, в силу выполнения принципа максимума модуля (для голоморфного отображения образ открытого множества открыт). Для функций, т.е. для отображений в прямую это во всяком случае очевидно, т.к. ограничивая отображение на координатные прямые, мы сводим вопрос к известной теореме анализа для функций одной комплексной переменной.

Размерность унитарной группы $\mathbf{U}(n)$ равна n^2. Действительно, приравнивание нулю попарных скалярных произведений столбцов дает $\frac{n(n-1)}{2}$ комплексных уравнений, которые эквивалентны $n(n-1)$ вещественным уравнениям, поскольку вещественная и мнимая части приравниваются нулю независимо. Но равенство единице скалярного квадрата столбца дает только одно вещественное соотношение, т.к. мнимая часть автоматически равна нулю. Всего получается n^2 вещественных соотношений на $2n^2$ вещественных координат. Значит, размерность группы равна n^2, поскольку определяющая ее система уравнений независима. Последнее нетрудно доказать тем же методом, что и для ортогональной группы. Это следует также из вычисления размерности ее касательного пространства.

Касательное пространство унитарной группы совпадает с пространством *косоэрмитовых матриц*, т.е. матриц, удовлетворяющих матричному уравнению $\bar{X}^T = -X$. Это доказывается в точности так же, как аналогичное условие для касательных векторов ортогональной группы. Кроме того, каждая такая матрица служит касательным вектором унитарной группы. Это следует из невырожденности определяющей системы уравнений и совпадения размерности линейного пространства косоэрмитовых матриц с размерностью n^2 унитарной группы (заметьте, что главная диагональ такой матрицы содержит чисто мнимые числа, она не обязательно нулевая в отличие от кососимметрических матриц). Если же не считать невырожденность этой системы доказанной, то нужно отдельно показать, что каждая косоэрмитова матрица служит касательным вектором к ортогональной группе, или во всяком случае, что имеется n^2 независимых касательных векторов. Мы оставим эту проверку в качестве упражнения.

Специальная унитарная группа. По аналогии с $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ вводится группа $\mathbf{SU}(n)$ – *специальная унитарная группа* – группа унитарных матриц с определителем $+1$. Очевидно, что каждая унитарная матрица U однозначно представляется в виде DV, где V имеет определитель $+1$, а D отличается от E тем, что первая единица на диагонали заменена на число обратное определителю матрицы U. Из этого следует, в частности, что топологически унитарная группа является прямым произведением двух своих подгрупп: $S^1 \times \mathbf{SU}(n)$, где только вторая является нормальным делителем, так что это не есть прямое произведение подгрупп в алгебраическом смысле.

Размерность этой группы равна $n^2 - 1$, в частности, при $n = 1$ это тривиальная группа.

$\mathbf{SU}(2)$ *отождествляется с трехмерной сферой.* Докажем это.

С помощью ортонормализации каждый вектор можно включить в ортонормальный репер в качестве его первого вектора. Преобразование переводящее канонический репер в данный ортонормальный репер есть унитарное преобразование. Дополняя это преобразование умножением второго вектора репера на число обратное определителю, приведем матрицу преобразования к специальной унитарной.

Таким образом, если поставить в соответствие каждому преобразованию группы $\mathbf{SU}(n)$ вектор, в который оно переводит первый вектор канонического репера, то мы получим (очевидно, гладкое) отображение $\mathbf{SU}(n) \to S^{2n-1}$. Если в нашем случае (n=2) фиксировать первый вектор, то получатся преобразования, которые переводят второй вектор репера в векторы, полученные из него умножением на числа вида $e^{\mathbf{i}\varphi}$. Но тогда и определитель преобразования равен $e^{\mathbf{i}\varphi}$. Поэтому только тождественное преобразование из группы $\mathbf{SU}(2)$ оставляет данный вектор на месте. Поэтому построенное отображение взаимно однозначно.

Упражнение. Докажите, что получится диффеоморфизм.

$\mathbf{SU}(2)$ *и кватернионы.* Вещественное пространство размерности 4 можно отождествить не только с двумерным комплексным, но также с одномерным кватернионным пространством.

Кватернион $\boldsymbol{\kappa} = a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}$ взаимно однозначно записывается в форме $(a+b\mathbf{i})+\mathbf{j}(c-d\mathbf{i}) = u_1+\mathbf{j}u_2$, где u_1, u_2 – комплексные числа. При умножении кватернионов $\boldsymbol{\kappa} = a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}$ и $\boldsymbol{\lambda} = w+x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = v_1 + \mathbf{j}v_2$ получится кватернион $\boldsymbol{\mu}$, имеющий запись $(u_1v_1 - \bar{u}_2v_2) + j(\bar{u}_1v_2 + u_2v_1)$. Это, очевидно равносильно умножению комплексного вектора $\left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ слева на матрицу $\left(\begin{smallmatrix} u_1 & -\bar{u}_2 \\ u_2 & \bar{u}_1 \end{smallmatrix}\right)$. Если кватернион $\boldsymbol{\kappa}$ был взят единичным (т.е. его длина равна 1), то матрица такого вида, очевидно, оказывается унитарной и ее определитель равным $+1$, т.е. она принадлежит $\mathbf{SU}(2)$. Нетрудно показать также, что любая матрица из этой группы однозначно представляется в таком виде. С другой стороны стороны кватернион по матрице восстанавливается однозначно.

Таким образом, мы имеем интерпретацию группы $\mathbf{SU}(2)$ как группы единичных кватернионов по умножению (что снова доказывает, что эта группа диффеоморфна трехмерной сфере).

Упражнение. Обозначим через I множество *чисто мнимых* кватернионов (т.е. таких, для которых вещественная часть равна нулю). Это трехмерное над $\mathbb{R}$ пространство. Если поставить в соответствие единичному кватерниону $\boldsymbol{\kappa}$ преобразование кватернионов $\boldsymbol{\mu} \mapsto \boldsymbol{\kappa}^{-1}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\kappa}$, то пространство I перейдет в себя. При этом получится ортогональное преобразование этого трехмерного пространства. Более того, каждое ортогональное преобразование I получается действием ровно двух единичных кватернионов, которые противоположны друг другу.

В таком случае группа $\mathbf{SO}(3)$ получается из трехмерной сферы отождествлением диаметрально противоположных точек. Значит, она диффеоморфна трехмерному проективному пространству.