Часть первая. **МНОГООБРАЗИЯ**

А.В. ЧЕРНАВСКИЙ

4 июня 2010 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Подмногообразия аффинного пространства $\mathbb{R}^n$

1. Напоминание о линейной алгебре. Плоскости = линейные многообразия

Пространство $\mathbb{R}^n$. В линейной алгебре рассматривались конечномерные вещественные или комплексные линейные пространства и линейные отображения между ними. Такие пространства одной размерности над одним полем изоморфны. Поэтому мы можем для начала пользоваться в каждой размерности одним стандартным пространством, которое будем обозначать $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$, соответственно в вещественном или комплексном случае.

Образ и ядро линейного отображения. Вместе с каждым линейным отображением $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ определено два подпространства: в $\mathbb{R}^n$ определен *образ* $im\, L = L(\mathbb{R}^k)$, а в $\mathbb{R}^k$ – *ядро* $ker\, L = L^{-1}(0)$.

Матрица линейного отображения. Фиксируем в обоих пространствах базисные реперы: $\mathbf{e}_i$ в $\mathbb{R}^k$ и $\mathbf{f}_i$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда отображение L запишется системой линейных уравнений:

$$y^i = a^i_j x^j, 1 \le i \le n, 1 \le j \le k, \quad \text{причем} \quad L\mathbf{e}_j = a^i_j \mathbf{f}_i. \qquad (*)$$

(Мы воспользовались общепринятым соглашением: если в одночлене индекс встречается ровно два раза, один раз вверху, а другой – внизу, то это предполагает суммирование таких одночленов для всех значений индекса, опуская знак суммы. Например, a^i_i есть след матрицы.)

Матрица коэффициентов $(L) = (a^i_j)$ (i – номер строки, j – номер столбца) служит при фиксированном базисе представителем отображения L, а при замене переменных с матрицей $(B) = (b^j_{j'})$ в прообразе и с матрицей $(C) = (c^{i'}_i)$ в образе, $x' = Bx$, $y' = Cy$, она заменяется на $(L)' = (C)(L)(B^{-1}) = (c^{i'}_i a^i_j b^j_{j'})$: $y^{i'} = c^{i'}_i a^i_j b^j_{j'} x^{j'}$.

Параметрическое задание плоскости. Нам сейчас важна геометрическая точка зрения. Однородные уравнения (*) определяют в пространстве $\mathbb{R}^n$ подпространство $P_L = im(L)$. Геометрически это плоскость, которая проходит через начало O. Ее размерность равна k, если матрица (L) *невырождена* (т.е. имеет максимальный ранг) и $k \le n$.

Если в правой части каждого уравнения системы добавить по константе b^i, то образом будет служить новая плоскость, полученная из прежней сдвигом на вектор с координатами b^i.

Неявное задание плоскости. С другой стороны ядро L (множество решений системы (*) при нулевых y^i) – это плоскость Q_L в $\mathbb{R}^k$, проходящая через начало. Ее размерность равна $k - n$, если матрица системы невырождена и $k \ge n$. Если брать прообразы не только начала, а всех точек $\mathbb{R}^n$, то непустые прообразы будут параллельными плоскостями одной размерности, получаясь друг из друга сдвигами.

В случае невырожденной матрицы, если $k \ge n$, то $im(L) = \mathbb{R}^n$, а если $k \le n$, то $ker(L) = 0$. Во всех случаях ранг матрицы равен размерности $im(L)$.

Эти хорошо известные факты линейной алгебры дают нам два способа задания геометрических объектов – плоскостей.

В первом случае мы говорим, что плоскость задана *параметрически* (параметрами точек плоскости служат координаты x^i точек в $\mathbb{R}^k$). Во втором – плоскость задана *неявно* (как прообраз точки из $\mathbb{R}^n$).

Случай графика. В первом случае полезно выделить вариант, когда $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^{n-k}$ служат дополнительными координатными плоскостями в $\mathbb{R}^n$, а $im(L)$ – графиком линейного отображения $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^{n-k}$.

Точнее: пусть в репере $\mathbf{f}_i$ в $\mathbb{R}^n$ первые k векторов совпадают с репером $\mathbf{e}_i$ в $\mathbb{R}^k$. Тогда наше отображение имеет вид системы

$$\begin{array}{rcll} y^i & = & x^i & \text{для} \quad 1 \le i \le k \\ y^i & = & a^i_j x^j + b^i & \text{для} \quad k+1 \le i \le n. \end{array}$$

Вторая строчка задает линейное отображение $l : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$, матрицей которого служит “существенная” часть (a^i_j), $k+1 \le i \le n$, $1 \le j \le k$. Отображение $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, задаваемое всей системой, можно записать в виде $x \mapsto (x, l(x))$. Образ $L(\mathbb{R}^k)$ этого отображения будет графиком отображения l.

Взаимно однозначная проекция плоскости $L(\mathbb{R}^k)$ на плоскость первых k координат служит для ее параметризации.

(В случае $n = 2$, $k = 1$ это график линейного отображения $y = kx + b$ прямой Ox в прямую Oy.)

Контрольные вопросы. Как построить базисы в пространствах $im(L)$ и $ker(L)$ для данного линейного отображения L?

В каких случаях композиция линейных отображений максимального ранга имеет максимальный ранг? [Если оба отображения мономорфизмы (ядра нулевые) или оба эпиморфизмы (отображения на весь образ), это, очевидно, верно. Какие могут быть случаи, если одно отображение мономорфизм, а другой эпиморфизм?]

2. **Переход к нелинейным уравнениям**

Попытка обобщения. Постараемся теперь освободиться от ограничения линейности в проведенных построениях с тем, чтобы иметь единый подход к гораздо более широкому классу геометрических объектов, чем многомерные плоскости в линейных пространствах $\mathbb{R}^n$. В этот класс должны входить кривые, поверхности и их многомерные обобщения, но он не должен быть слишком широким, например, включать такие подмножества, как канторово множество.

Первый шаг к обобщению заключается просто в том, чтобы заменить в проведенных рассуждениях линейное отображение L непрерывным отображением F. У нас имеется три способа задать "криволинейную плоскость":

a. как образ непрерывного отображения $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$,
b. как прообраз точки при таком отображении,
c. как график отображения $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$, $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n-k}$.

Возникающие трудности. В такой общей постановке мы получим слишком широкий класс объектов. В первом случае напомним о кривых Пеано (и их многомерных аналогах): возможно построить непрерывное отображение отрезка *на* квадрат (и вообще куба на куб любой большей размерности). Кроме того, образ может быть очень сложным и совсем не похож на "искривленную плоскость".

Во втором случае *любое* замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$ служит множеством нулей непрерывной функции, т.е. прообразом точки для отображения $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: например, достаточно взять расстояние от точки $\mathbb{R}^n$ до данного подмножества.

Третий случай более удовлетворителен. Проекция графика непрерывного отображения на область определения (лежащую в $\mathbb{R}^k$) взаимно однозначна и в обе стороны непрерывна, т.е. (*гомеоморфна*), и, значит, график имеет такие же свойства с точки зрения непрерывности, как и область в $\mathbb{R}^k$. Но график однозначно проектируется на $\mathbb{R}^k$, и именно поэтому нельзя задать этим способом уже такой простой объект как окружность. (О топологических понятиях сказано далее в главе 3.)

План: использовать теорему о неявной функции. Анализируя причины неудачи наших обобщений, заметим, что в линейном случае существенным было условие *невырожденности* нашей линейной системы, которое выражалось в том, что ранг матрицы (L) должен был быть максимальным. Перенести условие невырожденности в общую ситуацию трудно, если не потребовать по крайней мере непрерывной дифференцируемости отображения. Вспомним, что аналогичное условие фигурировало в основной теореме многомерного анализа – *теореме о неявной функции.* Именно эта теорема даст нам правильный подход к нашей задаче. Но с ней связаны два ограничения.

Во-первых, она предполагает, что рассматриваются дифференцируемые отображения с непрерывными производными, и, во-вторых, что рассмотрения *локальны*, т.е. происходят в окрестности фиксированной точки. *Эти ограничения будут действовать у нас почти постоянно.*

1). *Условие гладкости.* Мы почти всегда будем иметь дело с дифференцируемыми отображениями, причем часто – с отображениями дифференцируемыми несколько раз или бесконечно много раз.

Напомним, что отображения, все частные производные которых до порядка p существуют и непрерывны, принадлежат *классу гладкости* p (пишут: $F \in \mathcal{C}^p$ и $F \in \mathcal{C}^0$, если F просто непрерывно). Мы будем называть отображение F области $U \subset \mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$ *гладким*, если все *первые* частные производные непрерывны. Как известно из курса многомерного анализа, это условие эквивалентно существованию *дифференциала*, непрерывно зависящего от точки, т.е. возможности аппроксимации F в каждой точке $x_0 \in U$ линейным отображением $L(x) = F(x_0) + dF|_{x_0} = F(x_0) + J(x_0)(x - x_0)$ (линейный оператор J неперывно зависит от x_0 и $|F(x) - L(x)|$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $|x - x_0|$).

(Мы не всегда будем детально рассматривать вопрос о том, какой класс гладкости имеет данное отображение, ограничиваясь соглашением "достаточно большой". Как правило, проследить за тем, какое именно число производных требуется в данной задаче, несложно, но требует много места.)

2). *Условие локальности.* Наше ограничение локальными рассмотрениями существенно. Только локально можно ожидать, что все три указанных способа задания "криволинейных плоскостей" определяют один и тот же класс объектов. Например, как мы уже сказали, окружность не является графиком отображения прямой в прямую. Более того, ее вообще нельзя параметризовать взаимно однозначно и взаимно непрерывно числовым интервалом. Но представить ее целиком неявно, т.е. с помощью уравнения, как известно, возможно ($x^2 + y^2 = R^2$). Ниже мы покажем на основе теоремы о неявной функции, что локально в дифференцируемом случае все три наши способа задания эквивалентны.

Дифференциальные и топологические свойства. Хотя мы будем заниматься *дифференциальной геометрией*, т.е. нас будут в основном интересовать свойства множеств и отображений, связанные с операцией дифференцирования, нам постоянно придется пользоваться и их *топологическими свойствами*, т.е. свойствами, основанными только на непрерывности.

Мы подробно обсудим эти свойства позже, но в этой главе имеющей в основном вводный характер, ограничимся напоминанием об основном понятии топологии – *открытые множества* – в применении к подмножествам пространства $\mathbb{R}^n$.

Открытые подмножества. Подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто, если каждая точка $x \in U$ лежит в U со своей ε-окрестностью $O_\varepsilon(x)$ для некоторого ε, т.е. $\forall x \exists \varepsilon > 0$ так, что $O_\varepsilon(x) \subset U$.

Открытые подмножества $\mathbb{R}^n$ называются также *областями* и *окрестностями* содержащихся в них точек и множеств.

Подмножество B множества $A \subset \mathbb{R}^n$ называется открытым в A (и также открытым *относительно* A), если оно есть пересечение с A какого-нибудь открытого подмножества $\mathbb{R}^n$, т.е. $\exists U$, открытое в $\mathbb{R}^n$, так, что $B = U \bigcap A$. Хорошо известно (и вполне очевидно), что пересечение конечного числа открытых множеств и объединение любого их числа открыто. Дополнения к открытым множествам называются *замкнутыми*, они обладают двойственными свойствами. Они характеризуются тем, что содержат все свои предельные точки. (Так как $\mathbb{R}^n$, очевидно, открыто и замкнуто, его дополнение – пустое множество $\emptyset$ – также считается замкнутым и открытым.)

Непрерывность отображения эквивалентна условию, чтобы прообраз любого открытого множества был открыт (или любого закнутого замкнут) (см. главу 3).

Теперь вспомним теорему о неявной функции.

3. **Теорема о неявной функции. Напоминание**

Линеаризация. Дифференциал и матрица Якоби. Напомним прежде всего, что отображение $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ называется *дифференцируемым в точке* $x_0 \in \mathbb{R}^k$, если оно *линеаризуемо*, т.е. имеется линейное отображение $dF : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ такое, что $F(x) = F(x_0) + dF(x - x_0) + \alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}^n$ – бесконечно малая при стремлении $x \to x_0$ более высокого порядка, чем $|x - x_0|$.

Линейное отображение dF называется *дифференциалом* F, при фиксированных координатных системах в образе и прообразе ему сопоставляется матрица – *матрица Якóби* – элементами которой служат частные производные $\frac{\partial y^i}{\partial x^j}$. (В строке этой матрицы стоят производные одной координаты образа по координатам прообраза.) Матрица Якоби отображения F будет обычно обозначаться (J_F). В случае $k = n$ матрица Якоби имеет детерминант, который называется *якобианом* и обозначается J_F.

Замечание. При линейной замене в образе или в прообразе матрица Якоби умножится на невырожденную матрицу линейного преобразования или ее обратную. Ранг ее не изменится. В частности, сохранится свойство отображения быть невырожденным в данной точке, т.е. иметь матрицу Якоби максимального ранга. ∎

Контрольные вопросы. Чему равна матрица Якоби линейного отображения?

Показать, что линейной заменой координат в окрестности точки можно привести матрицу Якоби в данной точке к простейшему виду: в левом верхнем углу единичная $r \times r$-матрица, а остальные элементы нули, где r – ранг матрицы.

Цепное правило. Теорема о производной сложной функции в курсе многомерного анализа приняла форму теоремы о дифференциале композиции или "цепного правила": *дифференциал композиции равен композиции дифференциалов*, т.е. если отображение H равно композиции GF, то $dH = dG\,dF$ - справа композиция линейных отображений. В матричной форме $(J_H) = (J_G)(J_F)$, справа матричное умножение.

Мы предполагаем здесь, что областью определения каждого из рассматриваемых отображений служит открытое подмножество соответствующего линейного пространства. (Скажем, $G : U \to V$, $F : W \to \mathbb{R}^n$, где U открыто в $\mathbb{R}^k$, V и W открыты в $\mathbb{R}^l$ и $V \subset W$.)

Формулировка теоремы о неявной функции:

Пусть дано отображение $F : U \to \mathbb{R}^n$, где U – открытое подмножество $\mathbb{R}^k$, с непрерывной матрицей Якоби (т.е. с непрерывными первыми частными производными) причем $k \geq n$ и ранг матрицы Якоби в некоторой точке $x^0 \in U$ максимален (т.е. равен n). Пусть $F(x^0) = y^0$.

Тогда пересечение $F^{-1}(y^0)$ с некоторой окрестностью точки x^0 есть график непрерывно дифференцируемого отображения открытого подмножества координатной (k-n)-мерной плоскости в дополнительную n-мерную координатную плоскость.

(Практически сначала по ненулевому минору матрицы Якоби в прообразе находится n-мерная координатная плоскость, а затем дополнительная к ней $(k-n)$-мерная.)

Эта форма теоремы удобна для наших целей. Ее смысл в том, что множество, задаваемое неявно, как прообраз точки при гладком отображении, может быть представлен локально графиком гладкого отображения из одной координатной плоскости в другую дополнительную плоскость.

Обычная формулировка такая (см. Фихтенгольц, 1969, т.1, гл.VI, §208):

Даны n уравнений $F_i = 0$ с непрерывно дифференцируемыми функциями от $k = m+n$ переменных $F_i(x_1, \dots x_m, z_1 \dots z_n)$, в прямоугольной окрестности точки $x^0 = (x_l^0, z_j^0)$ с ребрами параллельными координатным осям, причем $F_i(x^0) = 0$ и определитель матрицы частных производных $\frac{\partial F_i}{\partial z_j}|_{x^0}$ отличен от нуля.

Тогда в некоторой окрестности точки x_i^0 в координатной плоскости (x_i) переменные z_j оказываются непрерывно дифференцируемыми функциями $z_j = f(x_1 \dots x_m)$, для которых $F(x_i, f_j(x_i)) = 0$ и $z_j^0 = f_j(x_i^0)$.

Эти две формулировки, очевидно, эквивалентны, но наша формулировка подчеркивает, что при некоторых условиях (невырожденности матрицы Якоби) множество, заданное как прообраз точки, оказывается графиком (состоит из точек вида $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$). Это обобщает ситуацию линейной алгебры. Мы покажем, что эта теорема позволяет на самом деле свести общий случай к линейному “с точностью до нелинейной замены координат”.

Особое значение имеет случай, когда $k = n$, см. след. пункт.

Замечание. Мы часто будем для краткости заменять последовательность координат одной буквой, например, писать $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ вместо $F(x^1, \dots, x^r, y^1, \dots, y^s)$. Ясно, что здесь $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ – проекции точки из $\mathbb{R}^{r+s}$ на координатные плоскости $\mathbb{R}^r$ и $\mathbb{R}^s$.

4. **Теорема об обратном отображении. Диффеоморфизмы и локальные координаты.**

Теорема об обратном отображении. *Пусть дано непрерывно дифференцируемое отображение $f_i(x_1 \dots x_m) = y_i, 1 \le i \le m$, заданное в окрестности $U \subset \mathbb{R}^m$ точки x^0, с ненулевым якобианом в этой точке.*

Тогда в некоторой окрестности $V \subset \mathbb{R}^m$ точки $\mathbf{y}^0 = f(\mathbf{x}^0)$ определено такое гладкое отображение $g_i(y_1 \dots y_m) = x_i$, что $f(g(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$ для $\mathbf{y} \in V$ и $g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ для $\mathbf{x} \in g(V)$, причем $g(\mathbf{y}^0) = \mathbf{x}^0$ и матрица Якоби g в точке $\mathbf{y}^0$ обратна к матрице Якоби f в точке $\mathbf{x}^0$.

Доказательство. Рассмотрим уравнения $f_j(x_i) - y_j = 0$ и заметим, что якобиан левых частей по переменным x_i совпадает с якобианом функций f_j. Можно применить теорему о неявной функции, что дает окрестность $V(\mathbf{y}^0)$ и непрерывно дифференцируемое отображение $g : V \to \mathbb{R}^m$ такое, что $f(g(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in V$. В частности, образ отображения f содержит V. Отсюда следует, что образ в $\mathbb{R}^m$ малой окрестности x^0 открыт.

Тождество $f(g(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$ чисто формально означает, что g устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками V и $U_1 = g(V)$ и при этом $f|_{U_1})$ и $g|_V$ взаимно обратны. Действительно, пусть $f(x_1) = f(x_2) = y'$ и точки x_i служат образами точек из V для g. В силу тождества $f(g(y)) = y$ они могут быть образами только точки y'. Значит, $x_1 = x_2$. Аналогично, если $g(y_1) = g(y_2) = x'$, то $f(x') = y_1$ и $f(x') = y_2$, т.е. $y_1 = y_2$.

Применение к тождеству $f(g(y)) = y$ цепного правила дает равенство $(J_f)(J_g) = E$ (единичная $m \times m$-матрица), откуда следует, что матрица (J_g) невырождена и к g таким же образом можно применить теорему о неявной функции. В частности, если V достаточно мала, так что во всех ее точках якобиан g не нуль, то образ V, т.е. U_1, открыт, и мы доказали, что f и g взаимно обратны на открытых окрестностях точек $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{y}^0$. Кроме того, g непрерывно дифференцируемо с невырожденной матрицей Якоби. ■

Следствие. Образ открытого подмножества аффинного пространства при невырожденном во всех точках отображении его в аффинное пространство той же размерности является открытым подмножеством. ■

Теорема об обратном отображении утверждает, что отображение открытого подмножества аффинного пространства в это же пространство (или другое равной размерности) будет *диффеоморфизмом* в достаточно малой окрестности точки, если в этой точке якобиан отличен от нуля. В частности,

Определение. *Диффеоморфизмом* области $\mathbb{R}^n$ называется *обратимое отображение этой области на другую область, возможно, в другом аффинном пространстве, непрерывно дифференцируемое в обе стороны.* (Размерность второго пространства также n, т.к. дифференциалы взаимно обратны.)

Это понятие в дифференциальной геометрии имеет фундаментальное значение: все дифференциальные свойства одной области остаются справедливыми и для другой диффеоморфной ей области. Оно будет дальше распространено на многомерные поверхности в аффинных пространствах и на абстрактные многообразия.

Значение этого понятия в применении к областям $\mathbb{R}^n$ в том, что с его помощью вводятся общие нелинейные системы координат (см.ниже п.6).

5. **Замечания о пространстве $\mathbb{R}^n$.**

Два значения $\mathbb{R}^n$. Хорошо известно, что термин "пространство $\mathbb{R}^n$" имеет два значения: под ним понимают или линейное, т.е. векторное, пространство или точечное (*аффинное*) пространство. При фиксированном начале точки и векторы взаимно однозначно определяют друг друга, так что на различие между ними часто можно не обращать большого внимания. Однако для нас дальше это различие будет существенно и на нем нужно остановиться.

Стандартные координаты $\mathbb{R}^n$. Под пространством $\mathbb{R}^n$ мы, как правило, будем понимать стандартное "числовое" пространство, элементами (точками) которого являются упорядоченные наборы из n чисел. Числа в таком наборе называются *стандартными координатами* точки. С этим пространством однозначно связывается векторное пространство с фиксированным координатным репером, в котором координаты вектора совпадают со стандартными координатами соответствующей точки. Вектор, отвечающий точке, называется ее *радиус-вектором.* Это векторное пространство мы также иногда будем обозначать $\mathbb{R}^n$. Всегда, однако, будет ясно, идет ли речь о точках или векторах. Точечное пространство $\mathbb{R}^n$ является *аффинным* относительно векторного $\mathbb{R}^n$ в силу следующей конструкции.

Векторные пространства V_A. Любые две точки A, $B \in \mathbb{R}^n$ определяют вектор $\overrightarrow{AB}$ в $\mathbb{R}^n$, координаты которого равны разности координат точек B и A. Мы называем его вектором с началом в A и концом в B. Ясно, что векторы с началом в A образуют векторное пространство V_A естественно изоморфное $\mathbb{R}^n$. В частности, V_O совпадает с векторным пространством $\mathbb{R}^n$.

Изоморфизмы $\pi_{AB} : V_A \to V_B$. Между каждой парой пространств V_A, V_B имеется однозначно определенный изоморфизм π_{AB}, поскольку каждое из этих пространств естественно изоморфно $\mathbb{R}^n$. Мы говорим, что этот изоморфизм получается *параллельным переносом* на вектор $\overrightarrow{AB}$. Это значит, что если от начала и конца вектора $\mathbf{u} \in V_A$ отложить стрелку, отвечающую вектору $\overrightarrow{AB}$, то мы получим начало и конец соответствующего вектора $\mathbf{v} \in V_B$. Действительно, разности координат этих векторов одинаковы.

Построенные изоморфизмы, очевидно, удовлетворяют для любой тройки точек A, B, C равенству $\pi_{AC} = \pi_{BC}\pi_{AB}$ и это показывает, что имеется согласованное отождествление пространств V_A между собой. Это отождествление известно из школы как соответствие связанных и свободных векторов. В силу этого отождествления, мы можем переносить векторы из одной точки в другую. Это – *параллельный* перенос.

Итак, каждой точке A афинного пространства $\mathbb{R}^n$ соответствует векторное пространство V_A, векторы которого находятся во взаимно однозначном соответствии с точками $\mathbb{R}^n$. Двум точкам A и B отвечают преобразование p_{AB} (параллельный сдвиг) пространства $\mathbb{R}^n$, переводящее A в B, и линейный изоморфизм π_{AB} пространства V_A на V_B. Для трех точек A, B, C выполнено условие транзитивности: $p_{AC} = p_{BC}p_{AB}$ и $\pi_{AC} = \pi_{BC}\pi_{AB}$. Именно в этом смысле говорят, что точечное пространство $\mathbb{R}^n$ является аффинным пространством векторного пространства $\mathbb{R}^n$. (В этом смысле можно говорить об аффинном пространстве любой группы. Нужно только заменить параллельные сдвиги на групповые правые или левые сдвиги.)

6. **Локальные координаты в областях $\mathbb{R}^n$.**

Локальные координаты. Пусть задан диффеоморфизм $h : U \to V$, где U и V – области в $\mathbb{R}^n$. Принимая координаты точки $x \in U$ в $\mathbb{R}^n$ за координаты точки $y = h(x)$, говорят, что в V введена (вообще говоря, нелинейная, если нелинейно h) *система координат.*

Определение. Образы координатных прямых и плоскостей называются *координатными линиями* и *координатными поверхностями* (соответствующих размерностей) данной криволинейной координатной системы в V.

Рассмотрим основные примеры.

Полярная система. Самый известный пример нелинейной координатной системы – полярная система на плоскости. Здесь U есть открытая (т.е. без граничных точек) полуполоса $(x_1 > 0, 0 < x_2 < 2\pi)$, а V – область на плоскости дополнительная к лучу оси абсцисс $x \geq 0$, диффеоморфизм задается отображением

$$y_1 = x_1 \cos x_2, y_2 = x_1 \sin x_2.$$

Задать взаимнооднозначно координаты сразу во всей области $\mathbb{R}^2 \setminus O$ с помощью прямоугольной области V (произведение интервалов, может быть, бесконечных) нельзя потому, что она недиффеоморфна прямоугольнику – она *неодносвязна:* единичную окружность нельзя непрерывно продеформировать в точку, как это можно было бы сделать в такой области V. Мешает начало O, которое не входит в эту область.

Формулы диффеоморфизма в обычных обозначениях:

$$x = \rho \cos \varphi, \; y = \rho \sin \varphi$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \; \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Координатные линии в этой системе – это окружности с центром в O и лучи, выходящие из O.

Сферическая система. Имеются два аналога полярной системы координат в трехмерном пространстве – сферическая и цилиндрическая системы.

Сферическая система имеет значение для географии и астрономии и вообще для наблюдения мира из одной точки. Координатами в этой системе служат радиус – расстояние r от начала (например, центра Земли) и два угла: азимут φ и широта θ. Определение угловых координат ведется по отношению к декартовой системе. Угол φ совпадает с полярным углом проекции точки на плоскость x, y, а угол θ отсчитывается в вертикальной (проходящей через точку и через ось z) плоскости от положительного направления оси z. Азимут меняется на всей числовой оси и имеет период 2π, θ меняется от 0 до π. Для точек на оси Oz азимут не определен.

(Иногда отсчет θ ведут от экватора, т.е. плоскости xy, в этом случае говорят о "географических" координатах и "широта" θ меняется от $-\pi/2$ до $\pi/2$, а азимут называется "долготой".)

Эта система имеет законное право называться нелинейной системой координат лишь для областей, не содержащих точек на оси z, при этом область не должна полностью охватывать эту ось, т.к. иначе азимут не будет иметь определенного значения, которое изменится на 2π при однократном обходе этой оси.

Приведем формулы диффеоморфизма, задающего сферическую координатную систему:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \;\; y = r \sin \varphi \sin \theta, \;\; z = r \cos \theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \;\; \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \;\; \operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

Сферическая система имеет многомерное обобщение, причем определение можно дать индуктивно. Добавление k-ой координтной оси добавляет новую угловую координату θ_{k-2}, причем предыдущие формулы умножаются на $\sin \theta_{k-2}$ и добавляется новая формула $x_k = r \cos \theta_{k-2}$.

Цилиндрическая система. Координатами точек в $\mathbb{R}^3$ в этой системе служат обе полярные координаты (ρ, φ) проекции точки на плоскость x, y и координата z декартовой системы. Заметим, что здесь ρ – расстояние до оси z, а не до начала.

Формулы координатного диффеоморфизма:

$$x = \rho \cos \varphi, \;\; y = \rho \sin \varphi, \;\; z = z.$$

Отметим, что все три примера нелинейных систем координат предполагают уже заданной декартову систему и, в частности, заданной *метрику*, измерение длин.

Контрольный вопрос. Опишите координатные линии и поверхности построенных координатных систем.

Якобиан системы. Нелинейная система координат определяется диффеоморфизмом одной области пространства $\mathbb{R}^n$ на другую. Важной локальной характеристикой диффеоморфизма является его якобиан. Это, как показывалось в курсе анализа, – коэффициент объемного растяжения в точке.

Как нетрудно подсчитать, якобиан для полярной системы равен ρ, для сферической — $r^2 \sin\theta$ и для цилиндрической — ρ.

Локальные координаты вводятся, как известно, не только в аффинном пространстве, но и, например, на поверхностях, как, скажем, географические координаты областей на сфере (карты). Но мы пока еще не готовы ввести это понятие в нужной общности.

7. **Выпрямление отображений**

Покажем теперь, что каждое непрерывно дифференцируемое отображение области одного аффинного пространства $\mathbb{R}^k$ в область в другом $\mathbb{R}^n$ может быть *выпрямлено* в малой окрестности точек, где оно *невырождено*, т.е. имеет максимальный ранг. Под этим понимается то, что *можно выбрать, не меняя отображение, системы локальных координат в окрестности такой точки и ее образа так, чтобы это отображение записывалось в новых координатах линейными функциями.*

Выпрямление диффеоморфизма. В качестве первого примера заметим, что *диффеоморфизм может быть представлен с помощью тождественного отображения ($y_i = x_i$), если локальную систему координат в образе выбрать с его помощью*, т.е. за координаты точки в образе принять координаты ее прообраза (или принять за координаты точки в прообразе координаты ее образа).

Выпрямление отображения $\mathbb{R}^k_1 \to \mathbb{R}^n_2$ при $k \geq n$. Пусть $F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \mathbf{y}$ – непрерывно дифференцируемое отображение с отличным от нуля якобианом $J = \det\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}\right)$ по $\mathbf{x}$ в окрестности точки $(\mathbf{x}^0, \mathbf{z}^0)$. Здесь $\mathbf{x}$ – точка $\mathbb{R}^n_1$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{k-n}_1$, где $\mathbb{R}^n_1$, $\mathbb{R}^{k-n}_1$ – дополнительные координатные плоскости в $\mathbb{R}^k_1$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_2$.

“Распроектируем” это отображение, т.е. заменим его отображением $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \mapsto (F(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \bar{\mathbf{z}}) = \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ пространства $\mathbb{R}^k_1$ в пространство $\mathbb{R}^k_2 = \mathbb{R}^n_2 \times \mathbb{R}^{k-n}_2$. Координаты точки $\bar{\mathbf{z}}$ в $\mathbb{R}^{k-n}_2$ те же, что и у $\mathbf{z}$ в $\mathbb{R}^{k-n}_1$. Матрица Якоби Φ в точке $(\mathbf{x}^0, \mathbf{z}^0)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

невырождена, т.к., очевидно, имеет якобиан в этой точке равный якобиану J.

Значит, это – диффеоморфизм в окрестности $(\mathbf{x}^0, \mathbf{z}^0)$, и мы можем использовать его обращение для введения локальных координат в окрестности этой точки в $\mathbb{R}^k$. Точка $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ получит координаты $(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{z}})$, где $\mathbf{y} = F(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, $\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{z}$ и отображение Φ станет тождеством, а отображение F – проекцией на координатную плоскость: $(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{z}}) \mapsto \mathbf{y}$. В прообразе мы берем новые координаты, а в образе стандартные координаты в $\mathbb{R}^k_2$, и в этих координатах исходное отображение F записывается указанным образом. ■

Таким образом, непрерывно дифференцируемое отображение области аффинного пространства в аффинное пространство меньшей размерности, невырожденное в некоторой точке, локально *гладко эквивалентно* в окрестности этой точки обычной проекции пространства на плоскость. Разумеется, все это справедливо лишь в некоторой окрестности данной точки, возможно, очень маленькой.

Выпрямление отображения при $k \leq n$. Пусть теперь $k \leq n$ и данное отображение $F : \mathbb{R}^k_1 \to \mathbb{R}^n_2$, $(\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y})$, имеет матрицу Якоби максимального ранга (k) в точке $\mathbf{x}^0$. Разложим пространство $\mathbb{R}^n_2$ в прямое произведение двух координатных плоскостей, $\mathbb{R}^k_2$ с координатами $\mathbf{y}_1$ и $\mathbb{R}^{n-k}_2$ с координатами $\mathbf{y}_2$ так, что отличен от нуля определитель Δ производных переменных $\mathbf{y}_1$ по $\mathbf{x}$.

Домножим прямым образом данное пространство $\mathbb{R}^k_1$ на $\mathbb{R}^{n-k}_1$ и введем в $\mathbb{R}^n_1 = \mathbb{R}^k_1 \times \mathbb{R}^{n-k}_1$ координаты $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$. Определим отображение этого прямого произведения в $\mathbb{R}^n$: если $F(\mathbf{x}) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$, то $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \mapsto (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 + \mathbf{z})$.

Его матрица Якоби:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}_1}{\partial \mathbf{x}} & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{y}_2}{\partial \mathbf{x}} & 1 \end{pmatrix}$$

Якобиан этого отображения равен определителю $\Delta \neq 0$. Значит, это диффеоморфизм в окрестности точки $(\mathbf{x}^0, 0)$ и с помощью этого диффеоморфизма можно ввести локальные координаты в окрестности точки $F(\mathbf{x}^0)$. Координаты $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ получит точка $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 + \mathbf{z})$, где $F(\mathbf{x}) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$, поэтому точка $F(\mathbf{x})$ получит координаты $(\mathbf{x}, 0)$, а отображение F окажется стандартным вложением плоскости. Иными словами отображение $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ локально *гладко эквивалентно* вложению $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, 0)$ координатной плоскости $\mathbb{R}^k$ в объемлющее пространство $\mathbb{R}^n_1$. ■

Задача оценки требуемой величины окрестности в этих построениях представляет интерес, но приведенными теоремами не решается.

Упражнения. 1. Выпрямить отображение:

$$x = 2\,u - e^u + \sin^2 v \quad\quad y = e^u + \cos^2 v \quad\quad z = v$$

в окрестности точки (0,0). Проверить условие регулярности и представить *образ* отображения в окрестности точки (0,0) неявно как полный прообраз точки при регулярном отображении в $\mathbb{R}^1$ области из R^3 (множеством уровня некоторой функции).

2. Выпрямить отображение:

$$x = w \sin u - v \quad\quad y = v \sin u$$

в окрестности точки (0,1,0) и параметризовать в окрестности точки (0,1,0) *полный прообраз* M образа этой точки интервалом числовой оси (т.е. построить регулярное отображение интервала в $\mathbb{R}^3$, образом которого служит M.)

Приведем решение первой задачи.

Данное отображение бесконечно гладко (даже аналитично). Оно регулярно в точке (0,0). Матрица Якоби имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 - e^u & \sin 2v \\ e^u & -\sin 2v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В точке (0,0) ее значение есть

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Мы получим ненулевой определитель квадратной матрицы в точке (0,0,0), если добавим третью координту w в прообразе и расширим отображение на окрестность (0,0,0), положив

$$x = 2\,u - e^u + \sin^2 v + w \quad\quad y = e^u + \cos^2 v \quad\quad z = v.$$

Теперь обратим отображение:

$$u = ln(y - cos^2 z), \quad v = z, \quad w = x + y - 2\,ln(y - cos^2 z) - 1.$$

Требуемая функция дается последним выражением: наша поверхность имеет уравнение $w = 0$ или $x + y - 2\,ln(y - cos^2 z) = 1$.

Итак, мы перешли от параметрического задания поверхности к ее неявному заданию. Мы видим, что самым сложным моментом является обращение получившегося локального диффеоморфизма. В нашем случае это удалось без труда, благодаря подбору формул. В общем случае нужны специальные вычислительные методы.

8. **Особые и неособые точки. Регулярные отображения**

Строение окрестности неособой точки. Мы получили попутно такой факт. В обоих случаях (при $k \geq n$ и при $k \leq n$) можно ввести "прямоугольную" относительно некоторой локальной системы координат окрестность, в которой отображение выглядит особенно просто.

При $k \geq n$ *для точки в прообразе*, в которой матрица Якоби имеет максимальный ранг, построена окрестность, имеющая в некоторой локальной системе координат вид прямого произведения двух кубов, причем отображение в этой окрестности представляется как проекция на один из сомножителей.

В случае $k \le n$ такую же окрестность можно построить для точки, являющейся *образом* точки с максимальным рангом матрицы Якоби, причем для некоторой локальной системы координат отображение выглядит локально как вложение куба в качестве одного из горизонтальных слоев в прямом произведении двух кубов.

Особые и неособые точки. Итак, если отображение непрерывно дифференцируемо, то для точек, где матрица Якоби имеет максимальный ранг, отображение в некоторой окрестности приводится к специальному простому виду.

Это позволяет назвать такие точки *неособыми* или *несингулярными* или также *регулярными.*

Наоборот, *особыми* или *сингулярными*, а для функций (т.е. для отображений в прямую) также *критическими* называют точки, в которых ранг матрицы Якоби не максимально возможный. (Например, для функций – нулевой ранг, т.е. равны нулю все первые частные производные).

Определение. Отображение, для которого все точки прообраза неособые, называется *регулярным.*

Если в точке x отображение имеет максимальный ранг, то это верно и для всех точек из некоторой окрестности x, иначе говоря, *множество неособых точек открыто.* Имеется промежуточный случай, когда ранг матрицы Якоби не максимальный, но постоянный в окрестности данной точки. По одной теореме анализа (см. задачу в следующем пункте) отображение также устроено достаточно хорошо в окрестности такой точки, в частности, образ является гладким многообразием. Но мы сейчас не рассматриваем этот случай.

9. **Особые точки плоских кривых**.

Рассмотрим неявное задание кривой $F(x,\,y)=0$ в окрестности особой точки функции F (допустим, что эта точка – начало O, так что можно принять: $x=dx$ и $y=dy$). Аппроксимируем F вблизи начала многочленом Тейлора второй степени:

$$F(x,\,y) \approx p\,dx^2 + 2q\,dxdy + r\,dy^2,$$

где коэффициенты p, q, r – вторые производные в O. Приравнивая это выражение нулю, т.е. пренебрегая бесконечно малыми третьего порядка, найдем из него направление касательной в особой точке O кривой, т.е. предельное значение отношения dy к dx (или dx к dy). Мы имеем квадратное уравнение. Если определитель $\Delta = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y})$ положителен, его левая часть представляется произведением двух линейных сомножителей $u_i dx + v_i dy$, $i=1,\,2$, и оно имеет два различных решения $\frac{dy}{dx} = -\frac{u_1}{v_1}$ и $\frac{dy}{dx} = -\frac{u_2}{v_2}$ (или $\frac{dx}{dy} = -\frac{v_i}{u_i}$). В этом случае начало служит точкой самопересечения кривой. Говорят, что в ней пересекаются две ветви кривой. Первая имеет наклон $-\frac{u_2}{v_2}$, вторая – $-\frac{u_1}{v_1}$. Выделение этих ветвей, вообще говоря, достаточно трудная задача.

Если $\Delta = 0$, но не все коэффициенты второго дифференциала в O нули, то d^2F есть полный квадрат, мы имем один двойной корень уравнения и, значит, одно направление касательной. Линейной заменой переведем ось $x=0$ в эту касательную. Тогда уравнение кривой примет вид $F(x,\,y) = x^2 + A(x,\,y)$, где $A(x,\,y)$ – функция, разложение Тейлора которой начинется с третьей или более высокой степени.

Будем теперь делать замены переменных так, чтобы постараться устранить кубические члены. Допустим, имеется член ax^3, $a \ne 0$. Так как $x^2+ax^3 = (x(1+ax/2))^2 - \frac{a^2x^4}{4}$, замена $x' = x(1+ax/2)$, $y' = y$ (с ненулевым якобианом в окрестности O) устраняет в разложении F член вида ax^3.

Если, далее, имеется член bx^2y, $b \ne 0$, то он устраняется заменой $x' = x(1+by/2)$, $y' = y$ (т.к. $x^2 + bx^2y = (x(1+by/2))^2 - \frac{bx^2y^2}{4}$).

Наконец, $x^2 + cxy^2 = (x + cy^2/2)^2 - \frac{c^2y^4}{4}$ и замена $x' = x + cy^2$, $y' = y$ сводит разложение F с точностью до четвертого порядка к $x^2 + dy^3$.

Можно показать (мы займемся такими вопросами во втором томе), что если $d \ne 0$, то заменой переменных функцию F можно привести к сумме этих двух одночленов. Кривая в этом случае называется *полукубической параболой* и ее вид показан на рисунке. В этом случае особая точка называется *острием или точкой возврата первого рода.* Например, *астроида* с уравнением $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$ имеет четыре таких острия, а у циклоиды $x = a(t - \sin t,\ y = a(1-\cos t)$ острие повторяется периодически (в моменты прихода текущей точки на ось абсцисс). Одно острие имеется у *кардиоиды* $\rho = \cos\varphi + 1$. (Проверьте!)

Далее возможны случаи, когда обращается в нуль весь второй дифференциал или весь третий, а второй сводится к x^2 или, наконец, разложение F начинается с четвертого дифференциала. Мы не будем заниматься здесь этим локальным анализом кривых, но приведем в виде упражнения два частных случая.

Пример острия дается кривой $(y-x^2)(y+x^2)=0$, рассматриваемой в правой полуплоскости. При этом ветвь $y-x^2=0$ параметризуется отрицательной полуосью Ox, а ветвь $y+x^2=0$ положительной. (Это значит, что отрицательному значению параметра x мы ставим в соответствие точку кривой с координатами $(-x,\, x^2)$), а положительному точку $(x,\, -x^2)$. Мы получим при этом гладкую параметризацию этой кривой, которая, конечно, не будет регулярной, т.к. в нуле производная в обоих случаях равна нулю.

Клювом или точкой возврата второго рода называется особая точка кривой, в окрестности которой она распадается на две ветви, которые обе касаются одной прямой и лежат с одной стороны от нее и обе заканчиваются в особой точке. Примером служит кривая $F=(y-x^2)(y-x^4)=0$, рассматриваемая в правой полуплоскости. Мы принимаем, что отрицательная полуось Ox параметризует ветвь $y-x^2=0$, а положительная вторую – $y-x^4=0$. Как и в предыдущем примере, это будет гладкая, но не регулярная параметризация.

Возможен также случай, когда кривая в окрестности особой точки просто состоит из двух ветвей, имеющих в этой точке общую касательную, но для каждой из них точка не является особой. Например, достаточно перемножить уравнения двух окружностей, касающихся в одной точке:

$$(x^2+y^2-1)((x+1)^2+y^2-4)=0.$$

Задача. Постройте *регулярную* параметризацию этой кривой.

Если второй дифференциал обращается в нуль, то через особую точку может проходить более двух ветвей.

Задача. Найти особую точку *лемнискаты Бернулли* (произведение расстояний на плоскости любой ее точки до двух точек $(-a,0)$ и $(a,0)$ равно a^2). Найти наклоны двух ветвей в окрестности особой точки.

10. **Подмногообразия** $\mathbb{R}^n$

Мы теперь можем определить объект, с которым мы больше всего и будем иметь дело.

Главная мысль состоит в допущении произвольных (непрерывно дифференцируемых) локальных координатных систем. Но в них линейные объекты – плоскости – будут выглядеть искривленными.

Упражнение. Написать уравнение прямой линии в полярных координатах и построить график получившейся кривой в плоскости ρ, φ.

Значит, нам следует расширить класс рассматриваемых объектов, хотя бы для того, чтобы иметь возможность рассматривать линейные объекты в нелинейных координатах.

Подмногообразием в $\mathbb{R}^n$ *размерности* k (также k-мерной поверхностью) в аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$ называют подмножество M, для каждой точки A которого имеется локальная система координат в некоторой окрестности $U(A)$ в $\mathbb{R}^n$, для которой пересечение $U\bigcap M$ выделяется в этой системе координат уравнениями координатной плоскости $x_i=0$, $k+1\le i\le n$. Размерность k обозначается $\dim M$.

Из того, что было сказано выше (в п.4.), следует, что имеется два основных способа локального представления подмногообразий: как прообразов точек при непрерывно дифференцируемых отображениях и как образов областей из $\mathbb{R}^k$. При этом во всех случаях соответствующие матрицы Якоби должны иметь максимальный ранг.

Определение. *Множество M в $\mathbb{R}^n$ называется k-мерным гладким подмногообразием в одном из двух эквивалентных случаев.*

1-ый случай. Для каждой точки $\mathbf{x}_0\in M$ имеется окрестность ее U в $\mathbb{R}^n$ и непрерывно дифференцируемое отображение $f:V\to U$ открытого подмножества V пространства $\mathbb{R}^k$, при котором ранг матрицы Якоби во всех точках равен k и $f(V)=M\cap U$. (Уменьшая окрестности, можно потребовать, чтобы f было взаимно однозначным отображением V на $M\cap U$.)

2-й случай. Для каждой точки $\mathbf{x}_0\in M$ имеется окрестность ее U в $\mathbb{R}^n$ и непрерывно дифференцируемое отображение $F:U\to\mathbb{R}^{n-k}$ так, что в $\mathbf{x}^0$ ранг матрицы Якоби максимален и $M\cap U$ совпадает с $U\cap F^{-1}(\mathbf{y}_0)$, где $\mathbf{y}_0=F(\mathbf{x}^0)$.

Вторым способом, как множество решений невырожденной системы уравнений, подмногообразие иногда может быть задано сразу целиком (например, сфера), хотя заведомо существуют подмногообразия, для которых это невозможно. Позже мы уточним этот вопрос, но для нас главной является локальная точка зрения.

Число уравнений невырожденной системы, которая локально задает подмногообразие, называется его *коразмерностью*. Оно равно $n-k$, где k – размерность подмногообразия.

Первый способ непригоден для задания подмногообразий целиком (даже такого, как сфера). Но он будет основным для *локального* представления многообразия.

Напомним также, что подмногообразие, заданное локально одним из этих двух способов, может быть локально представлено как график отображения области k-мерного аффинного пространства в $(n-k)$-мерное.

Кроме того, в обоих случаях имеется для каждой точки подмногообразия окрестность в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^n$, которую можно диффеоморфно отобразить в $\mathbb{R}^n$ так, что пересечение окрестности с подмногообразием перейдет в область k-мерной плоскости.

Подитожим сказанное:

Теорема. *Следующие четыре локальные условия эквивалентны для точки A подмножества M в аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$.*

1. Имеется окрестность W точки A в $\mathbb{R}^n$ и невырожденное во всех точках отображение $F : W \to \mathbb{R}^{n-k}$, при котором $W \cap M = W \cap F^{-1}(B)$, где $B = F(A)$.

2. Имеется область V в аффинном пространстве $\mathbb{R}^k$ и невырожденное во всех точках взаимно однозначное отображение $f : V \to \mathbb{R}^n$, при котором $f(V)$ является окрестностью U точки A относительно M.

3. Имеется окрестность W точки A в $\mathbb{R}^n$ и разложение пространства $\mathbb{R}^n$ в прямое произведение $\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k}$ так, что $W \cap M$ является графиком некоторого непрерывно дифференцируемого отображения $\varphi : V \to \mathbb{R}^{n-k}$, где V – область в $\mathbb{R}^k$.

(Отметим, что не утверждается, что φ невырожденное, а только непрерывно дифференцируемое.)

4. Имеется окрестность W точки A в $\mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $\psi : W \to \bar{W}$ этой окрестности на другую область в $\mathbb{R}^n$, при котором $\psi(W \cap M)$ есть область в подпространстве $\mathbb{R}^k$ пространства $\mathbb{R}^n$.

(Подмножество M является гладким k-мерным подмногообразием в $\mathbb{R}^n$, если и только если оно удовлетворяет этим условиям в каждой своей точке.)

Доказательство проведем по схеме $1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$. Почти все уже сделано.

$1 \Rightarrow 3$. Это утверждение есть наша формулировка теоремы о неявной функции.

$3 \Rightarrow 2$. Матрица Якоби отображения $F : V \to \mathbb{R}^n$ области V на график f, заданного правилом $x \mapsto (x, f(x))$, имеет порядок $(n \times k)$ и содержит единичную матрицу порядка $k \times k$. Следовательно, она имеет максимальный ранг k.

$2 \Rightarrow 4$. Это – доказанное выше утверждение о выпрямлении отображения для случая $k \leq n$.

$4 \Rightarrow 1$. Представим пространство $\mathbb{R}^n$ в форме прямого произведения $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ и обозначим через π проекцию его на $\mathbb{R}^{n-k}$. Композиция $\pi\psi$ отображает W на окрестность начала в $\mathbb{R}^{n-k}$, причем $W \cap M$ совпадает с прообразом точки (начала) и ранг матрицы Якоби максимален, т.к. оба дифференциала $d\psi$ и $d\pi$ являются *эпиморфизмами* (отображениями *на*), а дифференциал композиции есть композиция дифференциалов по цепному правилу. ■

Задача. Пусть $f : H \to \mathbb{R}^N$ – гладкое отображение постоянного ранга r области $H \subset \mathbb{R}^n$. Доказать, что образ малой окрестности каждой точки $x \in H$ — гладкое r-мерное подмногообразие $\mathbb{R}^N$.

[*Решение.* Фиксируем точку $\mathbf{x}_0$ и с помощью линейной замены координат добъемся, чтобы матрица Якоби в точке $\mathbf{x}_0$ имела стандартный вид: единичная $r \times r$-матрица в левом верхнем углу и нулевые элементы вне этой матрицы. Этим определено разложение в прямые произведения координатных плоскостей прообраза $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r_1 \oplus \mathbb{R}^{n-r}$ и образа $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^r_2 \oplus \mathbb{R}^{N-r}$. В этих координатах отображение f записывается в форме $f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}))$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n-r}$, $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mapsto (\mathbf{u}, \mathbf{v})$, где $\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^r_2$, $\mathbf{v} = \psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{N-r}$ причем $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$, $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0 = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$.

В малой окрестности $\mathbf{x}_0$ отображение $\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{u}$ имеет ранг r, причем невырожден минор $\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{p}}\right)$. Значит, при каждом $\mathbf{q}$ близком к $\mathbf{q}_0$ отображение $\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ является диффеоморфизмом малой окрестности P_q точки $\mathbf{p}_0, \mathbf{q}$ в плоскости $\mathbb{R}^r_1 \times \mathbf{q}$ на окрестность U точки $\mathbf{u}_0$ в $\mathbb{R}^r_2$. Окрестность U можно взять одну и ту же для всех $\mathbf{q}$ из малой окрестности Q точки q_0, т.к. диффеоморфизм $\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ непрерывно зависит от $\mathbf{q}$. Мы можем считать, что этот диффеоморфизм отображает P_q на U для каждого $\mathbf{q}$. Говоря иначе, имеетсяоокрестность W точки $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$, пересечение которой с каждой плоскостью $\mathbf{q} = const$ для $\mathbf{q}$ из некоторой окрестности V есть область P_q этой плоскости, которая диффеоморфно отображается на U. Это, очевидно, означает, что $W = V \times U$, что позволяет ввести в W криволинейные координаты $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{q}})$ преобразованием $\bar{\mathbf{u}} = \varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q}$ с ненулевым якобианом. В этой системе координат отображение $f(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{q}}) = f(\varphi_q(\mathbf{p}), \mathbf{q}) = (\varphi(\varphi_q^{-1}(\mathbf{u}), \mathbf{q})\, \psi(\mathbf{p}, \mathbf{q})) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ будет иметь матрицу Якоби, в которой левый верхний угол есть единичная $r \times r$-матрица, а элементы справа от этой матрицы нулевые.

В таком случае будут нулевыми и производные $\mathbf{v}$ по $\mathbf{q}$, иначе ранг матрицы Якоби отображения f был бы больше r. Но это означает, что отображение f в системе $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{q}})$ не зависит от $\mathbf{q}$. (Строго говоря, использование теоремы Лагранжа здесь требует, чтобы окрестность была выпуклой, что без труда можно получить.) В частности, координата v образа однозначно определяется координатой u, т.е. образ отображения f локально представляется графиком отображения области U в координатную плоскость $\mathbb{R}^{N-r}$ и, следовательно, является гладким подмногообразием. ■

Контрольный вопрос. Привести с помощью замены координат в образе отображение к каноническому линейному виду (как указано вначале) в целой окрестности точки A.

]

-=-=-=-=-=-=-

Глава 2. **Гладкие многообразия**

1. Локальные параметризации. Примеры

В этой главе мы определим понятие гладкого многообразия не как подмножества аффинного пространства с определенными свойствами, а независимо от объемлющего пространства. Среди четырех свойств неособой точки из предыдущей главы наибольшее значение имеет второе – возможность локальной параметризации относительной окрестности областью пространства $\mathbb{R}^k$. Именно эта возможность локальной параметризации выделяет в самых разных дисциплинах класс объектов, который охватывается понятием многообразия. При этом не предполагается, что такой объект исходно задан как подмножество аффинного пространства. Локальная параметризация нужна для того, чтобы применять к изучению данного объекта обычные средства математического анализа. (Дифференцирование, интегрирование, дифференциальные уравнения и т.д.) Его элементы заменяются наборами чисел – стандартными координатами точки, которая соответствует ему при выбранной параметризации. Приведем некоторые типичные примеры.

Плоскости в $\mathbb{R}^n$. Параметризуем совокупность (n-1)-плоскостей (гиперплоскостей) в пространстве $\mathbb{R}^n$ (называя их просто плоскостями).

Каждая плоскость определяется линейным уравнением с $n+1$ коэффициентом (включая свободный член). Однако коэффициенты уравнения заданы лишь с точностью до пропорциональности. Естественно считать плоскости близкими, если попарно близки коэффициенты, но не обратно, т.к. умножив все коэффициенты на $a \neq 0$, мы не изменим плоскости.

Чтобы параметризовать *окрестность плоскости*, т.е. совокупность плоскостей близких к данной плоскости, возьмем один из ненулевых коэффициентов ее уравнения и разделим на него все коэффициенты (т.е. превратим его в единицу). Тогда остальные n коэффициентов зададут локальные координаты в некоторой окрестности данной плоскости. Эта окрестность состоит из всех плоскостей, у которой отмеченный коэффициент не нуль (и превращен в единицу). Отметим, что каждая плоскость попадает хотя бы в одну такую окрестность.

(Мы говорим здесь об окрестностях, что не вполне законно, т.к. пока для нас окрестность это открытое подмножество аффинного пространства. В следующей главе мы научимся определять окрестности в более общей ситуации.)

Параметризация сферы хорошо известна (см.выше). Прообразом таких параметризаций служит набор карт географического атласа. Каждая карта атласа параметризует некоторую область сферы – поверхности Земли. (С этой практической задачи – как лучше изобразить на плоской карте сферическую поверхность – в сущности ведет начало современная история дифференциальной геометрии.)

Конфигурационные пространства. В механике положения, которые может принимать какая-либо подвижная конструкция, образуют *конфигурационное пространство*. Например, совокупность положений плоского маятника (стержня в плоскости, шарнирно закрепленного в одном конце), очевидно, можно параметризовать углом, скажем, с горизонталью. Но если допустить проворачивание маятника на полный угол, то эта параметризация не будет взаимно однозначной или не будет непрерывной. Однако локально, вблизи каждого положения, оба эти условия выполнены.

Положения маятника в трехмерном пространстве описываются двумя углами (двумя сферическими координатами его свободного конца).

Пространство конфигураций стержня, свободно перемещающегося по плоскости, параметризуется областью в $\mathbb{R}^3$. Два числа нужны для опиcния положения какого-нибудь из его концов и еще одно для задания его угла с горизонталью. Здесь также нужна оговорка о локальности этой параметризации.

Более сложный пример доставляет *двойной маятник*: два стержня скреплены шарнирно концами и свободный конец одного из них шарнирно закреплен в точке. Если движения возможны только на плоскости, то для параметризации достаточно двух углов. Если же допускаются трехмерные движения, то нужно четыре параметра.

Классический пример дает конфигурационное пространство твердого трехмерного тела, свободно вращающегося вокруг неподвижной точки, которое параметризуется тремя *углами Эйлера*. Мы опишем их позже. Это пространство нам еще понадобится. Заметим, что постольку, поскольку речь идет о параметризации, мы можем заменить произвольное твердое тело в этой задаче маятником из двух стержней, жестко скрепленных концами под прямым углом, вращающимся свободно вокруг одного из двух оставшихся концов.

Чтобы ввести в рассмотрение также *состояние движения* тела в пространстве, рассматривают *фазовые пространства.* Элементом такого пространства является конфигурация вместе с совокупностью мгновенных скоростей ее точек. (Ускорение выражается в каждой точке по закону Ньютона через действующую силу, которая часто определяется положением и скоростью.)

Например, фазовое пространство твердого тела в трехмерном пространстве описывется дюжиной координат: три координаты для задания центра тяжести в пространстве, еще три угла Эйлера для описания мгновенного положения относительно центра тяжести, затем три координаты для задания вектора мгновенного сдвига центра тяжести и еще три для вектора мгновенного вращения.

Примеры параметризаций "множеств состояний" дают не только математика и физика, но и такие науки, как биология, психология, экономика и социология, где правильный выбор параметров имеет такое значение, что возникла специальная дисциплина называемая "многомерным шкалированием". Ее основная задача сводится к выбору параметров и шкал, которые допускали бы объективные измерения и были бы достаточно информативны.

2. Координатные системы и их преобразования для подмногообразий $\mathbb{R}^n$

Координаты должны быть гладкими. Как это определить? Итак, многообразие это прежде всего объект, который допускает локальную параметризацию. Это значит, что все точки, достаточно близкие к какой-нибудь одной точке, можно взаимно однозначно отобразить на область в числовом пространстве, приняв затем стандартные координаты образов точек из этого пространства за координаты самих точек.

Однако, когда мы говорим о "достаточно близких" точках, мы имеем в виду, что отображение соответствия должно быть непрерывным. Но если параметризуемое множество не лежит в аффинном пространстве, мы не имеем (пока) права говорить о непрерывности. Более того, нужно, например, в механике, предполагать это соответствие достаточно гладким, чтобы физически "плавное" движение описывалось гладкими функциями в локальных координатах. Однако говорить о дифференцируемости в точках нашего множества мы можем (пока) с еще меньшим основанием, чем о непрерывности.

Согласование координатных систем. Казалось бы, выход из нашего затруднения в том, чтобы считать функцию, заданную в точках нашего множества, непрерывной или дифференцируемой в том случае, если таковой окажется соответствующая функция от координат этих точек при данной параметризации. Но здесь возникает та трудность, что приходится рассматривать сразу несколько локальных параметризаций, чтобы по частям охватить все многообразие. При этом одна и та же точка попадет, вообще говоря, в различные области параметризации и получит при этом различные координаты. Без дополнительных условий может оказаться, что функции, непрерывные или дифференцируемые в одной координатной системе, не будут такими в других системах. Посмотрим, как разрешается эта трудность в известном нам случае гладких подмногообразий $\mathbb{R}^n$.

Локальные параметризации подмногообразий $\mathbb{R}^n$. Пусть дано гладкое k-мерное подмногообразие M пространства $\mathbb{R}^n$. Для каждой точки $A \in M$ имеется ее окрестность U в M и *локальная параметризация*, т.е. взаимно однозначное отображение $\mathbf{r} : V \to U$, области $V \subset \mathbb{R}^k$ на окрестность U, регулярное как отображение в $\mathbb{R}^n$ (с матрицей Якоби максимального ранга в точках V). Это – условие 2 теоремы п.10 гл.1. (Напомним: окрестностью точки в M является пересечение M с окрестностью этой точки в $\mathbb{R}^n$)

Локальной параметризацией определяются *локальные координаты* в окрестности точки $\mathbf{x}_0 \in M$: *координаты точки* $\mathbf{t} \in V$ *в стандартной координатной системе пространства* $\mathbb{R}^k$ *принимаются за координаты точки* $\mathbf{x} = \mathbf{r}(\mathbf{t})$.

Замечание. Так как имеется, согласно условию 4 теоремы п.10 предыдущей главы, продолжение $\mathbf{r}$ до диффеоморфизма окрестности $\mathbf{t}_0$ в $\mathbb{R}^n$ на окрестность $\mathbf{x}_0$ в $\mathbb{R}^n$, мы всегда можем дополнить локальные координаты подмногообразия до локальных координат в $\mathbb{R}^n$, причем так, что точки подмногообразия будут выделяться равенством нулю новых координат.

Координатные замены в гладких подмногообразиях $\mathbb{R}^n$. Пусть теперь даны две локальные параметризации $\mathbf{r}_1 : V_1 \to U_1$ и $\mathbf{r}_2 : V_2 \to U_2$, которые пересекаются, т.е. имеется точка $x_0 \in U_1 \cap U_2 \subset M$. Пусть $x_0 = \mathbf{r}_1(\mathbf{t}_{10}) = \mathbf{r}_2(\mathbf{t}_{20})$. Точки в $U_1 \cap U_2$ имеют по два набора координат – стандартные координаты их прообразов в $\mathbb{R}^k$ при одном и другом отображении $\mathbf{r}_i$. Нас интересует связь этих координат.

Отображение $\psi_{12} = \mathbf{r}_2^{-1}\mathbf{r}_1$ определено на $\mathbf{r}_1^{-1}(U_1 \bigcap U_2)$ и взаимно однозначно отображает это множество на $\mathbf{r}_2^{-1}(U_1 \bigcap U_2)$. Взаимная однозначность этого отображения следует из того, что взаимно однозначны отображения $\mathbf{r}_i$ по определению параметризации. Мы хотим показать, что на самом деле это диффеоморфизм.

Трудность состоит в том, что ψ_{12} есть композиция двух отображений, одно из которых обратно к регулярному отображению и определено не на открытом подмножестве аффинного пространства. Нетрудно показать его непрерывность, но *дифференцирование отображений, определенных только в точках* M*, нами пока не определено.*

Воспользуемся сделанным только что замечанием и продолжим регулярные отображения $\mathbf{r}_i$ в окрестности точек $\mathbf{t}_{io}$ до диффеоморфизмов $\bar{\mathbf{r}}_i : \bar{V}_i \to \bar{U}_i$, где $\bar{V}_i$ и $\bar{U}_i$ – открытые подмножества в $\mathbb{R}^n$.

Композиция $(\bar{\mathbf{r}}_2)^{-1}\bar{\mathbf{r}}_1$ определена и диффеоморфна на открытой окрестности точки $\mathbf{t}_{10}$ в $\mathbb{R}^n$ и отображает окрестность этой точки в $\mathbb{R}^k$ на окрестность точки $\mathbf{t}_{20}$ в $\mathbb{R}^k$. Мы хотим показать, что это ограничение диффеоморфизма на плоскость также есть диффеоморфизм.

Для этого остается воспользоваться следующей леммой.

Лемма. Пусть дан диффеоморфизм открытого подмножества $U \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Допустим, что ограничение его на k-мерную плоскость P переводит $P \bigcap U$ также в k-мерную плоскость P_1. Тогда это ограничение тоже диффеоморфизм (и образ его тогда открыт в P_1).

Доказательство. Пусть в образе и прообразе координаты выбраны так, чтобы первые k координатных осей лежали в указанных плоскостях, а остальные были им перпендикулярны. В матрице Якоби, взятой в точке на P, в первых k столбцах все элементы, лежащие не в первых k строках, нулевые. Поэтому минор, расположенный в первых k строках и столбцах, не равен нулю. Но это как раз якобиан ограничения диффеоморфизма на плоскость P. ■

Этим доказано, что для двух систем локальных координат точки $\mathbf{x}_0$ подмногообразия $M \subset \mathbb{R}^n$ имеется диффеоморфизм окрестности соответствующей точки $\mathbf{t}_1$ в $\mathbb{R}^k$ на окрестность точки $\mathbf{t}_2$ в $\mathbb{R}^k$, который переводит одни локальные координаты в другие. Этот диффеоморфизм называется *преобразованием локальных координат* или *координатной заменой.*

Значение координатных преобразований. Введением понятия преобразования локальных координат на гладком подмногообразии $\mathbb{R}^n$ делается решающий шаг в нашей задаче освобождения от необходимости рассматривать многообразия как подмножества $\mathbb{R}^n$.

Когда мы используем одну параметризацию окрестности точки, мы можем применять методы математического анализа в этой окрестности, просто заменяя ее на область в $\mathbb{R}^k$. (Точно так же, как, планируя путь на местности, мы рисуем его на карте этой местности.) Ведь вводимые координаты в этой окрестности на M, это просто стандартные координаты в области числового пространства $\mathbb{R}^k$. Но нам требуется, чтобы результаты не зависели от того, какую параметризацию мы рассматриваем в данный момент.

То, что две различные параметризации связаны диффеоморфным преобразованием в окрестности каждой своей общей точки, как раз и показывает, что результаты, полученные при использовании одной параметризации, сохраняют свое значение при переходе к другой.

Нужно только, чтобы в случае, если одна параметризация принадлежит классу гладкости p и в проведенном с ее помощью рассуждении участвуют производные этого порядка каких-либо функций, то не только другая параметризация также имеет по крайней мере класс p, но и пересчет одних координат в другие должен осуществляться преобразованием такого же класса гладкости. Это и обеспечивается теоремой о неявной функции и ее следствиями. Правда, мы говорили только о непрерывной дифференцируемости, имея в виду первые производные. Но те же самые рассуждения и полная формулировка теоремы о неявной функции обеспечивает в нашем случае, что координатное преобразование принадлежит тому же классу гладкости, которому принадлежат обе параметризации.

Теперь введем понятие многообразия в абстрактной форме.

3. Определение гладкого многообразия

Грубо говоря, гладкое многообразие – множество с выделенным классом попарно согласованных локальных параметризаций, где согласованность означает, что две параметризации переводятся друг в друга в общей части диффеоморфизмом.

Дадим строгие определения.

Определение 1. *Гладким k-мерным многообразием M* называется множество, для которого задана система подмножеств U_i и взаимно однозначные отображения на них $\varphi_i : V_i \to U_i$ открытых подмножеств V_i аффинного пространства $\mathbb{R}^k$, причем

1. $M = \bigcup U_i$,

2. для каждой пары φ_i, φ_j прообразы пересечения $U_i \bigcap U_j$ – множества $V_{ij} = \varphi_i^{-1}(U_i \bigcap U_j)$ и $V_{ji} = \varphi_j^{-1}(U_i \bigcap U_j)$ – являются открытыми подмножествами в $\mathbb{R}^k$ (может быть, пустыми),

3. $\psi_{ij} = \varphi_j^{-1}\varphi_i$ есть диффеоморфизм $V_{ij} = \varphi_i^{-1}(U_i \bigcap U_j)$ на $V_{ji} = \varphi_j^{-1}(U_i \bigcap U_j)$.

К этому определению требуются небольшие добавления топологического характера, которые мы сделаем после того, как в следующей главе 3 специально займемся топологическими вопросами.

Определение 2. Взаимнооднозначное отображение: $\varphi : V \to U$, где V – область в $\mathbb{R}^n$, $U \subset M$, называется в общем случае *локальной параметризацией*, также *картой* многообразия M или локальной координатной системой. Две карты называются гладко согласованными, если для них выполнено условие 3 определения 1.

Определение 3. Совокупность карт φ_i называется *атласом*, если области U_i покрывают M. (Эти названия вводятся по географической аналогии.) Если выполнены три условия определения 1, то говорят, что данный атлас является (гладко) согласованым и определяет в M *структуру гладкого многообразия.*

С помощью карты φ_i точки U_i получают координаты:

Определение 4. За *локальные координаты* точки $A \in U_i$ принимаются стандартные координаты точки $\varphi_i^{-1}(A)$ в $\mathbb{R}^k$.

Карта переносит в область U координатную сетку $\mathbb{R}^n$: образы координатных прямых и плоскостей (пересеченные с V) называются (криволинейными) коодинатными линиями и поверхностями в U.

Отображения ψ_{ij} из определения 1 называются *координатными преобразованиями*.

Утверждение. Координатные преобразования ψ_{ij} удовлетворяют соотношениям:

$$\psi_{ij} = \psi_{ji}^{-1}, \quad \psi_{jk}\psi_{ij} = \psi_{ik}. \qquad \blacksquare$$

Если на многообразии гладкая структура задана некоторым атласом, то мы скажем, что карта согласована с гладкой структурой, если она согласована с каждой картой этого атласа (т.е. если ее можно добавить к атласу, не нарушая его согласованности).

Определение 5. Говорят, что два атласа определяют *одну и ту же* структуру гладкого многообразия на множестве M (или просто то же самое гладкое многообразие), если карты одного согласованы с картами другого, т.е. объединение этих атласов также является согласованным атласом.

Атлас может быть выбран неоднозначно; число карт в нем может быть и конечным и несчетным. (Для однозначности можно ввести в рассмотрение максимальный атлас, существование которого доказывается стандартно с помощью леммы Цорна. Все карты в нем должны быть попарно различными.)

Теперь мы можем заниматься математическим анализом на многообразии, т.к. можем определить дифференцируемые отображения многообразий в многообразия. Но сначала рассмотрим примеры.

4. Примеры многообразий

Подмногообразия $\mathbb{R}^n$. Прежде всего заметим, что гладкие подмногообразия $\mathbb{R}^n$, рассматривавшиеся ранее, являются многообразиями в теперешнем "абстрактном" смысле (не зависящем от объемлющего $\mathbb{R}^n$).

Действительно, для определенных ранее подмногообразий $M \subset \mathbb{R}^n$ мы называли локальными параметризациями регулярные отображения области из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$ (образы которых оказываются открытыми подмножествами относительно M) и затем *доказали*, что две такие параметризации связаны диффеоморфизмом прообразов.

В определении абстрактных многообразий карты являются всего лишь взаимно однозначными отображениями, мы не можем включить в их определение ни условия дифференцируемости, ни даже просто непрерывности. Но *требуется*, чтобы возникающее взаимно однозначное отображение их прообразов (координатная замена) было диффеоморфным. Т.к. эти прообразы являются открытыми подмножествами $\mathbb{R}^k$, это требование законно. В случае подмногообразий $\mathbb{R}^n$ оно по доказанному выполнено.

Заметим, что подмножество $\mathbb{R}^n$ может быть гладким многообразием и не быть гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^n$. Дело в том, что в нем может быть задан атлас, определяющий в нем гладкую структуру (т.е. с диффеоморфными координатными переходами), но отображения этих карт могут не быть регулярными отображениями в $\mathbb{R}^n$.

Например, для границы квадрата на плоскости легко задать гладкую структуру (благодаря тому, что она гомеоморфна окружности), но ни при каком задании она не может оказаться гладким подмногообразием плоскости из-за своих угловых точек. (В этих точках нет касательной, а кривая, являющаяся гладким подмногообразием, обязательно имеет касательную, мы к этому вернемся в гл.5 п.10.)

Открытые подмножества $\mathbb{R}^n$ являются гладкими многообразиями с атласом из одной карты.

Многообразия уровней. Для функции $F(x) = t \in \mathbb{R}$, заданной в области $U \subset \mathbb{R}^n$, ее полные прообразы точек $F^{-1}(t)$ разбивают U на слои, которые называются множествами уровня этой функции. В окрестности неособых (некритических) точек функции, там, где хотя бы одна производная не нуль, эти слои являются локально гладкими подмногообразиями (коразмерности один).

В критических точках множества уровней могут иметь различные особенности: ветвиться, вырождаться в точку или иметь более сложное строение. Примеры на плоскости были даны в первой главе (п.9). Простейшие примеры задаются кривыми второго порядка: функция $F = x^2 - y^2$ имеет начало особой точкой, которая служит точкой пересечения двух прямых, составляющих множество уровня $F = 0$. Остальные множества уровня – гиперболы и не имеют особых точек.

Сфера. Простейшее подмногообразие коразмерности 1 – сфера, заданная уравнением $\Sigma(x^i)^2 = 1$. Ее атлас получается проекциями на координатные плоскости $x^s = 0$. Каждая такая проекция дает две карты – по одной для каждого знака квадратного корня – их область определения – открытый шар $\sum\limits_{i \neq s}(x^i)^2 < 1$. Хорошим упражнением является проверка того, что координатные преобразования оказываются диффеоморфными.

Проективное пространство. Первый и очень важный пример многообразия, которое появляется не как подмногообразие аффинного пространства, дается *проективным пространством*. Имеется несколько способов введения этого пространства. Рассмотрим некоторые из них.

Проективное пространство P^n было определено исторически как пополнение аффинного пространства $\mathbb{R}^n$ бесконечно удаленными точками по одной для каждого *направления*, т.е. для системы параллельных ненаправленных прямых. (Прямая, таким образом, определяет одну бесконечно удаленную точку, в которой как бы соединяются два “ухода в бесконечность”.)

Если в пространстве $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$ взять единичную точку на последней оси, то каждой проведенной через нее прямой L отвечает в точности одна точка P^n: точка пересечения с координатной плоскостью $\mathbb{R}^n$, если L ее пересекает, или добавленная точка, определенная прямыми параллельными L в противном случае.

Это соответствие взаимно однозначно и мы можем *определить* P^n как множество прямых, проходящих в $\mathbb{R}^{n+1}$ через одну точку, в качестве которой можно взять любую точку. Удобно взять начало O.

Координаты точек, лежащих на одной прямой, проходящей в $\mathbb{R}^{n+1}$ через O, пропорциональны и, за исключением точки O, однозначно определяют прямую. Поэтому пространство P^n представляется множеством ненулевых наборов из $n+1$ чисел с отождествлением пропорциональных наборов. Подчеркивая пропорциональность, такие наборы записывают в виде $(x^1 : x^2 : \cdots : x^{n+1})$.

Контрольный вопрос. Какие наборы отвечают бесконечно удаленным точкам? (Ответ: $x_{n+1} = 0$.)

Имеются и иные геометрические представления проективного пространства, с которыми мы отчасти познакомимся в четвертой части. Сейчас нам нужно убедиться в том, что P^n естественным образом получает структуру гладкого многообразия.

С этой целью рассмотрим в $\mathbb{R}^{n+1}$ пересечения прямых, проведенных через O, с единичной сферой S^n. В малой окрестности каждой точки сферы соответствие прямых и точек пересечения взаимно однозначно. Поэтому мы можем принять любую локальную карту сферы за карту P^n (нужно только, чтобы окрестность на сфере не содержала диаметрально противоположных точек, т.к. иначе нарушится взаимная однозначность соответствия).

Если окрестности на сфере пересекаются, то координатное преобразование будет автоматически диффеоморфным, т.к. оно такое для сферы. Но окрестности на сфере могут не пересекаться, а соответствующие карты для P^n пересекаться будут, если точки из одной пары диаметрально противоположных точек принадлежат разным окрестностям (две карты тогда будут иметь общую прямую).

Очевидно, во втором случае достаточно одну из окрестностей отразить в начале и проверить, что отраженная карта будет иметь диффеоморфное координатное преобразование с другой картой. Но мы снова получим две пересекающиеся карты на сфере и поэтому преобразование будет диффеоморфным.

Итак, пространство P^n является гладким многообразием.

Упражнение. Проверить, что для отображения $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$

$$y_1=x_1^2-x_2^2 \quad y_2=x_1x_2 \quad y_3=x_1x_3 \quad y_4=x_2x_3,$$

ограниченного на единичную сферу, все точки являются регулярными, причем в каждую точку ее образа переходят две диаметрально противоположные точки и только они. Значит, ее образом в $\mathbb{R}^4$ служит подмногообразие диффеоморфное P^2.

(Обратите внимание, что имеются точки сферы не регулярные для самого отображения f, хотя все точки сферы регулярны для его ограничения на сферу.)

Одномерные многообразия. Гладкие многообразия разбиваются на классы по размерностям: один атлас не может содержать пересекающиеся карты разных размерностей, т.к. области аффинных пространств диффеоморфны, только если они одной размерности.

Естественно спросить, каковы многообразия малых размерностей.

Если размерность равна 1, то оказывется, что имеется всего два связных гладких многообразия: прямая и окружность. Мы докажем это позже, пока мы не можем даже корректно поставить задачу – для многообразий пока не определено понятие диффеоморфизма.

Двумерные поверхности. С гладкими многообразиями следующей размерности – два – приходится встречаться в комплексном анализе. На самом деле именно изучение *римановых поверхностей*, о которых речь будет в гл.17, было одним из основных стимулов для введения общего понятия многообразия. (Б.Риман, по имени которого названы римановы поверхности, был также одним из первых, кто систематически рассмотрел многомерные гладкие многообразия.) Двумерные многообразия *классифицированы.* Мы не обсуждаем пока важное понятие классификации, но приведем нестрого построение модельных примеров.

Возьмем лепешку и сделем в ней k дыр. Поверхность полученного “кренделя” есть двумерное многообразие, которое так и называется: *поверхность кренделя с k дырами*. Если $k=0$, поверхность эквивалентна двумерной сфере. Если $k=1$ – тору (поверхность велосипедной камеры или прямое произведение двух окружностей, см.ниже).

Эти примеры исчерпывают только половину всех связных и компактных двумерных многообразий. Другую половину составляют так называемые *неориентируемые поверхности*, которые труднее себе представить, т.к. они не реализуемы в трехмерном пространстве. Первым примером служит проективная плоскость, с которой мы уже познакомились. Следующим примером – так называемая бутылка Клейна. Остальные получаются из этих с помощью операции вклеивания листа Мебиуса. Мы вернемся к этой конструкци в следующей главе. Кроме этих примеров имеются разнообразные некомпактные 2-многообразия. Попробуйте сообразить, как построить несчетное число попарно различных (недиффеоморфных) некомпактных 2-многообразий (см.гл.17).

Прямое произведение. Имеются геометрические конструкции, с помощью которых из данных многообразий строят новые, более сложные. Особенно важна конструкция прямого произведения.

Определение. Пусть M и N – два гладких многообразия размерностей m и n. Их прямым произведением называется гладкое многообразие $M\times N$, которое как множество является прямым произведением множеств M и N, а гладкая структура задается следующим атласом: для каждой пары карт $\varphi_1:V_1\to U_1$ и $\varphi_2:V_2\to U_2$, соответственно в M и N, определена карта $\varphi: V_1\times V_2\to U_1\times U_2\subset\mathbb{R}^{m+n}$ в прямом произведении $M\times N$. Проверка того, что этим определяется согласованный атлас, непосредственая.

Например, прямое произведение окружности на интервал есть *кольцо* (или цилиндр.) Прямое произведение двух окружностей называется *тором.* Прямое произведение окружности на внутренность круга – полным тором.

5. Матричные группы.

Матрицы линейных операторов. В качестве одного из самых важных примеров многообразий познакомимся с матричными группами.

Из линейной алгебры известны некоторые классы матриц, задающих линейные операторы в пространстве $\mathbb{R}^n$ того или иного специального вида. Прежде всего совокупность $\mathbf{M}(n,\mathbb{R})$ всех квадратных матриц размера $n\times n$.

Это не группа по операции матричного умножения (не все матрицы обратимы), но это очевидным образом многообразие, совпадающее с пространством $\mathbb{R}^{n^2}$. При этом $\mathbf{M}(n,\mathbb{R})$ становится векторным

n^2-мерным пространством. Каждой матрице ставится в соответствие точка в $\mathbb{R}^{n^2}$, элементы матрицы служат стандартными координатами этой точки. Соответствие, очевидно, взаимно однозначно. Нужно только договориться о способе упорядочения элементов матрицы. Договоримся нумеровать сначала элементы первой строки, затем второй и т.д. до n-ой. Сложение матриц и умножение матрицы на число определяются покоординатно.

Всякая совокупность матриц порядка $n \times n$ является, таким образом, автоматически подмножеством пространства $\mathbb{R}^{n^2}$.

Общая линейная группа. Рассмотрим теперь *группу* всех обратимых матриц. Мы обозначим ее, допуская неточность, $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$. Обозначение $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ расшифровывается как *общая линейная группа* (General Linear Group).

Неточность состоит в том, что так обозначают группу всех обратимых линейных операторов пространства $\mathbb{R}^n$. Она отождествляется с группой обратимых матриц только после того, как в этом пространстве введен базис. Но мы считаем, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ с самого начала имеется канонический базис, так что это не слишком существенное прегрешение. Эта оговорка действует и дальше.

Матрицы и реперы. Сделаем простое, но важное замечание. После того, как канонический базис фиксирован, мы можем сопоставить $(n \times n)$-матрице не только линейное отображение, но еще и набор из n векторов – ее столбцов. Эти векторы являются образами канонического базиса при соответствующем линейном отображении, и они линейно независимы, если и только если матрица невырождена. Такой набор называется *n-репером* или просто репером.

Взаимно однозначное соответствие между тремя совокупностями: $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ (линейных изоморфизмов $\mathbb{R}^n$), невырожденных матриц порядка $n \times n$ и n-реперов возникает по этой схеме, конечно, не только для канонического, но для любого базиса в $\mathbb{R}^n$. Но для разных базисов оно будет разным.

Группа $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ является многообразием в силу того, что это – открытое подмножество в $\mathbb{R}^{n^2} = \mathbf{M}(n, \mathbb{R})$. Действительно, она является дополнением к множеству, определенному уравнением $\Delta = 0$, где Δ – формула определителя матрицы, которой задается полиномиальное отображение $\mathbb{R}^{n2} = \mathbf{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Дополнение к нулю открыто в $\mathbb{R}$ и его полный прообраз (т.е. $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$) открыт в $\mathbb{R}^{n^2}$ по определению непрерывности.

Специальная линейная группа. Следующим важным примером служит группа $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ – *специальная линейная группа* – группа матриц с определителем $+1$. Это – замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^{n^2}$, определенное неявно уравнением $\Delta = 1$. В этом случае нам приходится доказывать, что мы имеем дело с многообразием. (Прообраз нуля для функции Δ *не* многообразие (а конус), например, он не имеет нужной параметризации в нулевой точке (вершине конуса). Поэтому неясно сразу, почему прообраз другой точки окажется многообразием.)

Но мы имеем критерий: нужно показать, что каждая точка прообраза является неособой.

Утверждение. $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ – гладкое подмногообразие $\mathbb{R}^{n^2}$.

Доказательство. Производной определителя по некоторому элементу матрицы служит его алгебраическое дополнение (это видно из разложения определителя по строке). Ясно, что если определитель не нуль, то хотя бы одно алгебраическое дополнение должно быть ненулевым. ■

Замечание. Мы получили больше, чем требовалось. Пространство матриц оказывается расслоенным на многообразия размерности $n^2 - 1$ – матриц с фиксированными ненулевыми определителями – и еще один исключительный слой, не являющийся многобразием. Этот исключительный слой – матриц с нулевым определителем – называется *дискриминантным*. Он содержит особые точки. (Аналогичный пример: $\mathbb{R}^2$ расслоено на гиперболы $x^2 - y^2 = c \neq 0$ и пару прямых – аналог дискриминанта.)

Контрольный вопрос. Указать особые точки дискриминантного слоя.

Группа $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ *ортогональных матриц* задается матричным уравнением $A^{-1} = A^T$ (обратная матрица совпадает с транспонированной). Это условие, как известно из линейной алгебры, равносильно системе из $\frac{n(n-1)}{2}$ уравнений, выражающих ортонормированность строк (или столбцов).

Мы имеем, таким образом, $\binom{n}{2} + n$ уравнений с n^2 неизвестными. В окрестности точек, где эта система невырождена, множество ее решений является гладким подмногообразием размерности $n^2 - \binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$.

Утверждение. Эта система имеет максимальный ранг в каждой точке $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$.

Мы рассмотрим для краткости случай $n = 3$. Общий случай, как нетрудно убедиться, полностью аналогичен.

Доказательство. Рассмотрим матрицу Якоби левой части нашей системы в точке H, являющейся ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Уравнения ортогональности удобно записать в таком порядке: сначала возьмем скалярные произведения первой строки на все три строки, затем скалярные произведения второй строки на себя и третью строку и, наконец, скалярный квадрат третьей строки. Тогда матрица Якоби получит такой вид:

$$\begin{pmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{pmatrix}$$

Минор порядка 3×3 в левом верхнем углу есть удвоенный определитель ортогональной матрицы H и, значит, не нуль. Вторая и третья строки матрицы H не пропорциональны, поэтому в четвертой и пятой строках матрицы Якоби есть ненулевой минор порядка 2×2. Наконец, хотя бы один элемент третьей строки H не нуль. В результате мы получаем минор порядка 6×6 отличный от нуля. Итак, ранг матрицы Якоби максимален. ■

Группа $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$. Группа $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ состоит из двух частей – матриц с определителем $+1$ и с определителем -1. Первые образуют группу, а вторые не образуют. Группа ортогональных матриц с определителем $+1$ обозначается $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ и называется *специальной ортогональной группой.* Линейные преобразования, отвечающие ей, называются *вращениями* – они сохраняют и длину и ориентацию пространства. Мы обсудим этот факт позже. Разумеется, эта группа также является гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^{n^2} = \mathbf{M}(n, \mathbb{R})$.

Группа $\mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$ параметризуется точками окружности S^1 – ее элементы представлены матрицами вида $\begin{pmatrix} \cos\varphi & sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $\varphi \in S^1$. Вторая половина группы $\mathbf{O}(2, \mathbb{R})$ также параметризуется точками окружности, но ее элементы задают существенно иные движения плоскости. Неединичные элементы группы $\mathbf{O}(2, \mathbb{R})$ не имеют неподвижных точек, кроме начала O. Элемент из $\mathbf{O}(2, \mathbb{R})$ с определителем -1 имеет собственные числа 1 и -1 (они вещественны, т.к. произведение сопряженных комплексных чисел положительно) и, значит, он определяет отражение плоскости в некоторой прямой. Все точки этой прямой неподвижны.

6. Гладкие и регулярные отображения

Мы хотим теперь определить понятие *гладкого отображения* одного гладкого многообразия в другое и целый ряд связанных с ним других понятий: регулярность, особая точка, диффеоморфизм, вложение, накрытие и др.

Фактически основные понятия уже определены для отображений областей аффинных пространств и они переносятся автоматически на случай гладких многообразий ввиду того, что они имеют локальный характер. Действительно, при локальном рассмотрении мы просто заменяем окрестность в многообразии на окрестность в $\mathbb{R}^k$ с помощью локальной карты, а независимость от карты следует из гладкости диффеоморфизма, определяющего преобразование координат.

Определение 1. Пусть дано отображение $F : M_1 \to M_2$ одного гладкого многообразия в другое, точка $A \in M_1$ и $B = F(A) \in M_2$. Пусть $\varphi_i : V_i \to M_i$ – согласованные с гладкими структурами этих многообразий локальные карты в окрестностях точек A и B, соответственно, и $U_i = \varphi_i(V_i)$, $F(U_1) \subset U_2$.

Локальным представителем отображения F в окрестности точки A назовем отображение $f = \varphi_2^{-1} F \varphi_1 : V_1 \to V_2$.

(Напомним, что карта согласована с гладкой структурой, если она согласована с каждой картой атласа, определяющего эту гладкую структуру, и что в этом случае она будет согласована с любым атласом, определяющим эту же структуру.)

Утверждение. Если f_1 и f_2 – два локальных представителя отображения F в окрестности одной и той же точки A, то (возможно, в уменьшенной окрестности A) $f_1 = \psi_2^{-1} f_2 \psi_1$, где ψ_i – диффеоморфизмы локальных замен координат соответственно в M_i.

Доказательство. Пусть $f_i = \varphi_{i2}^{-1} F \varphi_{i1}$, где φ_{ij} локальная карта для M_j, взятая для локального представителя f_i. Тогда имеем

$$f_1 = \varphi_{12}^{-1} F \varphi_{11} = \varphi_{12}^{-1} \varphi_{22} \varphi_{22}^{-1} F \varphi_{21} \varphi_{21}^{-1} \varphi_{11} = \psi_2^{-1} f_2 \psi_1. \qquad \blacksquare$$

Определение 2. Пусть M_1 и M_2 – два гладких многообразия класса гладкости p_1 и p_2, соотв., и $p = \min(p_1, p_2)$. Отображение $F : M_1 \to M_2$ называется *гладким класса гладкости* $s \leq p$ в точке $A \in M_1$, если таким является какой-нибудь (и тогда любой) локальный представитель этого отображения в точке A.

Определение 2′. Аналогично определяется *регулярность* отображения в точке.

Независимость от выбора локального представителя следует здесь из того, что, как было указано только что, один локальный представитель получается из другого композицией с двух сторон с диффеоморфизмами соответствующего класса гладкости.

Определение 3. Точка называется *особой или неособой* для данного отображения одного гладкого многообразия в другое, если, соответственно, отображение не является или является регулярным в этой точке (для чего, очевидно, достаточно, чтобы какой-нибудь представитель отображения был бы не регулярным или, соответственно, регулярным в соответствующей точке области $\mathbb{R}^k$).

Отображения, регулярные в каждой точке, имеют специальные названия.

Определение 4. Если отображение взаимнооднозначно и дифференцируемо в обе стороны, то оно называтся *диффеоморфизмом.*

Очевидно, в этом случае $k = n$ и отображение регулярно в обе стороны.

Определение 5. Если $k \leq n$, то отображение регулярное во всех точках называется гладким *погружением.*

Определение 6. Если выполнены условия определения 5 и отображение является взаимно однозначным отображением на свой образ, то оно называется *вложением.*

(Позже мы несколько усилим требования в этом случае.)

Определение 7. Если $k \geq n$, то отображение регулярное во всех точках называется гладкой *субмерсией.*

7. Примеры регулярных отображений. Диффеоморфизмы

Приведем сначала некоторые примеры диффеоморфизмов.

Эквивалентность многообразий. Во-первых, мы имеем теперь возможность определить эквивалентность многообразий с точки зрения дифференциального исчисления. *Многообразия эквивалентны, если они диффеоморфны.* (Заметим, что мы сказали дифференциальное исчисление, а не дифференциальная геометрия. Позже мы введем геометрические свойства многообразий, характеризующие в первую очередь их искривленность, для эквивалентности относительно которых диффеоморфности недостаточно.)

Фигуры, эквивалентные в аффинной геометрии, разумеется диффеоморфны (например, все эллипсы). Введение проективных пространств позволяет считать диффеоморфными фигуры, эквивалентные при проективных преобразованиях (например, эллипс и гиперболу). (Проективные преобразования выражаются в аффинных координатах дробно линейными формулами с одинаковым знаменателем для всех координат. Проверьте, что этим определяется диффеоморфизм проективного пространства на себя.)

Обратное, однако, неверно: проективная прямая и окружность на проективной плоскости диффеоморфны, но не получаются друг из друга проективным преобразованием плоскости. (Почему?!)

Вот важный пример нетривиального диффеоморфизма.

Утверждение. Трехмерное проективное пространство $\mathbf{P}^3$ диффеоморфно группе $\mathbf{SO}(3, \mathbb{R})$.

Доказательство. Мы интерпретируем $\mathbf{P}^3$ как многообразие прямых, проходящих через начало в четырехмерном аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$. (См. подробнее в главе 16.)

Для группы $\mathbf{SO}(3, \mathbb{R})$ вращений трехмерного пространства напомним, что каждый ее элемент имеет в $\mathbb{R}^3$ инвариантную (переходящую в себя) прямую (т.к. степень его характеристического многочлена нечетна и потому он имеет вещественный корень). Если эта прямая не неподвижна, то она изменяет направление. В ортогональной к ней плоскости (также инвариантной) тогда индуцируется движение, обращающее ее ориентацию. Мы видели выше, что тогда в этой плоскости индуцировано отражение в неподвижной прямой.

Таким образом, всякое вращение имеет неподвижную (не просто инвариантную) прямую. Если есть две такие прямые, то вращение, очевидно, есть тождественное отображение.

Представим теперь пространство $\mathbb{R}^4$ как прямую сумму $\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}$ и возьмем нетождественное вращение $H \in \mathbf{SO}(3, \mathbb{R})$. Пусть L – неподвижная прямая этого вращения. Ориентируем ее и будем считать, что угол, на который H поворачивает пространство вокруг L, отсчитывется против часовой стрелки при наблюдении с положительной стороны L. Значение угла берем в интервале $[0, 2\pi]$.

Поставим в соответствие вращению H прямую L' в $\mathbb{R}^4$, которая в двумерной плоскости, проходящей в $\mathbb{R}^4$ через L и четвертую ось, образует с этой осью угол, равный по абсолютной величине половине угла вращения и отсчитывемый в сторону положительного направления L.

Легко проверить, что при другом выборе ориентации L мы получим ту же прямую L'.

Тождественному отображению отвечает четвертая координатная ось. Введем локальные координаты. Для прямой в $\mathbb{R}^4$, проходящей через начало (и не проходящей через полюсы), возьмем тройку сферических координат точки ее пересечения с единичной сферой. Для точки из $\mathbf{SO}(3, \mathbb{R})$ возьмем две сферические кооординаты точки пересечения с единичной сферой неподвижной прямой вращения и в качестве третьей – угол поворота со знаком плюс (и меньше 2π). Каждую координату точки одного пространства легко аналитически выразить через координаты соответствующей точки другого пространства.

Чтобы учесть прямую, проходящую через полюсы, и соответственно тождественное отображение, заметим, что любые две точки $\mathbf{P}(3)$ имеют диффеоморфные окрестности и аналогичное верно для точек $\mathbf{SO}(3, \mathbb{R})$. Детали могут быть оставлены в качестве упражнения. ■

(Другое доказательство см. в конце главы 9.)

[*О классификации многообразий.*

Задача "классификации гладких многообразий" с точностью до диффеоморфизма ставится так. Требуется указать такое семейство многообразий данной размерности, чтобы они попарно были не диффеоморфны и для любого многообразия данной размерности в этом семействе имелось бы многообразие ему диффеоморфное.

Обычно недиффеоморфность многообразй доказывают с помощью вычисления характеристик, имеющих алгебраическую природу, благодаря чему их легко сравнивать: числа, многочлены, группы и др. Они строятся по конкретному (геометрическому или аналитическому) заданию многообразий. Если имеется *полная* система таких характеристик, то диффеоморфность многообразий можно установить, сравнивая их характеристики.

Такая постановка задачи классификации в настоящее время в полном объеме очень далека от разрешения. Она решена для размерностей не превышающих 2. Нульмерные многообразия это просто дискретные множества точек. Одномерные, при условии выполнения некоторых естественных топологических требований, – объединения интервалов и окружностей см. конец главы 4.

Для двумерных многообразий задача классификации также решена и решение хорошо известно, мы будем об этом говорить подробнее дальше (см. гл.17). О трехмерных многобразиях известно много, но до полного решения далеко. Только недавно была решена знаменитая *проблема Пуанкаре*, имевшая столетнюю историю: (компактное) односвязное многообразие (т.е. такое, в котором любую замкнутую кривую можно продеформировать в точку) является трехмерной сферой.]

8. Примеры регулярных отображений. Погружения и вложения.

Гладкое отображение k-мерного гладкого многообразия в n-мерное гладкое многообразие, где $k \leq n$, имеющее максимальный ранг k в каждой точке, называется *погружением*. При этом, как мы знаем из главы 1, каждая точка в M_1 имеет окрестность, которая взаимно однозначно и диффеоморфно отображается на свой образ.

Для погружений допускаются осложнения двух типов.

Во-первых, возможны самопересечения образа, т.е. в одну точку отображаются несколько, возможно даже бесконечно много точек.

Пример. Рассмотрим в полярных координатах функцию $\rho = \sin 2\varphi$. Она "навинчивает" прямую $-\infty < \varphi < \infty$ на "розетку" с четырьмя лепестками (см. рис.).

Кардиоида $\rho = \cos\varphi + 1$ не является образом никакого погружения, т.к. имеет острие в начале (см. рис. в п.9 гл.1).

Во-вторых, возможно, что образ $F(A)$ точки $A \in M_1$ даже совпадающей с $F^{-1}F(A)$ оказывается пределом для образов точек "далеких" от A, т.е. отображение, даже являющееся взаимно однозначным отображением на образ, оказывается не гомеоморфизмом, а только *уплотнением* (см. гл.3, п.7) на образ.

Пример. Построим погружение прямой в плоскость так, что образом ее будет восьмерка, состоящая из двух противоположых лепестков предыдущего примера, причем это будет взаимно однозначная параметризация кривой:

$$\rho = \sin 2\varphi,\ \varphi = [\pi/2(1-e^{-1/t^2})t/|t|],\ \rho(0) = O.$$

Можно "подправить" это погружение так, что перекрестие восьмерки заменится на окрестность, подобную окрестности вертикального отрезка в кривой "$\sin 1/x$". (Попробуйте проделать это самостоятельно.)

Может случиться также, что **каждая** точка образа имеет аналогичную особенность. С такой ситуацией приходится встречаться в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, когда интегральная кривая "самонакручивается". Например, это имеет место на торе для простой линейной системы $\dot\varphi = a$, $\dot\psi = b$ при иррациональном отношении a/b, где φ и ψ пробегают единичную окружность.

Это построение можно проделать и не прибегая к дифференциальным уравнениям.

Пример. Рассмотрим погружение плоскости в тор (оно является на самом деле даже накрытием, см. п.10), которое точке с координатами $(x,\,y) \in \mathbb{R}^2$ ставит в соответствие точку с координатами (e^{ix}, e^{iy}) в прямом произведении двух окружностей. То, что это – регулярное отображение, проверяется непосредственно, как и то, что каждая точка тора имеет окрестность, полный прообраз которой есть прямое произведение прообраза точки (дискретное множество) на малый диск. (Для наглядности удобно представлять себе, что плоскость, на которой имеется сетка квадратов со стороной ячейки 2π, сначала скручивается в бесконечный цилиндр радиуса 1, который затем накручивается бесконечное число раз на поверхность бублика или велосипедной камеры. Каждый квадрат сетки при этом склеивается в тор, т.е. его противоположные стороны попарно склеиваются.)

Возьмем теперь прямую линию на плоскости и рассмотрим ее образ на торе. Если прямая проходит через две вершины сетки квадратов, то ее образ в торе есть окружность, которая обходит целое число раз каждый из сомножителей (как определить эти два числа?). Если же это не так, т.е. ее наклон к сторонам сетки иррациональный, то прямая взаимно однозначно отображается на свой образ, т.е. ее отображение есть вложение в слабом смысле.

Упражнение. В этом примере образ прямой с иррациональным наклоном пересекается с любой окрестностью любой точки тора. (Мы назовем в следующей главе такое свойство образа всюду плотностью.)

Если исключить указанные "неприятности", то получится понятие *вложения*, которое играет очень важную роль в геометрии и геометрических приложениях.

Определение вложения. Гладкое отображение $F : M_1 \to M_2$ многообразия размерности k в многообразие размерности $n \geq k$ называется *гладким вложением*, если

1. оно взаимно однозначно отображает M_1 на $F(M_1)$;

2. оно имеет максимальный ранг k в каждой точке, и если

3. для каждой точки $A \in M_1$ найдется сколь угодно малая ее окрестность $U \subset M_1$ и окрестность V точки $F(A) = B \in M_2$ так, что $V \cap F(M_1) = F(U)$.

Последним условием исключаются феномены типа указанного самонакручивания (образ построенного выше отображения прямой в тор не обладает такой окрестностью.) Иными словами, отображение будет гомеоморфизмом на свой образ.

Иногда добавляется условие, чтобы образ был замкнутым подмножеством M_2.

Согласно общему результату об отображениях максимального ранга (гл.1 п.10), мы можем переформулировать условие 3 таким образом: для каждой точки $A \in M_1$ имеется ее окрестность $U \subset M_1$, окрестность V точки $F(A)$ в M_2, причем $F(U) = F(M_1) \cap V$, и диффеоморфизм V на область в $\mathbb{R}^n$, при котором $F(U)$ отображается на область в k-мерной плоскости.

Подмногообразия. Образ вложения одного многообразия в другое часто называют подмногообразием во втором многообразии. Но ввиду указанных ситуаций, когда на образе индуцируется "не та" топология, удобно выделить случаи, так сказать, чистого вложения, для которых эти ситуации не встречаются. Для этого перенесем на общий случай понятие подмногообразия, которое пока было введено только для $\mathbb{R}^n$.

Определение. Подмножество N гладкого n-мерного многообразия M называется его *гладким k-мерным подмногообразием*, если для каждой точки $A \in N$ найдется окрестность U в M и диффеоморфизм ее на область $V \subset \mathbb{R}^n$, при котором $N \bigcap U$ перейдет в область на k-мерной плоскости.

Разумеется, это значит, что на N как на подмножестве M индуцируется гладкая структура (так же, как это было определено для подмножеств $\mathbb{R}^n$, поскольку вопрос тут локальный). При этом тождественное отображение является вложением в определенном выше смысле.

Упражнение. Пересечения с N карт атласа в M служат картами атласа, задающего индуцированную структуру в N. Покажите, что образ вложения $F : M_1 \to M_2$ в определенном выше смысле оказывается подмногообразием в M_2.

Дополнение к определению вложения. Иногда вложением называют регулярное отображение, взаимнооднозначное на свой образ, одного гладкого многообразия в другое (т.е. погружение без самопересечений). Мы будем называть такое отображение *вложением в слабом смысле.*

Наоборот, *вложением в сильном смысле* будем называть вложение (согласно данному определению), при котором образ M_1 является замкнутым подмножеством в M_2.

9. Примеры регулярных отображений. Субмерсии и расслоения.

Основным примером субмерсии служит проекция $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$ на один из сомножителей, скажем, $\mathbb{R}^m$. Мы знаем, что локально каждая субмерсия в надлежащих координатах представляется в таком виде.

Субмерсией является также проекция прямого произведения двух многообразий на один из сомножителей. Важным является следующее обобщение этого случая:

Определение. *Локально тривиальным расслоением* называется отображение, для которого каждая точка образа имеет окрестность, полный прообраз которой представляется прямым произведением так, что данное отображение на этом полном прообразе оказывается проекцией прямого произведения.

Говоря формально: Отображение $f : M_1 \to M_2$ есть локально тривиальное раслоение со *слоем* F, если для каждой точки $x \in M_2$ найдется окрестность $U \subset M_2$, для которой имеется диффеоморфизм $\varphi : U \times F \to f^{-1}U$ так, что $\varphi(u, v) = u$ для всех $u \in U$, $v \in F$.

Контрольный вопрос. Когда существует отображение M_1 на F, ограничение которого на каждый прообраз $f^{-1}(\mathbf{x})$ (слой над точкой $\mathbf{x}$) является диффеоморфизмом?

Например, лист Мебиуса (с отброшенной граничной окружностью, иначе не удовлетворено определение многообразия) отображается на свою среднюю окружность так, что это отображение оказывается расслоением с интервалом в качестве слоя, но при этом его нельзя отобразить на интервал так, чтобы на слое над каждой точкой получился гомеоморфизм. (Почему? Рассмотрите прообразы концов интервала.)

Основываясь на таких примерах, раньше расслоения называли “косыми произведениями”. Теперь для краткости локально тривиальные расслоения обычно называют просто расслоениями (но это слово имеет и много других близких значений). Ясно, что они являются субмерсиями. Позже мы познакомимся с базисными для нас примерами *касательных расслоений* и других *векторных расслоений*.

Субмерсии, не являющиеся расслоениями, легко получить, удаляя из пространства расслоения, например, прямого произведения, некоторые замкнутые подмножества, например, точки.

10. Примеры регулярных отображений. Накрытия.

Очень важную роль играют (особенно в комплексном анализе) расслоения с нульмерным слоем. Такие расслоения называются *накрытиями*. В этом случае размерности образа и прообраза равны и, следовательно, в окрестности каждой точки прообраза отображение является диффеоморфизмом. Среди локальных диффеоморфизмов они выделяются следующим условием: каждая точка в M_2 имеет связную окрестность U, полный прообраз которой распадается на компоненты, каждая из которых диффеоморфно отображается на U. Итак,

Определение. Регулярное отображение F многообразия M_1 на многообразие M_2 (той же размерности) называется *накрытием*, если для каждой точки $\mathbf{y} \in M_2$ имеется такая связная окрестность V, что F диффеоморфно отображает на нее каждую компоненту ее полного прообраза.

Заметим, что F^{-1} представляется прямым произведением V на дискретное множество $F^{-1}(\mathbf{y})$. Часто предполагается дополнительно, что оба многобразия M_1 и M_2 связны.

Если число компонент конечно (при связном M_2 оно должно быть постоянно), то оно называется *кратностью накрытия*.

Примером накрытия служит двукратное отображение сферы на проективное пространство той же размерности, представленное связкой прямых, проходящих через начало в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Примером p-кратного накрытия при любом p служит комплексное отображение z^p комплексной плоскости с выкинутым началом на себя.

Упражнение. Проверьте, что эти отображения являются локальными диффеоморфизмами.

Упражнение. Комплексный многочлен $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ определяет накрытие над дополнением к конечному множеству точек образа. (Какие множества в образе и прообразе нужно удалить? Какова кратность накрытия? Заметьте, что это утверждение дает доказательство основной теоремы алгебры.)

Функция $e^{i\varphi}$ определяет накрытие единичной окружности $S^1 \subset \mathbb{C}$ прямой $\mathbb{R}$. Можно сказать, что при этом отбражении вещественная прямая наматывается бесконечное число раз на окружность, причем каждый оборот дает локальный диффеоморфизм интервала прямой на интервал окружности.

Пример локального диффеоморфизма, не являющегося накрытием, дает отображение интервала в окружность, получающееся ограничением отображения $e^{i\varphi}$ на любой открытый интервал.

Накрытия являются одновременно и примерами субмерсий (даже расслоений) и примерами погружений.

11. Трансверсальность.

Рассмотрим поведение отображения $F : K \to M$ относительно подмногобразия N в многообразии M. Размерности этих многообразий обозначим соответственно: k, m, n.

В линейном случае определить трансверсальность линейного отображения плоскости $\bar{K}^k$ в $\mathbb{R}^m$ относительно плоскости $\bar{N}^n \subset \mathbb{R}^m$ в точке $A \in \bar{N}^n$ можно двумя способами:

a. векторы в пространстве V_A (см. п.5 гл.1), лежащие в $\bar{N}$ и в образе $\bar{K}$, порождают V_A;

b. проекция образа $\bar{K}$ на ортогональное дополнение к $\bar{N}$ есть отображение “на”. Мы дадим сейчас обобщение в духе второго способа, а к первому вернемся в главе 5, когда изучим понятие касательного вектора и касательного пространства.

Определение. Отображение $F : K \to M$ трансверсально относительно $N \subset M$ в точке $\mathbf{x}_0 \in K$, для которой $F(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0 \in N$, если найдутся окрестности $U(\mathbf{x}_0) \subset K$ и $V(y_0) \subset M$, и регулярное отображение $G : V \to \mathbb{R}^{m-k}$, при котором $N \cap V = G^{-1}(O) \cap V$ так, что композиция GF есть субмерсия в точке $\mathbf{x}_0$ (т.е. ранг матрицы Якоби в $\mathbf{x}_0$ равен $m-k$).

Замечание. Мы встречались с такой ситуацией в доказательстве случая $4 \Rightarrow 1$ п.9 главы 1.

Теорема. Если F трансверсально во всех точках $F^{-1}(N)$, то $F^{-1}(N \cap F(K))$ есть гладкое подмногообразие в K.

Доказательство. Пусть $\varphi : W \to K$ – карта в окрестности точки $\mathbf{x}_0$. Отображение $GF\varphi$ регулярно в точке $\varphi^{-1}(\mathbf{x}_0)$ и, согласно теореме п.9 главы 1, $L = (GF\varphi)^{-1}(O)$ есть гладкое подмногообразие в W. Но диффеоморфизм φ отображает L на $F^{-1}(G^{-1(O)}) = F^{-1}(N \cap F(K) \cap V)$. Значит, это множество также является гладким подмногообразием в U. ■

Замечание. Пересечение образа K с N не обязано быть подмногообразием и может быть точкой, см.рис.)

Упражнения. Докажите. что субмерсия является трансверсальной к любому подмногообразию во всех точках. Если трансверсальное к N отображение F регулярно в точке $\bar{x}_0$, то в окрестности точки $\bar{y}_0 = F(\bar{x}_0)$ в M можно ввести координаты, в которых пара подмногообразий N и $F(K)$ линеаризуется, т.е. представляется парой трансверсально пересекающихся плоскостей.

-=-=-=-=-=-=-

Глава 3. **Топологические пространства**

1. **Открытые множества и непрерывные отображения**

Открытые множества. Базисное понятие анализа – *непрерывность* – вводится обычно с помощью ε-окрестностей. Чтобы встать на более широкую точку зрения, рассматривают в $\mathbb{R}^n$ класс подмножеств, называемых *открытыми* и определяемых тем, что каждая точка входит в такое множество со своей ε-окрестностью. Вообще, *окрестностью* точки называют любое содержащее ее открытое множество.

Открытые подмножества вводятся также *относительно любого подмножества* A аффинного пространства: это пересечения с A открытых подмножеств аффинного пространства.

Непрерывность и открытые множества. Легко проверить, что в определении непрерывности можно заменить ε-окрестности на открытые множества:

Отображение $f : A \to B$ непрерывно в точке $x \in A$, если и только если для каждой окрестности $U(f(x))$ в B найдется окрестность $V(x) \subset A$ так, что $f(V(x)) \subset U(f(x))$. Здесь A и B – подмножества содержащих их аффинных пространств, а окрестности понимаются в новом смысле как открытые подмножества A и B, т.е. как пересечения с A и B открытых подмножеств этих аффинных пространств.

Критерий непрерывности. Понятие открытых множеств позволяет очень просто сформулировать критерий того, что отображение непрерывно, т.е. непрерывно в каждой точке:

Теорема. Отображение $f : A \to B$ непрерывно в том и только том случае, если полный прообраз каждого открытого подмножества B является открытым подмножеством A. (*Образ* открытого не обязательно открыт!)

Доказательство. Если отображение непрерывно в каждой точке, то для данного открытого подмножества $U \subset B$ и каждой точки $x \in f^{-1}(U)$ найдется содержащее x открытое подмножество $V(x) \subset A$, образ которого лежит в U. Объединение этих открытых множеств открыто (т.к. каждая точка лежит в нем со своей окрестностью) и совпадает с полным прообразом U. Обратное прямо вытекает из определений. ■

Аксиомы открытых множеств. Следующие свойства системы открытых подмножеств любого множества A являются фундаментальными, т.к. они позволяют вывести свойства непрерывности данного множества A внутренним образом, не обращаясь к тому пространству, в котором оно лежит:

1. Объединение любого (возможно, бесконечного) числа открытых множеств открыто.
2. Пересечение любого конечного числа открытых множеств открыто.
3. Само множество A является своим открытым ("несобственным") подмножеством.
4. Пустое множество считается по определению открытым подмножеством ("несобственным") любого пространства.

Проверка этих свойств для подмножеств конечномерного аффинного пространства прямая и здесь опущена. Открытые множества иногда называют *областями.* (Но часто областью называют *связное* открытое подмножество, см. ниже п.2.)

Определение топологического пространства. Если в некотором множестве произвольной природы задана система подмножеств, для которой выполнены эти 4 свойства, то говорят, что в множестве *задана топология*, а само оно является *топологическим пространством.*
(Иногда саму систему выделенных множеств называют *топологией в* А.)
Элементы топологического пространства называются *точками.*

Дополнения к открытым множествам называются *замкнутыми* множествами. Их система удовлетворяет двойственным требованиям: пересечение любого и объединение конечного числа замкнутых подмножеств замкнуто. Замкнуты также все пространство и пустое множество.

Непрерывность отображения одного топологического пространства в другое определяется, как выше: полные прообразы открытых открыты, замкнутых замкнуты.

Покрытия. Следующее понятие является важным техническим средством, которым мы будем постоянно пользоваться.

Определение. Система открытых множеств пространства X называется *покрытием* X, если их объединение совпадает с X. Покрытие открыто или замкнуто, если, соответственно, открыты или замкнуты все его элементы.

Покрытия образуют частично упорядоченную систему: одно покрытие *вписано* в другое, если каждый элемент первого содержится в некотором элементе второго.

Метрика и топология. Задание топологии в множестве, особенно если оно бесконечно, обычно проводится на основе какой-то уже заданной структуры. Особенно часто введению топологии предшествует задание *метрики*.

Как известно, метрикой на множестве M называется сопоставление каждой неупорядоченной паре точек a и b в M неотрицательного числа $d(a,b) = d(b,a)$, равного нулю если и только если $a = b$, причем выполнено правило треугольника:

$$d(a,c) \geq d(a,b) + d(b,c).$$

Множество всех точек, расстояние которых до данной точки x меньше заданного числа $\varepsilon > 0$, называется ε-окрестностью этой точки x.

Метрика определяет топологию: множество открыто, если его точки входят в него со своими ε-окрестностями. Проверка свойств открытых множеств прямая. (Проверьте!)

Интервальная топология. Другой способ введения топологии дают упорядоченные множества. Если на множестве введен порядок (вообще говоря, частичный), то открытые множества вводят с помощью интервалов: множество открыто, если каждая его точка входит в него с содержащим ее открытым интервалом. (Открытый интервал – множество всех точек, лежащих между двумя данными.) Проверка аксиом также прямая. (См. также п.7 для иного введения топологии с помощью порядка.)

Подпространства и наследственная топология. Подмножество Q данного топологического пространства P само становится топологическим пространством, если открытыми в Q считать подмножества, являющиеся его пересечениями с открытыми подмножествами P. Аксиомы проверяются без труда. Подмножество с так введенной топологией называется *подпространством* Q в P, а получившаяся топология в Q *наследственной или индуцированной.*

Топология и непрерывность. Повторим, что все свойства, связанные с непрерывностью, можно формулировать, опираясь только на сформулированные 4 свойства, которые образуют систему аксиом топологии. В частности, *критерий непрерывности* превращается в *определение непрерывности* отображения одного топологического пространства в другое. Для определенности повторим его еще раз:

Определение непрерывности отображения. Отображение $f : P \to Q$ одного топологического пространства в другое называется *непрерывным*, если полный прообраз каждого открытого подмножества Q открыт в P или, что эквивалентно, если полные прообразы замкнутых множеств замкнуты.

Контрольный вопрос. Если отображение $F : A \to B$ непрерывно, то оно останется непрерывным, если заменить A на любое подмножество A, и также если заменить B на любое подмножество в B, содержащее образ A, или на любое пространство $\bar{B}$, содержащее B в качестве подпространства. ■

Простейшим **примером** пространства, существенно отличающегося от подмножеств $\mathbb{R}^n$ является:

Связное двоеточие. Рассмотрим множество из двух точек $\{a, b\}$. Будем считать открытыми, кроме самого множества и пустого его подмножества, еще только точку a. Все 4 аксиомы проверяются автоматически, но в подмножестве $\mathbb{R}^n$ из двух точек, *обе* точки должны оказаться открытыми.

Прямое произведение. Важным примером построения новых топологических пространств с помощью данных является прямое произведение.

Определение. *Прямым произведением двух топологических пространств* X и Y называется топологическое пространство $X \times Y$, в котором точками являются пары (x, y), $x \in X, y \in Y,$, а топология задается окрестностями $W = U \times V$, где U открыто в X, а V в Y.

Прямому произведению $X \times Y$ сопутствуют две *проекции*: первая $p_1 : X \times Y \to X$ и вторая – $p_2 : X \times Y \to Y$, $(p_1(x, y) = x,\ p_2(x, y) = y)$.

Контрольный вопрос. Покажите, что если для пространства Z даны два отображения $q_1 : Z \to X$ и $q_2 : Z \to Y$, то существует единственное отображение $r : Z \to X \times Y$ такое, что $q_1 = p_1 r$ и $q_2 = p_2 r$. (Это свойство характеризует прямое произведение в смысле *теории категорий.*)

Прямое произведение полезно, например, для определения графика отображения $F : X \to Y$.

Определение графика отображения. Графиком отображения $F : X \to Y$ называется совокупность пар $\{(x,\ F(x)\}$, где $x \in X$. График естественным образом является подмножеством прямого произведения $X \times Y$. Если X и Y топологические пространства, то график рассматривается как подпространство в $X \times Y$, т.е. получает индуцированную топологию.

Гомеоморфизм. Два топологических пространства *топологически эквивалентны* или *гомеоморфны*, если между ними имеется взаимно однозначное соответствие, при котором открытым множествам одного отвечают открытые множества другого. Такое соответствие называется *гомеоморфизмом.*

Гомеоморфизмами называются и взаимнообратные отображения этих пространств (очевидно, непрерывные), определенные этим соответствием.

Очевидно, гомеоморфизм является отношением эквивалентности топологических пространств (т.е. транзитивным и симметричным).

Например, граница квадрата гомеоморфна окружности и любому эллипсу. Гомеоморфизм между ними можно установить центральным проектированием, беря квадрат внутри эллипса. Но окружность не гомеоморфна восьмерке. Мы докажем это чуть позже.

Заметьте, что оба взаимно обратных отображения, определенных гомеоморфизмом, оказываются автоматически непрерывными. Верно и обратное: два пространства X и Y гомеоморфны, если и только если имеются два взаимно обратных непрерывных отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ $(f(g(y)) = y,\ g(f(x)) = x$ для $x \in X,\ y \in Y)$.

Важным примером является гомеоморфизм графика непрерывного отображения с областью его определения.

Утверждение. Отображение $F : U \to \mathbb{R}^n$, где U – открыто в $\mathbb{R}^k$, непрерывно тогда и только тогда, когда проекция графика F на область определения есть гомеоморфизм.

Доказательство. Пусть дано отображение $F : U \to \mathbb{R}^n$, U – открыто в $\mathbb{R}^k$. Его *график* $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ состоит из точек $(x, F(x))$, $x \in U$. Обе проекции $(x, y) \mapsto x$ и $\mapsto y$ пространства $\mathbb{R}^{k+n}$ непрерывны и, в силу сказанного выше (контрольный вопрос), непрерывны проекции $\Gamma \to U$ $((x, F(x)) \mapsto x)$ и $\Gamma \to \mathbb{R}^n$ $((x, F(x)) \mapsto F(x))$.

В частности, проекция графика на область определения всегда взаимно однозначна и непрерывна.

Обратно. Из определения непрерывности и из того, что в качестве окрестности точки $(x, F(x))$ можно взять прямое произведение $Z = V \times W$ окрестностей точек x и $F(x)$ вытекает, что если F непрерывно, то непрерывно и отображение $G : U \to \mathbb{R}^{n+k}$ $(x \mapsto (x, F(x))$. Действительно, образ такой окрестности Z проектируется в открытое подмножество $W \subset \mathbb{R}^n$, причем $F^{-1}(W) = G^{-1}(Z) = V$.

В силу замечания выше (контрольный вопрос), тогда непрерывно и отображение $U \to \Gamma$ $(x \mapsto (x, F(x))$. ■

Контрольный вопрос. Модифицируйте доказательство, не предполагая, что U открыто.

Гомеоморфизм – фундаментальное понятие. Гомеоморфизм индуцирует взаимно однозначное соответствие между системами открытых подмножеств двух пространств, сохраняя отношение вложенности, и поэтому эти пространства неразличимы *топологически* Иными словами, топологические свойства одного те же, что и у другого. Под топологическим свойством понимается свойство, выраженное только с помощью открытых множеств. Однако, такое определение нечетко, и обычно прямо принимают, что топологическое свойство такое, которое сохраняется при гомеоморфизмах – если пространство обладает таким свойством, то и все гомеоморфиные ему пространства им обладают.

Два важнейших топологических свойства: связность и компактность.

2. **Связность и линейная связность**

Связность. Топологическое пространство *связно*, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся и непустых открытых подмножеств. (Фигурально говоря, оно состоит из одного куска, не разорвано.)

Упражнение. Интервал на прямой связен (доказывается, например, с помощью соответствующего дедекиндова сечения). Более того, на прямой связными подмножествами являются *только* интервалы (возможно, бесконечные, возможно, с одной или двумя концевыми точками).

Связное двоеточие является связным пространством.

Теорема Больцано. В теореме о промежуточном значении утверждается, что образ интервала есть интервал, т.е. непрерывная функция переводит связные подмножества прямой в связные. Это – общее свойство непрерывных отображений:

Теорема. При непрерывном отображении образ связного множества A является связным.

Доказательство. В противном случае представим образ A в виде суммы двух непустых непересекающихся открытых подмножеств. Их полные прообразы будут открыты, в силу непрерывности отображения, непусты, не будут пересекаться и в сумме дадут все A. Тогда A не связно. ■

Утверждение. Восьмерка не гомеоморфна окружности.

Доказательство. Рассмотрим дополнения к точке перекрестия восьмерки и к любой точке окружности. Это – открытые подмножества. Первое из них гомеоморфно паре интервалов и, значит, не связно, а второе одному интервалу и, значит, связно. При гомеоморфизме восьмерки с окружностью дополнение к точке перекрестия было бы гомеоморфным дополнению к некоторой точке окружности. Но мы видели, что они не гомеоморфны, т.к. одно не связно, а другое связно. ■

Линейная связность. Для открытых подмножеств аффинного пространства можно указать другое свойство, которое для них эквивалентно связности. Оно не в меньшей степени наглядно выражает идею, стоящую за понятием связности, хотя в общем случае эти свойства не эквивалентны.

Предложение. Открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ связно тогда и только тогда, когда оно *линейно связно*, т.е. для любых двух точек $x, y \in U$ найдется дуга (непрерывный образ отрезка), лежащая в U, концы которой совпадают с x и y. В качестве дуги можно взять конечнозвенную ломаную.

Доказательство. Пусть U связно. Для точек достаточно близких к x факт очевиден: точки соединяются отрезком, если взять за окрестность шар, лежащий в U.

Множество точек y, до которых можно "добраться" из x с помощью ломаных, открыто: если можно "добраться" до y, то и до всех точек из шаровой окрестности y, добавив еще одно звено к построенной ломаной.

Но его дополнение в U также открыто, т.к. если в шаровой окрестности точки есть хотя бы одна точка, до которой можно "добраться" из x с помощью ломаных, то можно, добавив еще одно звено, добраться и до самой точки. Если это дополнение не пусто, то U не связно.

Наоборот, если U не связно и представлено в виде объединения двух своих открытых подмножеств $A \bigcup B$, то точки $a \in A$ и $b \in B$ нельзя соединить дугой, т.к. образ отрезка связен, два пересечения с A и B являются его открытыми подмножествами, не пересекаются и он совпадает с их объединением. ■

Компоненты связности.

Определение и упражнение. В топологическом пространстве A следующее отношение является эквивалентностью: две точки принадлежат к одному классу (одной *компоненте связности*), если они лежат в общем связном подмножестве в A. Иными словами: A распадается на подмножества максимальные по отношению к свойству "быть связным".

3. Замкнутые множества. Замыкание и внутренность

Замкнутые подмножества топологического пространства A это – дополнения к открытым его подмножествам. Двойственные свойства открытых и замкнутых множеств, логически эквивалентные, часто выглядят совершенно отлично друг от друга и поэтому бывает очень полезно рассмотреть оба варианта.

Замыкание и внутренность. Замыканием $[A]_B$ подмножества $A \subset B$ называется пересечение всех содержащих его замкнутых множеств в B. (Оно замкнуто в силу аксиомы 1.)

Двойственно *внутренностью* $Int_B A$ подмножества $A \subset B$ называется объединение всех открытых подмножеств B, содержащихся в A.

Замыкание непустого множества A само не пусто (т.к. содержит A), но внутренность может быть пуста, как, например, у множества рациональных точек на прямой.

Определение и упражнение. Замыкание получается присоединением к A всех его *точек прикосновения*, т.е. точек, все окрестности которых относительно B имеют непустое пересечение с A. (Если все окрестности точки прикосновения содержат бесконечно много точек A, то она называется *предельной точкой*.) Внутренность состоит из точек, имеющих окрестности относительно B, лежащие в A. (Интуитивно это значит, что если точку из A немного пошевелить в B, она останется в A.)

Для замкнутого подмножества аффинного пространства вообще говоря неверно, что связность эквивалентна линейной связности.

Пример – упражнение. График $\sin 1/x$ с присоединенным отрезком [-1,1] оси ординат является замкнутым, связным и не локально связным подмножеством плоскости.

Определение. *Границей* множества A в пространстве X называется множество точек, любая окрестность которых пересекается как с A, так и с дополнением к A. Очевидно, граница есть пересечение замыканий A и $X \setminus A$. Обычные обозначения: $Fr_X A$ или $Bd_X A$.

4. **Компактность**

Если система замкнутых подмножеств A имеет пустое пересечение, то это равносильно тому, что система дополнительных открытых подмножеств образует покрытие A. Нам сейчас пригодится это замечание.

Определение. Пространство называется *компактным*, если из любого покрытия его открытыми подмножествами можно выделить конечное подпокрытие (т.е. подсистему, которая сама образует покрытие).

Иными словами, если какие-то открытые подмножества в сумме дают все пространство, то объединение уже конечного числа из них совпадает с этим пространством.

Известная из основ анализа лемма Гейне-Бореля (или Бореля-Лебега) утверждает, что любой замкнутый интервал компактен.

Двойственное определение: множество компактно, если и только если в каждой системе содержащихся в нем замкнутых подмножеств, пересечение которой пусто, найдется конечная подсистема с пустым пересечением.

Эквивалентная формулировка: если в системе замкнутых подмножеств каждая конечная подсистема имеет непустое пересечение (такие системы называются *центрированными*), то и вся система имеет непустое пересечение.

Компактные подмножества R^n. На прямой они гораздо более разнообразны, чем связные. Например, можно еще раз напомнить о канторовом множестве. Имеется общая характеристика компактных подмножеств конечномерных линейных пространств (конечномерность существенна):

Теорема. Подмножество $A \subset R^n$ компактно, если и только если оно замкнуто и ограничено.

Доказательство. Пусть A компактно. Для каждой его точки возьмем открытый шар с центром в этой точке. Система этих шаров в пересечении с A образует покрытие A. Выделим из него конечное подпокрытие. Мы получим конечное множество шаров, в объединении которых лежит A. Но объединение конечного числа шаров лежит в одном большом шаре. Там же лежит и A, т.е. оно ограничено.

Если A не замкнуто, то имеется не принадлежащая ему его предельная точка x. Рассмотрим последовательность замкнутых шаров с центром в x радиуса $1/n$. Дополнения к этим шарам образуют в пересечении с A открытое покрытие A. Любая конечная подсистема этих дополнений не может образовывать покрытие A, т.к. их объединение есть дополнение к некоторому шару и не пересекает этого шара с центром в x, а каждый такой шар содержит бесконечно много точек из A.

Итак, A замкнуто и ограничено.

Обратно. Пусть A замкнуто и ограничено и пусть дано открытое покрытие A, из которого нельзя выделить конечного подпокрытия. Рассмотрим в R^n для каждого n разбиение на кубы со сторонами длиной $1/2^k$ и параллельными координатным осям, причем кубы $(k+1)$-ого разбиения целиком лежат в кубах k-ого разбиения. Конечное подмножество, очевидно, компактно, так что предположим, что A бесконечно. Т.к. оно ограничено, оно лежит в конечном числе кубов первого разбиения. Пересечение по крайней мере одного из этих кубов с A не лежит в конечном числе элементов данного покрытия. Точно так же для одного из кубов следующего разбиения, который лежит в отобранном кубе, пересечение его с A не лежит в конечном числе элементов покрытия.

Продолжая этот процесс, мы найдем последовательность вложенных кубов, каждый из которых содержит точки из A, но пересечение A ни с одним из них нельзя покрыть конечным числом элементов данного покрытия. Для каждой координаты мы можем применить теорему о вложенной последовательности отрезков и получить в результате точку, принадлежащую всем кубам отобранной последовательности. Это – предельная точка для A, т.к. любая ее окрестность содержит кубы последовательности и, значит, точки из A.

Т.к. A замкнуто, оно содержит эту точку и существует элемент покрытия, содержащий ее. Он содержит также все пересечение A с кубом отобранной последовательности с достаточно большим номером, т.е. это пересечение покрыто одним элементом, а по построению его нельзя покрыть никаким конечным числом элементов покрытия. ∎

Теоремы Вейерштрасса. Две теоремы Вейерштрасса из основ анализа, об ограниченности непрерывной функции на отрезке и достижении ею экстремального значения, являются следствиями того, что образом отрезка служит компактное множество.

Действительно, первая теорема эквивалентна тому, что образ ограничен, а вторая вытекает из того, что он замкнут. Но

Теорема. *При всяком непрерывном отображении образ компактного множества компактен.*

Доказательство. Действительно, полные прообразы элементов открытого покрытия, во-первых, образуют покрытие прообраза и, во-вторых, открыты в силу непрерывности отображения. Отбирая из них конечное покрытие, мы одновременно получим конечную систему образов элементов этого покрытия, которые образуют покрытие образа и в то же время подсистему исходного покрытия. ■

Как следствие получаем: для любого компактного пространства любая непрерывная функция ограничена и достигает своих экстремальных значений.

Замечание. В доказательстве этой теоремы в одну сторону мы существенно использовали конечномерность $\mathbb{R}^n$, именно, существование "кубильяжей" – разбиений на кубы. Для бесконечномерного аффинного пространства, например, для гильбертова пространства, уже замкнутые шары не являются компактными. Но, конечно, компактные пространства и в бесконечномерном пространстве и, вообще, в любом метрическом, являются замкнутыми и ограниченными. Доказательство с небольшими изменениями то же самое.

Свойства связности и компактности дают математическое уточнение интуитивного понятия непрерывности пространства. Связные и компактные множества называются *континуумами.* (На латыни "континуум" значит непрерывный.)

Непрерывное отображение сохраняет пространственную непрерывность. (Образ континуума есть континуум.)

Контрольный вопрос. Верно ли обратное?

Упражнения. Замкнутое подмножество компактного множества компактно.

Взаимно однозначное непрерывное отображение компактного множества в $\mathbb{R}^n$ является гомеоморфизмом на свой образ.

Построить взаимнооднозначное непрерывное отображение некомпактного подмножества, которое не было бы гомеоморфизмом на свой образ.

5. **Плотность и теорема Бэра**.

Введем еще некоторые полезные для дальнейшего и важные в общей теории понятия (они, впрочем, известны и из начального курса математического анализа).

Плотность. Множество A называется *всюду плотным* в X, если любое открытое подмножество X содержит точки A.

Например, в $\mathbb{R}^n$ плотны множества точек со всеми рациональными кординатами и со всеми иррациональными.

Теорема Бэра. Нам (в главе 18) понадобится важный результат Бэра (около 1905 г.), относящийся к замкнутым подмножествам R^n без изолированных точек (и, конечно, к более общим пространствам):

Теорема. Пересечение счетного числа всюду плотных открытых множеств всюду плотно. (Проверьте, что этот результат неверен для множества рациональных точек на прямой, но остается верным для множества иррациональных точек.)

Доказательство для $\mathbb{R}^n$ стандартно. Пересечение конечного числа открытых плотных множеств, очевидно, также всюду плотно. Поэтому в любой окрестности $U \subset \mathbb{R}^n$ можно построить последовательность кубов, в которой i-ый лежит в $(i-1)$-ом и в пересечении первых i открытых множеств. Пересечение этих кубов непусто, лежит в U и во всех открытых подмножествах данной их системы.

Для замкнутого подмножества $A \subset \mathbb{R}^n$ без изолированных точек надо воспользоваться тем, что его открытое плотное в нем подмножество есть пересечение с ним открытого плотного подмножества $\mathbb{R}^n$. Очередной куб в проведенном выше построении можно выбирать так, чтобы он содержал внутри себя точки A. Детали оставим в качестве упражнения. ■

Определения и упражнения. Компактное множество без изолированных точек называется *совершенным.* (Таково канторово множество.) Докажите, что каждое совершенное множество имеет мощность континуума.

Нигде не плотным подмножеством называется подмножество не являющееся плотным ни в каком открытом подмножестве. Внутренность такого множества пуста. Если оно замкнуто, то верно и обратное. Например, канторово множество нигде не плотно на прямой (хотя и имеет мощность континуума).

Упражнение. Покажите, что отрезок нельзя разбить на счетное число отрезков. Его нельзя разбить также на счетное число замкнутых подмножеств.

6. **Базы топологии. Аксиомы счетности**.

Определение. *Базой открытых множеств* (или базой топологии) пространства называют всякую такую систему его открытых подмножеств, что любое открытое подмножество получается объединением (вообще говоря, бесконечным) некоторых множеств из этой системы.

Система открытых множеств, из которых остальные получаются как объединения их конечных пересечений, называется *псевдобазой.* Любая система подмножеств может служить псевдобазой некоторой топологии на данном множестве (берутся все конечные пересечения псевдобазы и затем все объединения этих пересечений).

Чтобы проверить, что данная система открытых множеств образует базу имеющейся топологии, достаточно проверить, что в любой окрестности каждой точки лежит содержащее эту точку множество из данной системы.

Двойственным образом определяются базы и псевдобазы замкнутых множеств.

Аксиомы счетности. Топологическое пространство, обладающее счетной базой открытых множеств, называется пространством "со второй аксиомой счетности". Почти все основные пространства, с которыми приходится иметь дело в конкретных задачах анализа, удовлетворяют этой аксиоме. Однако имеются и важные исключения. К ним относятся, например, пространства непрерывных функций на некомпактной области определения, скажем, на всей прямой. Топология вводится по близости графиков: берется окрестность графика функции и в окрестность функции включаются все функции, графики которых помещаются в этой выбранной окрестности: это база топологии в пространстве функций, которая не имеет счетной базы. (Докажите!)

Ниже приведен еще один пример пространства без счетной базы – прямая Александрова (п.7).

Кроме второй, имеется и *первая аксиома счетности.* Она требует, чтобы *каждая точка* пространства обладала счетной системой окрестностей такой, чтобы в каждой ее окрестности лежала окрестность из этого семейства. К пространствам с первой аксиомой счетности относятся, очевидно, метрические.

7. **Аксиомы отделимости**.

Способность топологии связывать и разделять точки и множества выражается T_i-аксиомами или, иначе, *аксиомами отделимости*.

T_0*-пространством* называется пространство в случае, если из любых двух точек одна имеет окрестность, не содержащую другой точки. В этом случае в пространстве можно ввести частичную упорядоченность: точка a следует за точкой b, если каждая окрестность b содержит a. (Иначе: b входит в замыкание a.) Наоборот, частичный порядок в множестве позволяет ввести топологию, приняв за базис открытых множеств множества состоящие из точек, следующих за одной точкой, включая ее. (Множество открыто, если с каждой его точкой в него входят и все следующие за ней.) Проверьте выполнение аксиом топологии.

Порядок, заданный в множестве, предполагается строго не симметричным: если две точки следуют друг за другом, то они совпадают.

Если топология не имеет свойства T_0, т.е. имеются такие пары точек, в которых любая окрестность одной содержит другую, то мы можем отождествить эти точки. Дело в том, что это отношение, очевидно, обладает транзитивностью, так что пространство распадается на классы эквивалентности, и точки в одном классе неразличимы с точки зрения топологии пространства, т.к. окрестности у них общие. Поэтому, рассматривая все точки в одном классе как одну точку, мы получим новое пространство, уже имеющее свойство T_0.

T_1*-пространства.* Если в каждой паре точек каждая из них имеет окрестность, не содержащую другую, то такое пространство называется T_1-пространством. Эквивалентно: все точки замкнуты. Построенное выше (п.1) *связное двоеточие* является T_0 , но не T_1-пространством.

T_2*-пространства.* Пространство, удовлетворяющее следующей аксиоме T_2, называется также *хаусдорфовым или отделимым*: требуется, чтобы каждая пара точек обладала парой непересекающихся окрестностей (*отделяющих* эти точки друг от друга). Эта аксиома играет роль минимального разумного требования среди аксиом отделимости для пространств, естественным образом возникающих в приложениях. Нехаусдорфовы пространства встречаются, но обычно в экзотических ситуациях.

Простейший **пример** *нехаусдорфова пространства.* Берется любое пространство и какая-нибудь его неизолированная точка заменяется на две, причем окрестностями этих точек служат старые окрестности выкинутой точки, в которых эта точка заменена на одну новую. Если этот прием применить к любому многообразию, например, к прямой, то мы получим **пример** *нехаусдорфова многообразия*, причем той же гладкости, что и исходное.

Предложение. В любом T_2-пространстве X каждое компактное подпространство Y замкнуто.

Доказательство. Для любой точки x, лежащей вне Y, и для каждой точки $y \in Y$ возьмем непересекающиеся окрестности $G(x)$ и $H(y)$. Окрестности $H(y)$ образуют открытое покрытие Y, из которого, в силу его компактности, можно выделить конечную подсистему, объединение множеств которой содержит Y. Тогда пересечение соответствующих им множеств $G(x)$ есть открытая окрестность точки x, не пересекающая Y. Значит, x не лежит в замыкании Y, т.е. Y замкнуто в X. ■

Определение. Непрерывное взаимно однозначное отображение X на Y называется *уплотнением.* (Топология в Y содержит меньше открытых множеств, т.е. “плотнее”.)

Предложение. Уплотнение f компактного пространства X в T_2-пространство Y является гомеоморфизмом на $f(X)$

Доказательство. Можно считать, очевидно, что $Y = f(X)$. Во-первых, если Y хаусдорфово, то в силу непрерывности и взаимной однозначности, и X тоже. Достаточно показать, что образ замкнутого подмножества $A \subset X$ замкнут в Y. A компактно (см. упражнение в п.4). Тогда компактно и $f(A)$ и оно замкнуто в силу предыдущего предложения. ■

Замечание. Компактное и хаусдорфово топологическое пространство без счетной базы построено ниже в п.2 следующей главы.

T_3 и T_4-пространства. Имеется еще три аксиомы, последовательно сужающих класс рассматриваемых пространств и приближающих его к “естественно возникающим” в анализе и геометрии.

Определение. *Регулярными* или T_3-пространствами называются пространства, в которых замкнутое подмножество и точка, не лежащая в нем, могут быть отделены непересекающимися окрестностями. (Обычно дополнительно требуют, чтобы точки были замкнутыми, т.е. была выполнена аксиома T_1.)

Определение. Пространства, в которых отделимы непересекающимися окрестностями любые два замкнутых подмножества, называются T_4-пространствами или, если еще верна T_1-аксиома, *нормальными.* Они характеризуются *функциональной отделимостью*, см. ниже в п.10 лемму Урысона.

Тихоновские пространства. Еще одна аксиома отделимости занимает промежуточное положение: *вполне регулярным* или, при наличии аксиомы T_1, *тихоновским* называется пространство, в котором для каждого замкнутого подмножества и точки вне него имеется вещественная функция равная нулю в этой точке и единице в точках подмножества. Оказывается, этот класс не совпадает ни с T_3, ни с T_4-пространствами.

Однако нетрудно показать (в качестве упражнения), что регулярные пространства со счетной базой оказываются нормальными. Согласно результату П.С. Урысона (см. книгу В.А. Рохлина и Д.Б. Фукса сс. 27–28) это те и только те пространства, которые гомеоморфны подпространствам гильбертова пространства.

8. **Компактификации**.

Свойство компактности очень сильное, но нужные пространства не всегда компактны. Чтобы воспользоваться преимуществами компактности полезно бывает по крайней мере расширить пространство до компактного, т.е. найти компактное пространство, некоторое подмножество которого гомеоморфно данному пространству. Имеется несколько приемов, позволяющих добиться этого.

Определение. *Компактификацией* пространства X называется пространство K, содержащее подпространство X', гомеоморфное X и плотное в K.

Условие плотности не существенно в хаусдорфовом случае, поскольку замыкание X' в K компактно. Дополнение к X в K называется *наростом* компактификации. Мы рассмотрим две компактификации с одноточечным наростом.

Одноточечная компатификация T_1-пространств. Возьмем в качестве K пространство, состоящее как множество из точек X и еще одной точки $*$. Топология содержит, во-первых, все открытые подмножества в X и, во-вторых, каждое множество, состоящее из $*$ и еще дополнения к какому-нибудь конечному подмножеству в X.

Упражнение. Проверить, что выделенная совокупность подмножеств образует действительно топологию, что это – T_1-топология, и также, что эта топология удовлетворяет условию компактности.

Контрольный вопрос. В каких случаях эта компактификация оказывается хаусдорфовой?

Одноточечная компактификация хаусдорфовых локально компактных пространств. Второй прием аналогичен первому, но вместо конечных подмножеств берутся компактные. Сначала введем еще один класс пространств.

Определение. Пространство называется *локально компактным*, если каждая точка имеет окрестность с компактным замыканием. (Таковы, например, пространства $\mathbb{R}^n$.)

Пусть дано локально компактное хаусдорфово пространство X. Снова построим пространство K, состоящее из точек X и еще одной точки $*$, но в качестве окрестностей точки $*$ возьмем подмножества, состоящие каждое из $*$ и дополнения к какому-нибудь компактному подмножеству X.

Проверку того, что получилась топология, что она хаусдорфова и что K есть компактификация X, снова оставим в качестве упражнения. Точка $*$ в этом случае называется *точкой Александрова П.С*, который ввел эту компактификацию.

Одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$ гомеоморфна S^n. (Общеизвестно.)

Замечание. Одноточечные компактификации минимальные. Имеются конструкции (Уолмена для T_1-пространств и Чеха для T_2-пространств) максимальных компактификаций пространства X в том смысле, что любая другая есть непрерывный образ максимальной при тождестве на X. (См. ...)

9. **Прямые произведения, фактор-топология, склейка.**

Рассмотрим некоторые конструкции, позволяющие из имеющихся топологических пространств строить новые. Начнем с повторения.

Определение 1. *Прямым произведением* $X \times Y$ топологических пространств называется их прямое произведение как множеств с топологией, порожденной базисом, состоящим из прямых произведений $U \times V$, где U открыто в X, а V – в Y.

Определение 2. Пусть для точек топологического пространства X задано какое-либо отношение эквивалентности. Рассмотрим множество Y классов эквивалентности и введем в нем топологию по следующему правилу: открытым в Y будем считать любое множество классов, объединение элементов которого открыто в X. Эта топология называется *факторной*.

Например, проективное пространство получено из сферы с помощью этой конструкции, где за отношение эквивалентности бралась диаметральная противоположность точек.

Очевидно, отображение $X \to Y$, ставящее в соответствие каждой точке содержащий ее класс, непрерывно. Но если классы не замкнуты, образ не будет T_1-пространством.

Склейка. С помощью факторной топологии можно определить разные конструкции новых пространств из старых. Опишем одну из них.

Пусть дано непрерывное отображение $f : A \to Y$, где $A \subset X$. Дополним его до отображения $X \bigcup Y$ в себя, доопределив его на $X \setminus A$ и на Y как тождественное. Будем считать эквивалентными точки этого объединения, если их образы для расширенного отображения совпадают. Говорят, что фактор-пространство получено *приклейкой* пространства X к Y с помощью отображения f. Его обозначают $X \bigcup_f Y$.

В часто встречающемся случае этой конструкции f является гомеоморфизмом A на $B \subset Y$. Тогда говорят о *склейке* по гомеоморфизму f. В этом случае можно представить себе, что X и Y намазаны клеем и буквально склеены по множествам A и B.

Пример. Простой, но важный случай этой конструкции возникает при представлении проективной плоскости как результата склейки круга и листа Мебиуса. Здесь A есть край круга, а B – край листа Мебиуса. Оба они гомеоморфны окружности.

Этот пример обобщается следующим образом. Пусть дано двумерное многообразие M. Пусть B – его замкнутое подмножество гомеоморфное кругу. Тогда замыкание $M \setminus B$ – многообразие с краем гомеоморфным окружности. Произведем склейку его с листом Мебиуса, как выше, по общему краю. Результат есть неориентируемое многообразие. Оказывается любое двумерное неориентируемое многообразие может быть получено из ориентируемого такой конструкцией. (Из сферы получается проективная плоскость, из тора – бутылка Клейна.)

Упражнение. $X\bigcup_f Y$ для хаусдорфовых пространств X и Y будет хаусдорфовым, если A и B замкнуты.

Следующий пример показывает, что хаусдорфовость при склейке может нарушиться, если они не замкнуты: пусть X и Y – два экземпляра интервала $(-1,1)$, а A и B – дополнения в них к 0. Мы снова построили то же нехаусдорфово многообразие, что и выше.

Упражнение. Пусть мы имеем конечную, для простоты, систему пространств U_i и для каждой пары i, j пару подмножеств $A_{ij}\subset U_i$, $A_{ji}\subset U_j$ с гомеоморфизмом θ_{ji} первого на второе. Отождествляя точки $x\in A_{ij}$ и $\theta_{ji}x\in A_{ji}$ для каждой пары, мы получим фактор-пространство X. Но если мы хотим, чтобы фактор-топология склеенного пространства была разумной и чтобы множества U_i отображались в это пространство гомеоморфно, мы должны наложить определенные условия. Нам в дальнейшем понадобится случай, когда A_i открыты в U_i. Проверьте, что в этом случае образ U_i будет открыт в X. Кроме того, чтобы U_i отображались взаимнооднозначно (и тогда гомеоморфно) в X, очевидно, требуется выполнение следующих двух требований:
1. $\theta_{ji}=\theta_{ij}^{-1}$ и
2. $\theta_{ki}(x)=\theta_{kj}\theta_{ji}(x)$, где $x\in\theta_{ij}(A_{ji}\cap A_{jk})$.

Сформулируйте условие, чтобы в случае хаусдорфовых пространств U_i пространство X также оказалось хаусдофовым (см. предыдущее упражнение).

Определение склейки бесконечного числа пространств в общем случае сложно. Наше определение непосредственно переносится на локально конечный случай, когда для каждого i не пусто только конечное число A_{ij}.

10. **Лемма Урысона. Разбиение единицы**

Определение. Пространство *функционально отделимо*, если для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств имеется непрерывная функция, принимающая значение 0 в точках одного из них и значение 1 в точках другого.

Контрольный вопрос. Из этого определения следует выполнение аксиомы T_4.

Лемма Урысона. Нормальное пространство функционально отделимо.

Эта лемма лежит в основе значительной части топологии и, в том числе, в основе гомотопической топологии.

Замечание. Условие нормальности можно переформулировать так: в каждой окрестности замкнутого подмножества имеется другая его окрестность, лежащая в первой со своим замыканием.

Доказательство леммы. Пусть в нормальном пространстве X даны два непересекающихся множества A_0 и A_1. Мы построим отображение X в отрезок [0,1] , при котором A_0 и A_1 будут лежать в прообразах нуля и единицы соответственно.

Рассмотрим на отрезке двоично-рациональные числа и построим последовательно “заборы” между A_0 и A_1, которые отобразим в эти числа. В остальных точках отображение определится однозначно по непрерывности.

В силу нормальности X, существуют непересекающиеся окрестности U_0 и U_1 соотв. множеств A_0 и A_1. Дополнение к их объединению обозначим $A_{1/2}$ и, если оно не пусто, отобразим в точку $1/2$ на отрезке.

Обозначим открытые множества $U_0\setminus A_0$ и $U_1\setminus A_1$ через $G_{[0\frac{1}{2}]}$ и $G_{[\frac{1}{2}1]}$ соотв. Точки X получают частичный порядок в порядке принадлежности к A_0, $G_{[0\frac{1}{2}]}$, $A_{\frac{1}{2}}$, $G_{[\frac{1}{2}1]}$, A_1. Каждое из этих множеств (кроме крайних A_0 и A_1) разбивает X на объединение предшествующих и объединение последующих. При этом граница $G_{[0\frac{1}{2}]}$ лежит в $A_0\cup A_{\frac{1}{2}}$, а граница $G_{[\frac{1}{2}1]}$ в $A_{\frac{1}{2}}\cup A_1$. Поставим в соответствие множествм $G_{[0\frac{1}{2}]}$ и $G_{[\frac{1}{2}1]}$ соотв. отрезки $[0,\,\frac{1}{2}]$ и $[\frac{1}{2},\,1]$.

Дальше этот дихотомичный процесс продолжается очевидным образом и на n-ом шаге для двоично-рационального числа q со знаменателем 2^n дает замкнутое множество A_q (возможно, пустое), точки которого мы отображаем в q. Дополнение к объединению этих множеств распадается на открытые множества, обозначаемые $G_{[\frac{p}{2^n},\,\frac{p+1}{2^n}]}$. Граница $G_{[\frac{p}{2^n},\,\frac{p+1}{2^n}]}$ лежит в $A_{\frac{p}{2^n}}\cup A_{\frac{p+1}{2^n}}$ и мы ставим этому множеству в соответствие отрезок $[\frac{p}{2^n},\,\frac{p+1}{2^n}]$.

В результате каждая точка $x \in X$ либо попадает в одно из замкнутых множеств A_q, тогда ей поставлено в соответствие двоично рациональное число q, либо ей поставлена в соответствие стягивающаяся последовательность вложенных отрезков и в этом случае отобразим ее в предельную точку этой последовательности. Мы получим отображение X в отрезок $[0, 1]$, принимающее на A_0 и A_1 соотв. значения 0 и 1. Покажем, что оно непрерывно.

Прообраз каждого двоично-рационального числа q замкнут. В самом деле, этот прообраз есть пересечение по n замкнутых множеств F_n, где n – номера шагов большие степени знаменателя q и F_n состоит из A_q и замыканий двух открытых множеств $G_{[s,t]}$ этого ранга, примыкающих к A_q.

В таком случае прообраз интервала с двоично рациональными концами открыт и, следовательно, отображение непрерывно, т.к. эти интервалы образуют базу топологии в отрезке. ■

Замечание. Читатель, вероятно, обратил внимание на то, что прообраз двоично рациональной точки q не обязательно совпадает с A_q. Этот прообраз есть пересечение счетного числа открытых множеств, но в нормальном пространстве могут быть замкнутые множества, не являющиеся такими пересечениями. (Например, точка ω_1 в прямой Александрова, см. п.2 следующей главы 4.) Пространство, в котором каждое замкнутое множество есть пересечение счетного числа своих окрестностей, называется *вполне нормальным*. Разумеется, если имеется счетная база, то нормальное пространство оказывается вполне нормальным.

Следующая теорема усиливает лемму Урысона.

Теорема Титце-Урысона. Для нормального пространства X любая непрерывная функция f, заданная на замкнутом подмножестве $A \subset X$, продолжается до непрерывной функции F, заданной на всем X.

Доказательство. см. П.С. Александров...

Используем лемму Урысона для следующего построения.

Разбиение единицы, подчиненное покрытию.

Определение. Пусть дано конечное покрытие нормального пространства X открытыми множествами U_i ($\cup U_i = X$). Разбиением единицы, подчиненным этому покрытию, называется набор функций $\varphi_i : X \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

1. $0 \le \varphi_i \le 1$; 2. $\varphi_i|_{X \setminus U_i} = 0$; 3. $\sum \varphi_i \equiv 1$.

Ограничение конечным покрытием связано с необходимостью сумме функций быть определенной и быть непрерывной. Оба эти условия будут выполнены, если потребовать, чтобы покрытие было *локально конечным*. Это значит, что каждая точка имеет окрестность, пересекающуюся только с конечным числом элементов покрытия.

О паракомпактности. Пространство, для которого в каждое покрытие можно вписать локально конечное, называется *паракомпактным*. Метрические пространства паракомпактны (см. указанную книгу П.С.Александрова, стр. 309).

Упражнение. Докажите паракомпактность локально компактных хаусдорфовых пространств.

(Указание: Покажите сначала, что такое пространство имеет покрытие компактными множествами C_i $1 \le i < \infty$, в котором пересекаются только множества с соседними номерами.

Существование разбиения единицы устанавливается просто. Во-первых, для каждого i обозначим через B_i подмножество U_i, состоящее из точек, не принадлежащих ни одному из остальных элементов покрытия. Это множество, являющееся пересечением замкнутых дополнений к элементам покрытия, само замкнуто в X, лежит в U_i и можно считать, что оно непусто (иначе можно отбросить U_i). Тогда имеется, по лемме Урысона, вещественная неотрицательная функция ψ_i, равная нулю вне U_i и равная единице на B_i. Обозначим через ψ сумму всех ψ_i. Эта функция положительна во всех точках, поэтому определены непрерывные функции $\varphi_i = \frac{\psi_i}{\psi}$. Они, очевидно, удовлетворяют всем трем требованиям. ■

Разбиение единицы имеет простой геометрический смысл. Мы скажем о нем в главе 15, когда введем понятия комплекса и триангуляции.

11. **Гомотопия. Отображения окружности в окружность**.

Мы можем ввести теперь фундаментальное понятие деформации отображения или *гомотопии*, хотя иллюстрации, которые мы можем дать здесь этому понятию, конечно, не отражают его важности для топологии и за ее пределами.

Замечание о непрерывности по совокупности переменных. Пусть дано отображение, аргументами которого служат пары точек, в которых первая точка берется из одного пространства X, а другая из другого – Y. Мы можем сказать, что отображение задано на прямом произведении $X \times Y$. Такое отображение *непрерывно по совокупности переменных*, если оно непрерывно как отображение прямого произведения. В частности, для нас сейчас будет особо важен случай, когда $Y = [0,\, 1]$.

Определение. *Гомотопией* отображения $f_0 : X \to Z$ в отображение $f_1 : X \to Z$ называется отображение $F : X \times [0,\, 1] \to Z$, для которого $f_0(x) = F|_{X\times 0}(x)$ и $f_1(x) = F|_{X\times 1}(x)$.

Слово "отображение" означает для нас *непрерывное* отображение. Если вообще обозначить $F|_{X\times t}(x)$ через $f_t(x)$, то можно сказать, что гомотопия это семейство отображений $f_t(x)$, непрерывное по совокупности переменных $x \in X$ и $t \in [0,\, 1]$. Когда t меняется от 0 до 1, отображение $f_t(x)$ непрерывно изменяется от $f_0(x)$ до $f_1(x)$. Имея это в виду, гомотопию называют также *деформацией* f_0 в f_1.

Отображения окружности в окружность. В качестве простого, но очень важного, как мы увидим дальше, примера, в котором существенную роль играет понятие гомотопии, рассмотрим *гомотопическую* классификацию отображений окружности S^1 в другую окружность S^1_0 (или в себя).

Мы будем использовать в нашем построении стандартное накрытие прямой $\mathbb{R}$ над единичной окружностью S^1 в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, которое описывается комплексной функцией с вещественным аргументом $e^{2\pi \mathbf{i}\varphi}$. Мы обозначим это накрытие через p. Каждый отрезок $[k,\, k+1]$, где k – целое, равномерно отображается на окружность. Его внутренность гомеоморфно отображается на дополнение к точке 1 (комплексная единица), а концы склеиваются и оба отображаются в 1.

Если мы возьмем малую дугу l на окружности, то полный прообраз p^{-1} на $\mathbb{R}$ распадается в счетное число отрезков q_j, каждый из которых гомеоморфно отображается на l и которые переходят друг в друга при целочисленных сдвигах прямой.

Пусть теперь дано отображение $f : S^1 \to S^1_0$. Для простоты будем считать, что S^1_0 — второй экземпляр той же самой окружности, и что $f(1) = 1$. Используя равномерную непрерывность f, разобьем S^1 на конечное число дуг l_n столь малых, что все дуги $m_n = f(l_n)$ также имеют малый диаметр, так что каждый прообраз $p^{-1}l_n$ в $\mathbb{R}$ распадается в счетное число попарно не пересекающихся отрезков q_{nj}, гомеоморфно накрывающих l_n, и аналогично, прообраз m_n распадается, соответственно, на отрезки s_{nj}.

Если мы возьмем какую-либо дугу l_n и один из ее прообразов q_{nj}, то в силу отмеченных гомеоморфизмов, имеется его отображение g на любой из прообразов $s_{n,j'}$ так, что $fp = pg$ в точках q_{nj}. Если фиксирован прообраз q_{nj}, то для соседней дуги l_{n+1} однозначно определен ее прообраз $q_{n+1\bar{j}}$, пересекающий q_{nj}. Если, кроме того, фиксировано отображение $g : q_{nj} \to s_{n,j'}$, то оно однозначно продолжается до отображения отрезка $q_{n+1\bar{j}}$ на тот отрезок $s_{n+1\bar{j}}$, который пересекается с отрезком $s_{nj'}$.

По индукции, начав, допустим, с выбора отрезков q_{1j} и s_1j', содержащих 0, мы сможем продолжить это построение вплоть до последнего отрезка l_z. При этом будет построено непрерывное отображение G отрезка $[0,\, 1]$ в $\mathbb{R}$, которое переведет 0 в 0 и 1 в некоторую целочисленную точку k прямой, причем $pG = Fp|_{[0,1]}$.

Определение. *Целое число k называется степенью отображения* f. (Оно выражает число полных оборотов которые делает точка $f(x)$ вокруг окружности S^1_0, когда точка x обегает один раз окружность S^1 в положительном направлении.)

Наиболее важное свойство степени отображения – то, что она не меняется при деформации отображения. Допустим, что при деформации точка 1 при всех t переходит в 1 (это не существенное ограничение).

Лемма. Если $F : S^1 \times [0,\, 1] \to S^1$ – гомотопия, при которой $F(1, t) = 1$ для всех t, то все отображения $f_t = F|_{S^1\times t}$ имеют одну и ту же степень.

Доказательство. Отображение $G_t(x) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ для каждого t строится однозначным образом и оно, очевидно, непрерывно по совокупности переменных x и t. При малом изменении t, следовательно, точки образа сдвигаются равномерно мало, в частности, образ 1 остается в малом интервале, но этот образ должен быть целым числом, а в малом интервале имеется только одно целое число.

Вся деформация может быть в силу равномерной непрерывности разбита на конечное число таких малых деформаций. Так как соседние деформации имеют общие отображения, все отображения имеют одну и ту же степень. ■

Упражнение. Показать, что два отображения, имеющие равную степень, гомотопны. Построить отображение с произвольной целой степенью.

Итак, каждое отображение имеет целую степень, два отображения гомотопны тогда и только тогда, когда они имеют равную степень, и для каждого целого числа d имеется отображение со степенью d.

Мы построили *гомотопическую классификацию* отображений окружности в окружность: классы гомотопных между собой отображений находятся во взаимнооднозначном соответствии с целыми числами.

Оказывается, в точности такая же классификация имеет место для отображений любой сферы в сферу той же размерности. Она принадлежит Брауэру и Хопфу. Доказательство гораздо сложнее.

Контрольный вопрос. Как освободиться от ограничения, что все отображения переводят 1 в 1?

Упражнение. Описать гомотопическую классификацию отображений окружности в тор $S^1 \times S^1$, используя накрытие тора плоскостью.

Отображения окружности в $\mathbb{R}^2 \setminus O$. Поставим в соответствие точкам каждого луча из начала точку пересечения этого луча с единичной окружностью S^1. Этим построено отображение $p : \mathbb{R}^2 \setminus O \to S^1$.

Каждому отображению $f : S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus O$ сопоставляется отображение $g_f = pf : S^1 \to S^1$.

Упражнение. Покажите, что отображения $S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus O$ гомотопны тогда и только тогда, когда гомотопны соответствующие им отображения $S^1 \to S^1$.

Из этого результата следует, что гомотопическая классификация отображений окружности в окружность совпадает с гомотопической классификацией отображений окружности в “проколотую плоскость”.

Нетрудно увидеть, что гомотопическая классификация отображений окружности (на самом деле любого пространства) в круг тривиальна: все отображения гомотопны. Более общим образом:

Определение. Топологическое пространство X называется *односвязным*, если оно линейно связно и если любое отображение окружности в X гомотопно постоянному отображению (т.е. отображению в одну точку).

В основном для нас будет важен случай односвязной области на плоскости или в двумерном многообразии.

Упражнения. Доказать, что сфера S^2 односвязна. Доказать то же для S^n, $n > 2$.

Описать гомотопическую классификацию отображений S^1 в проективную плоскость P^2, используя двулистное накрытие $S^2 \to P^2$.

- =- =- =- =- =- =-

1. Топологические многообразия

Гладкие многообразия и непрерывность. Мы определили гладкие многообразия как множества, на которых "задается гладкая структура". Задание структуры на M означает выбор атласа как набора взаимно однозначных отображений подмножеств, образующих покрытие M, на области аффинного пространства с требованием непрерывной дифференцируемости всех возникающих координатных преобразований (из которого следует их диффеоморфность). Два атласа могут быть согласованы, тогда они определяют ту же самую структуру, или не согласованы, тогда структуры различны.

Это определение позволило нам с помощью карт определить понятие гладкого (и просто дифференцируемого) отображения одного гладкого многообразия в другое, сведя его к условию дифференцируемости локальных представителей данного отображения, т.е. надлежащим образом определенных отображений областей аффинного пространства в области, возможно, другого аффинного пространства. Очевидно, аналогично можно определить и непрерывность отображения, поскольку это свойство локальное. Действительно, если локальный представитель отображения непрерывен в точке A для одной карты, то в этой же точке будет непрерывен и любой другой представитель, если только карта содержит A, поскольку координатные преобразования диффеоморфны и, значит, гомеоморфны.

Итак, для гладких многообразий определены непрерывные отображения. В таком случае естественно постараться ввести в многообразие топологию, с тем чтобы отображения были бы непрерывны в обычном топологическом смысле.

Введение топологии в гладкое многообразие. Отображение, заданное картой, можно рассматривать как отображение гладких многообразий (области $\mathbb{R}^n$ на область в данном многообразии), причем за его локальный представитель можно взять тождественное отображение. Естественно потребовать, чтобы это отображение было гомеоморфизмом, определенным на открытом подмножестве многообразия.

В таком случае мы приходим к такому определению топологии в гладком многообразии M, гладкая структура в котором задана некоторым атласом:

1. Каждая карта атласа является гомеоморфизмом,
2. Образы отображений карт атласа считаются открытыми в M,
3. Открыты в M те и только подмножества, пересечения которых с образом каждой карты атласа открыты.

То, что аксиомы выполнены, проверяется автоматически.

Многообразие как локально евклидово пространство. Но теперь мы можем обернуть задачу. Введем понятие многообразия в чисто топологических рамках, а затем посмотрим, какие возможны структуры гладкого многообразия на полученном топологическом.

Определение. *Многообразие это топологическое пространство, являющееся локально евклидовым пространством.*

Иначе говоря, каждая точка в n-мерном многообразии M обладает окрестностью, гомеоморфной евклидову пространству $\mathbb{R}^n$ некоторой размерности n. Еще иначе: имеются локальные параметризации числовым пространством, которые, как и раньше, называются *картами*. Очень существенно то, что $\mathbb{R}^n$ рассматривается с канонической координатной системой.

Карты и атласы топологического многообразия. Для топологического k-мерного многообразия M *картой* называется любой гомеоморфизм $\varphi : V \to U$ области $V \subset \mathbb{R}^k$ на открытое подмножество $U \subset M$. *Атласом* называется совокупность карт, образы которых покрывают M.

Мы будем иногда допускать вольность речи и называть картой образ гомеоморфизма, а его самого называть гомеоморфизмом карты. Например, можно сказать, что карты атласа образуют покрытие многообразие. Мы допускаем эту вольность в следующем определении:

Координатное преобразование. Если две карты $\varphi_1 : V_1 \to U_1$ и $\varphi_2 : V_2 \to U_2$ пересекаются, то возникает *координатное преобразование* $\psi_{12} : W_1 \to W_2$, где $W_i = \varphi_i^{-1}(U_1 \bigcap U_2)$. Очевидно, ψ_{12} является гомеоморфизмом.

Пусть дан атлас с картами $\varphi_i : V_i \to U_i$ и координатными преобразованиями $\psi_{ij} : \varphi_i^{-1}(U_i \bigcap U_j) \to \varphi_j^{-1}(U_i \bigcap U_j)$. Диффеоморфизмы ψ_{ij} удовлетворяют, очевидно, тождествам

$$\psi_{ij} = \psi_{kj}\psi_{ik}$$

на $\varphi_i^{-1}(U_i \bigcap U_j \bigcap U_k))$ и
$$\psi_{ji}^{-1}\psi_{ij} = 1$$
на $\varphi_i^{-1}(U_i \bigcap U_j)$.

Эти тождества, в частности, означают, что мы можем рассматривать многообразие как топологическое пространство, склеенное из областей V_i пространства $\mathbb{R}^n$. Гомеоморфизм ψ_{ij} координатного преобразования позволяет склеить две области V_i и V_j, а указанные тождества означают согласованость этой склейки. То, что в результате получится исходное пространство, проверяется непосредственно.

2. **Топологические условия на определение многообразий**

Топологические сложности. Однако, если ограничиться данным определением, то возникают сложности топологической природы, которые, обычно, исключаются в конкретных задачах, но которые имеются также и в рамках теории гладких многообразий. Именно, возможны нехаусдорфовы локально евклидовы пространства (выше мы это показали) и также связные локально евклидовы пространства без счетной базы.

Нехаусдорфово удвоение точки и длинная прямая. Простой способ конструировать нехаусдорфовы пространства, приведенный выше, в применении к евклидову пространству дает локально евклидово пространство (уже в одномерном случае). Более того, получается гладкое многообразие!

Связное одномерное пространство без счетной базы возникает с помощью трансфинитов. Если для каждой пары соседних трансфинитов, меньших первого несчетного, вставить между ними отрезок и ввести интервальную топологию в объединение (тогда предельные трансфиниты станут предельными точками в топологическом смысле), то объединение этих отрезков даст одномерное локально евклидово связное пространство, которое очевидным образом не может иметь счетной базы, так как объединение любого счетного множества открытых подмножеств этого пространства, не содержащих ω_1, оставит вне себя несчетно много трансфинитов, а пересечение счетного множества окрестностей точки ω_1 также содержит несчетно много точек.

Это (хаусдорфово) пространство называют “длинной прямой” или “прямой Александрова”.

Существуют также двумерные (и большей размерности) связные и хаусдорфовы локально евклидовы пространства без счетной базы – так называемые “поверхности Прюфера” (см. Р.Неванлинна “Униформизация”, 1955).

В виду этих осложнений в понятие многообразия включают топологические требования хаусдорфовости и счетной базы.

Упражнение. Покажите, что связное локально евклидово метризуемое пространство имеет счетную базу и хаусдорфово.

3. **Топологические многообразия с краем**

Необходимость рассмотрения края. Имеется еще одно обстоятельство, которое заставляет ослабить несколько условие локальной евклидовости. Дело в том, что во многих задачах приходится рассматривать как многообразия объекты, подобные кругу или листу Мебиуса, словом, имеющие *край*. Дать формулировку такого расширения понятия нетрудно, но это приводит к необходимости решения ряда вопросов, вызывающих принципиальные затруднения и требующих развития сложной топологической техники, с началами которой мы познакомимся в части 4 в главе 17 о теореме Жордана.

Полупространство как модель. Идея в том, чтобы рассматривать в качестве “модельного пространства” не $\mathbb{R}^n$, а замкнутое полупространство $\mathbb{R}^n_+$, определенное, скажем, неравенством $x^n \geq 0$. Пространство называется *локально евклидовым с краем*, если каждая его точка имеет окрестность, гомеоморфную открытому подмножеству $\mathbb{R}^n_+$. При этом точки края те, которые при таком гомеоморфизме отвечают точкам ограничивающей плоскости $x^n = 0$.

Инвариантность края. Трудность здесь заключается в том, чтобы показать, что точки края не имеют окрестностей гомеоморфных $\mathbb{R}^n$, т.е. *при каждом* таком гомеоморфизме они будут получаться как образы точек граничной плоскости.

Инвариантность размерности. Вторая трудность, имеющаяся даже при отсутствии края, заключается в том, чтобы установить инвариантность размерности модельного пространства: невозможно, чтобы точка имела окрестности, гомеоморфные евклидовым пространствам разной размерности. (Эта трудность для гладких многообразий была преодолена с помощью теоремы об обратном отображении, согласно которой диффеоморфизм между областями аффинных пространств возможен только в случае совпадения размерностей.)

О теореме об инвариантности области. Обе эти трудности разрешаются доказательством так называемой *теоремы об инвариантности области*: если из двух гомеоморфных подмножеств $\mathbb{R}^n$ одно открыто, то и другое тоже.

Как говорилось, доказательство этой теоремы (данное Л. Брауэром в 1912 г.) нетривиально. В настоящее время эти результаты (с далекими обобщениями) проще всего получаются в рамках теории гомологий и мы отсылаем за их доказательствами к учебникам алгебраической топологии. Мы вернемся к их обсуждению в четвертой части, где дадим доказательство в двумерном случае. Теперь же мы подготовлены к тому, чтобы дать определение топологического многообразия в окончательном виде.

4. **Топологические многообразия и связанные с ними понятия**

Определение топологического многообразия. Топологическое пространство M называется *топологическим многообразием размерности* n с краем, если оно хаусдорфово, имеет счетную базу, и если каждая точка в M имеет окрестность гомеоморфную открытому подмножеству полупространства $\mathbb{R}^n_+$.

(Карты и атласы определяются по общей схеме.)

Точки края и точки внутренности. Точки M, обладающие окрестностями, гомеоморфными открытым подмножествам $\mathbb{R}^n$, называются *внутренними* для M, а их совокупность называется *внутренностью* M и обозначается $\operatorname{int} M$. Точки, которые имеют окрестности, гомеоморфные открытым подмножествам $\mathbb{R}^n_+$ при гомеоморфизмах, которые переводят эти точки в точки граничной плоскости $x^n = 0$, называются точками края. Их совокупность называется *краем* M и обозначается ∂M.

Если край есть пустое множество, то говорят, что M *есть топологическое многообразие без края.*

Внутренность и край. Оказывается (в силу теоремы Брауэра об инвариантности области), что справедливо следующее

Утверждение без доказательства. M представляется объединением двух своих непересекающихся подмножеств: открытого $\operatorname{int} M$ и замкнутого ∂M, причем ∂M или пуст или сам является топологическим многообразием без края на единицу меньшей размерности. Ясно также, что каждая точка края лежит в замыкании внутренности, т.е. $\operatorname{int} M$ всюду плотна. ■

Например, круг является двумерным многообразием с краем, его край есть окружность – одномерное многообразие без края.

Упражнение. Для связного многообразия внутренность связна (а край может быть несвязен).

Размерность. Заметим, что из теоремы об инвариантности области следует постоянство размерности для всех окрестностей в случае связного многообразия. Если же оно не связно, то каждая компонента может иметь свою размерность. Обычно рассматривают несвязные многообразия, в которых все компоненты имеют одинаковые размерности, но, конечно, это зависит от конкретной задачи.

Замкнутые и открытые многообразия. Введем еще два употребляющихся термина. Если многообразие компактно и не имеет края, то говорят, что оно *замкнуто.* Если многообразие не имеет компактных компонент и не имеет края, то его называют *открытым.* Если многообразие имеет несколько компонент, то среди них могут быть и открытые и замкнутые, поэтому этих терминов к несвязным многообразиям лучше не применять.

Примерами замкнутых многообразий служат сферы, проективные пространства и также группы $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$. Открытыми многообразиями являются пространства $\mathbb{R}^n$ и любые их открытые подмножества, например, группы $GL(k, \mathbb{R})$, и также $SL(k, \mathbb{R})$.

Прямое произведение многообразий является многообразием. Для многообразий без края построение карт в произведении очевидно (как и в гладком случае, берутся произведения карт). Для многообразий с краем требуется небольшая работа для аккуратного приведения произведения карт к карте, удовлетворяющей определению, но мы можем оставить это в качестве упражнения (см. книгу В.А.Рохлина и Д.Б.Фукса).

Замечание. Отметим, что хотя термин “внутренность” используется в двух смыслах, но мы различаем внутренность подпространства и внутренность многообразия обозначениями: $\operatorname{Int} M$ для первого и $\operatorname{int} M$ для второго.

5. **Классификация одномерных многообразий**

Теорема. Компактное связное одномерное многообразие M^1 гомеоморфно окружности.

Доказательство. Мы можем взять в качестве базиса топологии открытые подмножества M^1, гомеоморфные открытому интервалу $(0,1)$ и замыкания которых гомеоморфны отрезку $[0,1]$. В силу компактности M^1 имеется конечное покрытие такими множествами U_i, $1 \le i \le p$, $\cup U_i = M^1$. Для каждого i имеется карта $\varphi_i : (0,1) \to U_i$, которая продолжается до гомеоморфизма $\bar{\varphi}_i : [0,1] \to [U_i]_{M^1}$. Можно считать,что ни одно U_i не содержится в объединении других.

Рассмотрим два пересекающихся множества, скажем, U_1 и U_2. Их пересечение $P = U_1 \cap U_2$ открыто в M^1 и также в каждом из них. Оно не замкнуто ни в одном из них, так как иначе одно содержит другое.

Пусть $\bar{\mathbf{x}}_1 \in U_1$ есть предельная точка для P, значит, для U_2, но $\bar{\mathbf{x}}_1 \bar{\in} U_2$. Если $\bar{\mathbf{x}}_1 = \lim \mathbf{x}_i$, где $\mathbf{x}_i \in P$, то $\varphi_2^{-1}(\mathbf{x}_i)$ стремится к концам интервала $[0,1]$ (в силу хаусдорфовости). Отсюда следует, что U_1 содержит не более двух точек предельных для P, но не лежащих в P. Заменив некоторые элементы покрытия на пары меньших карт, можно добиться, чтобы для пересекающихся элементов имелась только одна такая точка. Тогда P открыто и замкнуто в $U_1 \setminus \bar{\mathbf{x}}_1$ и, значит, либо совпадает с $U_1 \setminus \bar{\mathbf{x}}_1$, либо совпадает с одним из двух интервалов, на которые $\bar{\mathbf{x}}_1$ разбивает U_1.

В первом случае объединение $U_1 \cup U_2$ гомеоморфно S^1 и тогда это объединение есть все M^1. (Это объединение открыто и замкнуто в M^1.)

В противном случае мы видим, что пересечение пересекающихся областей совпадает в каждой из этих областей с одним из двух интервалов, на которые эта область делится граничной точкой пересечения. В таком случае мы можем расположить области U_i в цепочку, в которой U_i пересекается с U_{i-1} и U_{i+1}, причем только с ними, в силу условия, что никакая из этих областей не содержится в объединении других. В силу конечности покрытия, цепочка получается замкнутой, т.е. $U_{p+1} = U_1$.

По условию, область U_i имеет две граничные точки, скажем, α_i и ω_i. Можно считать, что U_i содержит ω_{i-1} и α_{i+1}. Тогда эти точки идут в циклическом порядке: $\alpha_i,\ \omega_{i-1},\ \alpha_{i+1}, \omega_i, \ldots$. При этом две соседние являются граничными точками интервала и только соседние интервалы имеют общую предельную точку. Ясно, что эта цепочка позволяет установить гомеоморфизм M^1 с окружностью S^1. Нужно взять на окружности последовательность точек a_i, b_i в том же циклическом порядке с взаимно однозначным соответствием $a_i \leftrightarrow \alpha_i,\ b_i \leftrightarrow \omega_i$ и установить гомеоморфизм каждого интервала $[\alpha_i,\ \omega_{i-1}]$ с интервалом a_i, b_{i-1} и интервала $\omega_{i-1},\ \alpha_{i+1}$ с интервалом b_{i-1}, a_{i+1}. ■

Упражнение. Докажите, что эти рассуждения позволяют задать гомеоморфизм некомпактного одномерного связного многообразия с прямой $\mathbb{R}^1$.

Связными одномерными многообразиями с краем являются отрезок и полуинтервал.

6. **От топологических многообразий к гладким**

Согласованные атласы и структуры на топологическом многообразии. Теперь мы можем сделать второй шаг на нашем возвратном пути и вернуться к понятию гладкого многообразия, основываясь на уже данном определении топологического многообразия. Идея заключается в том, что для топологического многообразия все карты, т.е. все гомеоморфизмы его открытых подмножеств с открытыми подмножествами аффинного пространства, автоматически будут согласованы в топологическом смысле: для каждых двух карт, пересечение которых непусто, координатное преобразование есть гомеоморфизм. Топологически карты любого атласа будут согласованы и любые два атласа будут согласованы между собой. (Можно сказать, что C^0-струкура единственна.) Но мы можем ограничиться атласами некоторого класса, которые будут согласованы между собой в каком-либо специальном смысле. В таком случае говорят, что в многообразии введена структура с соответствующим назанием.

Задание *гладкой C^p-структуры* состоит в выборе атласа из карт, согласованных в дифференциальном смысле: с диффеоморфными координатными преобразованиями класса гладкости p.

Определение гладкого многообразия. Гладким (или дифференциальным) многообразием класса гладкости p называется *топологическое многообразие*, на котором введена гладкая структура класса p (т.е. задан атлас класса гладкости p и вместе с ним все атласы, согласованные с ним в классе гладкости p).

(Мы следуем книге В.А.Рохлина и Д.Б.Фукса, называя многообразие дифференциальным. Общепринято название “дифференцируемые”, что, строго говоря, бессмыслено.)

О гладких структурах. Поскольку согласованность атласов есть отношение эквивалентности, естественно задать вопрос о том, сколько существует классов эквивалентности, т.е. сколько имеется различных гладких структур данного порядка p. Мы вернемся позже к этому вопросу, он требует дополнительной подготовки. Пока заметим, что любой гомеоморфизм $\theta : M \to M$ многообразия на себя переводит одну структуру в другую, как правило, отличную от данной. Именно, карты φ данного атласа заменяются на карты $\theta\varphi$, при этом координатные преобразования остаются прежними и поэтому карты остаются дифференциально согласованными. Сам гомеоморфизм оказывается диффеоморфизмом из первой структуры во вторую.

Контрольный вопрос. Если новый атлас согласован с прежним, то гомеоморфизм является диффеоморфизмом многообразия на себя (с одной и той же гладкой структурой в образе и прообразе).

Кроме многообразий конечных классов гладкости, определены многообразия класса гладкости ∞, вещественно аналитические и комплексно аналитические. Мы не останавливаемся на очевидной модификации определения (см. книгу В.П. Рохлина и Д.Б.Фукса).

Многообразие класса гладкости p является, конечно, одновременно и многообразием любого меньшего класса гладкости (только максимальный атлас будет увеличиваться). Имеется теорема, согласно которой многообразие класса гладкости $p \geq 1$ имеет структуру гладкости ∞ и даже аналитическую, согласованную с данной до порядка p. (Это значит, что по данному атласу можно построить новый атлас, согласованный с данным до порядка p и с координатными преобразованиями любого предписанного класса.) За доказательством для класса ∞ и за дальнейшей информацией мы также отсылаем к книге В.П.Рохлина и Д.Б.Фукса (гл.3, §4, n.9, стр.221–225).

Многообразия с краем. Пока мы не упоминали о крае. Сказанное можно отнести и к многообразиям с краем, но, во-первых, в точках края производные по последней координате нужно брать односторонними. Во-вторых, то, что край гладкого многообразия совпадает с краем соответствующего топологического, можно утверждать только на основе теоремы об инвариантности области. С учетом этих замечаний понятия замкнутого и открытого многообразия мы определяем для гладких многообразий так же, как выше для топологических.

Сложнее обстоит дело с прямым произведением. Прямое произведение круга на отрезок дает (полный) цилиндр, край которого имеет угол, т.е. не является гладким многообразием с краем. Но, конечно, край можно "закруглить" или "сгладить". Эту операцию можно провести в общем случае. Однако она требует значительного числа технических подробностей, за которыми мы снова должны отослать к только что упомянутой книге.

7. **Гладкая структура одномерных многообразий.**

Мы знаем, что связное одномерное многообразие без края гомеоморфно либо прямой, либо окружности. Покажем, что гладкая струкртура на таком многообразии единственна. Мы ограничимся рассмотрением случая прямой, оставляя случаи окружности и интервалов (многообразий с краем) в качестве упражнений.

Теорема. Любая гладкая структура на прямой диффеоморфна стандартной.

Доказательство. Пусть на $\mathbb{R}^1$ задана гладкая структура. Очевидно, мы можем взять определяющий эту структуру атлас так, что каждая карта имеет непустое пересечение только с двумя своими соседями. Более точно: пусть $a_i = i-\varepsilon$ и $b_i = i+\varepsilon$ два числа, близких к целому числу i с двух сторон, и пусть заданы гомеоморфизмы φ_i интервалов $(a_{i-1},\, b_i)$ на интервалы (c_{i-1}, d_i). Мы предполагаем, что φ_i составляют атлас, для которого гомеоморфизм $h_{ii+1} = \varphi_{i+1}\varphi_i^{-1}$ интервала $(p_i,\, d_i) = (\varphi_i(a_i),\, d_i)$ на интервал $(c_i, q_i) = (c_i,\, \varphi_{i+1}(b_i))$ является диффеоморфизмом. Будем считать, что интервалы $c_i,\, d_{i+1}$ ориентированы так же, как интервалы $a_i,\, b_{i+1}$ (слева направо).

Мы должны построить гомеоморфизм H прямой на себя, переводящий эту структуру в стандартную.

Возьмем между точками a_1 и b_1 еще две точки r_1 и r_1' и пусть $s_1 = \varphi_1(r_1)$ и $t_1 = \varphi_1(r_1)$. Мы сократим карту φ_0, выбросив из нее полуинтервал $[r_1,\, b_1)$.

На интервале $(a_0,\, r_1)$ (сокращенная карта) положим $H = \varphi_0$. Покажем, как продолжить его на интервал $a_1,\, b_2$. Дальнейшие продолжения делаются в обе стороны последовательно так же.

Интервал $a_1,\, b_2$ разбит точкой r_1 на интервал $(a_1,\, r_1)$ и полуинтервал $[r_1,\, b_2)$. На $(a_1,\, r_1)$ гомеоморфизм H уже задан и отображает его на $(p_1,\, s_1)$.

Заменим карту φ_1 на карту $\bar{\varphi_1}$, полученную композицией φ_1 и диффеоморфизма z_1 интервала $(c_1,\, d_2)$, определенного следующим образом:

на полуинтервале $(c_1,\, t_1)$ он совпадает с $h_{01}^{-1} = \varphi_0\varphi_1^{-1}$;

на полуинтервале $(r_1',\, b_2)$ он является изометричным сдвигом, переводящим $[t_1',\, d_2$ в $[s_1',\, d_2')$, где точка d_2' лежит справа от s_1';

на отрезок $[r_i,\, r_i']$ гомеоморфизм может быть продолжен так, чтобы в целом получился диффеоморфизм. Мы покажем, как это делается, в последней главе в достаточно общем виде.

Поскольку z_1 есть диффеоморфизм, замена φ_1 на $\bar{\varphi}_1$ не меняет гладкой структуры, определенной данным атласом. С другой стороны, новый гомеоморфизм координатной замены – тождественный гомеоморфизм интервала $(p_0,\ s_0)$ на себя. После того, как такое преобразование атласа будет проведено в окрестности каждой целочисленной точки, мы получим гомеоморфизм прямой на некоторый интервал I, являющийся объединением последовательно расширяющихся интервалов. Это диффеоморфизм, где в прообразе берется данная, а в образе стандартная гладкая структура (определенная одной картой – тождественным отображением интервала I в прямую). Мы оставляем в качестве контрольного упражнения проверку того, что локальными представителями нашего отображения служат тождественные отображения. ■

8. **Топологические свойства матричных групп**

Мы уже знаем, что некоторые матричные группы являются гладкими подмногообразиями пространства $\mathbb{R}^{n^2}$. Рассмотрим их топологические свойства.

Группа $\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$ *компактна.* Действительно, она замкнута как прообраз двух точек ± 1 при непрерывном отображении, и ограничена, т.к. сумма квадратов координат каждой ее точки (т.е. элементов каждой ортогональной матрицы) равна n. ■

Группа $\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$ *состоит из двух компонент.* Ортогональные матрицы могут иметь определитель $+1$ или -1. Значит, эта группа распадается на два открытых (относительно нее) подмножества.

Напомним, что определитель есть непрерывная функция, а множество из двух точек в аффинном пространстве несвязно. Поэтому его прообраз, в данном случае $\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$, также не связен и распадается на два открытых подпространства. Одно из них есть группа ортогональных матриц с определителем $+1$, которая обозначается $\mathbf{SO}(n,\mathbb{R})$ – *специальная ортогональная группа.*

Оба эти подпространства связны, что достаточно доказать для одного из них (почему?).

Связность $\mathbf{SO}(n,\mathbb{R})$ проще всего доказать, заметив, что столбцы ее матриц образуют ортонормированные реперы. Обратно, каждый такой репер задает матрицу из этой группы, если определитель оказывается равным $+1$. Покажем, что перейти от одного такого репера к другому можно непрерывным путем.

Действительно, пусть даны два ортонормированных репера. Проведем двумерную плоскость через их первые векторы, однозначно заданную, если они не коллинеарны, или любую, если они противоположно направлены. В этой плоскости осуществим непрерывное вращение, переводящее один вектор в другой, и распространим это движение на все пространство по линейности, оставляя неподвижным $(n-2)$-мерное ортогональное дополнение. Оставшиеся векторы каждого репера остаются ортогональными своему первому вектору и потому будут ортогональны их общему направлению. Поэтому мы сможем поступить так же со вторыми векторами, не нарушая совпадения первых, и продолжить это построение вплоть до $(n-1)$-х векторов. После этого останутся последние векторы, которые окажутся коллинеарными.

Если они противоположны, то определители матриц координат полученных реперов имеют разные знаки, один из них равен -1, и тогда один из исходно данных определителей должен был быть -1 (т.к. он не менялся при непрерывных вращениях). Но, по предположению, определители обоих данных реперов были положительными. Значит, полученные реперы должны совпасть. Значит, имеется непрерывное отображение отрезка в $\mathbf{SO}(n,\mathbb{R})$, при котором концы переходят в два данных элемента этой группы, т.е. она линейно связна. ■

Предложение. Группа $\mathbf{G}L(n,\mathbb{R})$ состоит из двух компонент, каждая из которых линейно связна.

Доказательство. Возьмем произвольный репер. Построим путь, соединяющий его с ортонормальным. Для этого рассмотрим первый вектор и спроектируем остальные в ортогональную плоскость. Получится $(n-1)$-репер в этой плоскости, соединенный непрерывным путем с данным. Продолжение этой конструкции даст ортогональный репер. Дальше непрерывно изменим каждый вектор в единичный. Это дает путь, связывающий точку из $\mathbf{G}L(n,\mathbb{R})$ с точкой из $\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$, которая, как мы показали, имеет две компоненты. Значит, $\mathbf{G}L(n,\mathbb{R})$ также состоит не более чем из двух компонент. Но она состоит не менее чем из двух коомпонент, т.к. матрицы с определителями разных знаков дают два непересекающихся открытых подмножества. ■

Группа $\mathbf{S}L(n,\mathbb{R})$ *связна.* Если репер в предыдущем доказательстве был взят из подгруппы $\mathbf{S}L(n,\mathbb{R})$, то мы подправим построенный для него путь следующим образом. Определитель матрицы репера непрерывно зависит от параметра t этого пути. Для каждого значения параметра с помощью гомотетии растянем или сожмем векторы соответствующего репера так, чтобы определитель соответствующей матрицы стал равен $+1$. Ясно, что новый путь также будет непрерывным и будет целиком проходить по $\mathbf{S}L(n, \mathbb{R})$, соединяя взятую точку с точкой в связной подгруппе $\mathbf{S}O(n, \mathbb{R})$. ■

Замечание о группах Ли. Мы показали, что матричные группы, с которыми мы познакомились, оказались гладкими многообразиями. Нетрудно убедиться в том, что групповые операции являются регулярными отображениями: взятие обратного есть диффеоморфизм группы на себя, а умножение – регулярное отображение прямого произведения группы на себя в эту группу. (Полезно проверить это, построив матрицу Якоби в единичном элементе.)

Оказывается, что если дана группа, одновременно являющаяся топологическим многообразием, причем груповые операции непрерывны, то на этом многообразии всегда можно задать единственную гладкую (и даже аналитическую) структуру, относительно которой групповые операции будут дифференцируемыми (соотв. аналитическими).

Группа, которая есть одновременно аналитическое многобразие, и групповые операции которой задаются аналитическими регулярными отображениями, называется *группой Ли* (по имени норвежского математика, который провел их фундаментальное изучение во второй половине прошлого века). Матричные группы дают основной набор примеров групп Ли (имеющиеся примеры групп Ли, не являющихся матричными, являются достаточно экзотичными, см. ...).