УДК 515.145

В. М. Бухштабер, К. Э. Фельдман

Индекс эквивариантного векторного поля и теоремы сложения для характеристических классов Понтрягина

В работе построена теория индексов векторных полей Морса–Ботта на многообразии и на ее основе решена известная задача о локализации трансфера гладких расслоений. В качестве следствия получены теоремы сложения для классов Понтрягина вещественных векторных расслоений в кобордизмах. Это позволило завершить построение теории характеристических классов, начатое более двадцати лет назад.

Библиография: 20 наименований.

§ 1. Введение

Конструкция трансфера расслоений [2], [3] является одним из наиболее фундаментальных понятий в современной алгебраической топологии. Она позволила существенно развить и расширить области приложений метода прямого образа, связанного с такими понятиями, как прямой образ представлений, след алгебраического расширения, трансфер векторных расслоений для накрытий, гомоморфизм Гизина и т.д. (см. [1]–[6], [10]–[12], [17]).

В настоящей работе построена теория индексов векторных полей Морса–Ботта на многообразии и на ее основе решена известная задача о локализации трансфера гладких расслоений. Этот результат является далеким обобщением классической теоремы Пуанкаре–Хопфа, выражающей эйлерову характеристику многообразия в виде суммы индексов нулей касательного векторного поля общего положения.

В качестве следствия для универсальных (т.е. со значениями в теориях кобордизмов) классов Понтрягина вещественных векторных расслоений получены формулы, выражающие характеристические классы Понтрягина суммы расслоений через характеристические классы слагаемых (теоремы сложения). Это позволило завершить построение теории универсальных характеристических классов, начатое более двадцати лет назад [6].

Изложим кратко содержание статьи. В § 2 мы напоминаем конструкцию трансфера для гладких расслоений и соответствующее определение индекса расслоения. В § 3 вводится индекс $\mathrm{Ind}_s(F_l)$ векторного поля Морса–Ботта s на гладком многообразии F в окрестности подмногообразия нулей F_l. Этот индекс принимает значение в когомотопической группе $\pi^0_S(F_l^+)$. Приводится пример векторного поля Морса–Ботта на проективной плоскости, у которого индекс в окрестности проективной прямой равен $-1+u$, где u – образующая группы $\pi^S_1 = Z_2$. Доказывается важная теорема 3.1 локализации трансфера многообразия (как расслоения

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 99-01-00090).

над точкой) при помощи векторного поля Морса–Ботта на нем. В качестве следствия для векторного поля Морса–Ботта s с набором связных подмногообразий нулей $\{F_l\}$ получено выражение эйлеровой характеристики $\chi(F)$ через эйлеровы характеристики $\chi(F_l)$ и индексы $\mathrm{Ind}_s(F_l)$ (теорема 3.2). В § 4 доказывается теорема о локализации трансфера в общем случае для произвольного расслоения с гладким слоем. Показано, что известные результаты [5], [11] в этом направлении сводятся к ее частным случаям.

Оставшаяся часть работы посвящена приложениям полученных результатов к теории характеристических классов вещественных векторных расслоений. В § 5 построено важное поле Морса–Ботта на грассманизации суммы Уитни двух вещественных векторных расслоений. Описаны связные компоненты подмногообразий нулей и вычислены индексы этого поля в их окрестностях.

В § 6 получен один из центральных результатов работы – теорема сложения универсальных классов Понтрягина вещественных векторных расслоений. Детально рассмотрен случай первого полуцелого класса $p_{1/2}$. Показано, что на образе отображения

$$p_{1/2}\colon KO^*(X) \to U^2(X)$$

возникает новая алгебраическая операция, не сводимая ни к какой формальной группе. Обратим внимание, что в нашей краткой заметке [9] в формуле для $p_{1/2}(\xi \oplus \zeta)$ в комплексных кобордизмах была допущена неточность, которую мы исправляем в настоящей работе.

В последнем параграфе исследуются классы Понтрягина стабильно комплексных векторных расслоений. Показано, что если вещественное векторное расслоение допускает стабильную комплексную структуру, то его классы Понтрягина с полуцелыми номерами равны нулю, а классы Понтрягина с целыми номерами обладают реализацией в симплектических кобордизмах.

Авторы выражают глубокую признательность И. А. Дынникову за полезные обсуждения и ценные замечания в ходе выполнения этой работы.

§ 2. Индекс гладкого расслоения

В этом параграфе мы дадим определения основных понятий, связанных с трансфером Беккера–Готтлиба [3].

Пусть X и Y – топологические пространства с отмеченными точками и $[X,Y]$ – множество гомотопических классов отображений X в Y, переводящих отмеченную точку в отмеченную. Обозначим через $\{X,Y\}$ группу стабильных гомотопических классов отображений

$$\{X,Y\} = \lim_{n\to\infty}[S^n \wedge X, S^n \wedge Y].$$

Определение 2.1. *Нульмерной когомотопической группой пространства X с отмеченной точкой* называется группа

$$\pi_S^0(X) = \{X, S^0\} = \lim_{n\to\infty}[S^n \wedge X, S^n].$$

Будем обозначать через X^+ несвязное объединение пространства X и точки, которую будем полагать отмеченной. Если в пространстве X задана отмеченная точка, то $S^n \wedge X^+$ гомотопически эквивалентно $S^n X \vee S^n$, и поэтому

$$\pi^0_S(X^+) = \pi^0_S(X) \oplus Z.$$

Каноническую проекцию $\pi^0_S(X^+) \to Z$ мы будем обозначать через ϵ. Если в качестве X взять сферу S^k, то

$$\mathrm{Ker}(\epsilon) \cong \pi^S_k,$$

где π^S_k – k-я стабильная гомотопическая группа сфер.

Каждое расслоение (E, F, B, p) с гладким компактным замкнутым слоем F задает канонический элемент в группе $\{B^+, E^+\}$, существование которого обеспечивается трансфером Беккера–Готтлиба [3]. Приведем конструкцию этого элемента в случае, когда E есть гладкое расслоение с компактной базой (для произвольных клеточных баз см. определение в [8]).

Пространство расслоения E может быть вложено в $\mathbb{R}^n$ для подходящего n. Обозначим это вложение как i. Пусть $\tau_F(E)$ – касательное расслоение вдоль слоев расслоения E и $\nu(E)$ – нормальное расслоение вложения $p \times i\colon E \subset B \times \mathbb{R}^n$. Нетрудно проверить, что $\tau_F(E) \oplus \nu(E)$ есть тривиальное n-мерное векторное расслоение над E [3]. Будем обозначать пространство Тома произвольного векторного расслоения ξ как $T\xi$.

Определение 2.2. *Трансфером гладкого расслоения* (E, F, B, p) называется композиция отображений

$$\tau(p)\colon S^n \wedge B^+ \to T\nu(E) \to T\big(\nu(E) \oplus \tau_F(E)\big) = T[\bar{n}],$$

где первое отображение – это отображение Понтрягина–Тома, представляющее собой склейку внешности трубчатой окрестности подмногообразия E в многообразии $B \times \mathbb{R}^n$, а второе отображение есть вложение расслоения $\nu(E)$ на прямое слагаемое.

Заметим, что пространство Тома тривиального n-мерного векторного расслоения над B есть n-кратная надстройка над B^+. Поэтому трансфер определяет некоторый элемент группы $[S^n \wedge B^+, S^n \wedge E^+]$. Образ этого элемента в группе $\{B^+, E^+\}$ уже не зависит от выбора вложения [3]. Таким образом, трансфер корректно определяет элемент группы $\{B^+, E^+\}$, который мы будем обозначать через $\{\tau(p)\}$.

Стабильное отображение из X в Y для любой теории когомологий $h^*(\cdot)$ однозначно определяет гомоморфизм групп

$$h^*(Y) \to h^*(X).$$

Соответствующий гомоморфизм для трансфера расслоения (E, F, B, p) мы будем обозначать через $\tau(p)^*$. Пусть π – проекция на первое слагаемое $\pi\colon S^n \wedge E^+ \to S^n$.

Определение 2.3. *Индексом $I(E)$ расслоения $p\colon E \to B$* называется элемент $\{\pi \circ \tau(p)\} \in \pi^0_S(B^+)$. Индексом этого расслоения в теории когомологий $h^*(\cdot)$ называется элемент $I_h(E) = \tau(p)^*(1) \in h^0(B^+)$ (мы считаем, что в h^* группа h^0 является кольцом с единицей). Таким образом, $I(E)$ – индекс расслоения в стабильной теории когомотопий $\pi^*_S(\cdot)$.

Заметим, что для любой теории когомологий $h^*(\cdot)$ с единицей существует каноническое преобразование теорий (см. [19])

$$\mu_h\colon \pi^*_S(\cdot) \to h^*(\cdot),$$

которое переводит единицу теории $\pi^*_S(\cdot)$ в единицу теории $h^*(\cdot)$. Индекс расслоения $p\colon E \to B$ в теории $h^*(\cdot)$ равен $\mu_h\big(I(E)\big)$.

Индексы расслоений нетривиальны уже в простейшем случае для расслоений, база которых есть точка. В этом случае $\pi^0_S(B^+) \cong Z$, и индекс расслоения равен эйлеровой характеристике слоя [3].

§ 3. Локализация

Фундаментальной характеристикой невырожденного нуля касательного векторного поля на гладком многообразии является индекс этого векторного поля в окрестности рассматриваемого нуля [14]. Индекс векторного поля определяется как знак детерминанта линейной части векторного поля в малой окрестности нуля [14]. В этом параграфе мы покажем, что в окрестности вырожденного нуля дифференциал поля дает важную характеристику этого нуля. В терминах вводимых характеристик выражаются коэффициенты, с которыми трансфер гладкого многообразия может быть представлен в виде линейной комбинации трансферов подмногообразий нулей векторного поля на исходном многообразии.

Прежде чем приступить к доказательству основной теоремы, мы приведем пример, который поможет понять формулировку свойства локализации трансфера. Начнем с необходимых понятий.

Каждый элемент группы $\pi^0_S(B^+)$ задается непрерывным отображением вида $S^n \wedge B^+ \to S^n$ для достаточно большого n. Обозначим через π проекцию на первый множитель в пространстве $S^n \wedge B^+$. Представитель γ элемента из $\pi^0_S(B^+)$ задает отображение

$$f_\gamma\colon B \to \mathrm{Map}(S^n, S^n)$$

по формуле $f_\gamma(b)(y) = \gamma(y, b)$. Верно и обратное. Любое непрерывное отображение $f\colon B \to \mathrm{Map}(S^n, S^n)$ задает некоторый элемент из $\pi^0_S(B^+)$ по формуле $\gamma_f = \big\{\pi\big(f(b)(y), b\big)\big\}$. Отождествим S^n с $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ и определим действие $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ на S^n посредством этого отождествления. Уже в случае, когда $f(b) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ для любого $b \in B$, соответствующий элемент когомотопической группы может иметь ненулевую компоненту в $\mathrm{Ker}(\epsilon)$.

Пример 3.1. Пусть $B = S^1$ и ξ_1 – нетривиальное одномерное вещественное векторное расслоение над S^1. Заметим, что $\xi_1 \oplus \xi_1$ – тривиальное двумерное вещественное векторное расслоение. Рассмотрим отображение

$$S^2 \wedge S^{1+} = T(\xi_1 \oplus \xi_1) \xrightarrow{(1,-1)} T(\xi_1 \oplus \xi_1) = S^2 \wedge S^{1+} \xrightarrow{\pi} S^2. \tag{3.1}$$

Так как $S^2 \wedge S^{1+} \sim S^3 \vee S^2$, то построенное выше отображение определяет два отображения $\alpha_1 : S^3 \to S^2$ и $\alpha_2 : S^2 \to S^2$. Нетрудно проверить, что α_2 есть симметрия относительно центральной плоскости. Покажем, что α_1 задает образующую группы $\pi_3(S^2)$. Отождествим S^2 и $\mathbb{C}^1 \cup \{\infty\}$, полагая бесконечно удаленную точку отмеченной. Рассмотрим прообраз нуля при отображении α_1. Это будет нулевое сечение в расслоении $\xi_1 \oplus \xi_1$, т.е. окружность. Полный прообраз $\mathbb{C}^1 \subset S^2$ при отображении α_1 представляет собой пространство расслоения $\xi_1 \oplus \xi_1$. Расщепление тривиального двумерного вещественного расслоения над S^1 в прямую сумму $\xi_1 \oplus \xi_1$ задает выделенный базис в каждом слое расслоения

$$\big\langle e_1(\phi), e_2(\phi)\big\rangle = \langle e^{i\phi/2}, ie^{i\phi/2}\rangle,$$

где $\phi \in [0, 2\pi]$ – угловая координата на нулевом сечении (т.е. на S^1). Для каждой точки $\{\phi, x+iy\}$ из $S^1 \times \mathbb{C}^1 \subset S^3$ ее образ при отображении α_1 есть

$$\alpha_1\big(\{\phi, x+iy\}\big) = \big\{(x-iy)e^{i\phi}\big\} \in \mathbb{C}^1.$$

Отображение α_1 в координатах $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^1$, $|z_1| = 1$, выражается по формуле

$$\alpha_1(z_1, z_2) = \bar{z}_2 z_1,$$

которая показывает, что отображение α_1 гомотопно проекции в расслоении Хопфа.

Следовательно, соответствующий отображению (3.1) элемент из $\pi^0_S(S^{1+})$ есть $-1+u$, где u – образующая группы $\pi^S_1 \cong Z_2$.

Теперь мы перейдем к формулировке свойства локализации, которое сначала будет доказано для гладких многообразий, т.е. в случае расслоений, база которых есть точка.

Нам потребуется понятие касательного векторного поля Морса–Ботта (см. [16]), частным случаем которого являются морсовские векторные поля.

Определение 3.1. Касательное векторное поле на гладком многообразии F называется *полем Морса–Ботта*, если выполняются следующие два условия:

1) нули векторного поля образуют конечный набор связных компактных замкнутых подмногообразий в F;

2) в точках подмногообразия нулей ядро матрицы Якоби векторного поля совпадает с касательным пространством к подмногообразию нулей.

Рассмотрим компоненту связности F_l нулей векторного поля Морса–Ботта. Обозначим через ν_l нормальное расслоение вложения $F_l \subset F$. Отметим, что пространство расслоения ν_l может быть отождествлено посредством экспоненциального отображения с трубчатой окрестностью подмногообразия F_l в F [14]. Ограничение векторного поля Морса–Ботта на нормальную трубку задает векторное поле на пространстве ν_l. В силу условия 2) последнее векторное поле обязано иметь всюду ненулевую проекцию на касательное пространство вдоль слоев расслоения ν_l в достаточно малой окрестности нулевого сечения. Поэтому без ограничения общности можно считать, что построенное на пространстве ν_l векторное поле всюду является касательным вдоль слоев расслоения ν_l. Обозначим это векторное поле через s_l:

$$s_l : \nu_l \to \hat{\tau}(\nu_l),$$

где $\hat{\tau}(\nu_l)$ – касательное расслоение вдоль слоев. Пусть p – проекция в расслоении ν_l; тогда $\hat{\tau}(\nu_l) \cong p^*\nu_l$ (см., например, [13]). Таким образом, векторное поле s_l позволяет нам построить отображение $\psi_l^s : \nu_l \to \nu_l$ по правилу

$$\psi_l^s(v) = \hat{p}s(v),$$

где $\hat{p}$ – отображение расслоений $\hat{p} \colon p^*\nu_l \to \nu_l$.

Рассмотрим гладкое компактное замкнутое многообразие F и некоторое векторное поле Морса–Ботта s на нем. Пусть $F_1, \ldots, F_m$ – набор связных компактных замкнутых подмногообразий нулей поля s на F. Фиксируем вложение многообразия F в n-мерное евклидово пространство:

$$F_1, \ldots, F_m \subset F \subset \mathbb{R}^n.$$

Сопоставим при помощи векторного поля s каждому подмногообразию F_l отображение

$$j_l \colon S^n \wedge F_l^+ \to S^n \wedge F_l^+$$

следующим образом. Вложение подмногообразий $F_l \subset F \subset \mathbb{R}^n$ индуцирует разложение тривиального n-мерного векторного расслоения над F_l в прямую сумму касательного расслоения τ_l к F_l, нормального расслоения ν_l вложения $F_l \subset F$ и ограничения на F_l нормального расслоения ν вложения $F \subset \mathbb{R}^n$. Поле s задает отображение $\phi_l^s : \nu_l \to \nu_l$. Определим отображение j_l на подрасслоениях ν и τ_l тождественным, а на ν_l равным ϕ_l^s.

Как и выше, обозначим через π проекцию $S^n \wedge F_l^+ \to S^n$ на первый сомножитель.

Определение 3.2. Элемент $\{\pi \circ j_l\} \in \pi_S^0(F_l^+)$ будем называть *индексом* $\mathrm{Ind}_s(F_l)$ *векторного поля* s в окрестности подмногообразия нулей F_l.

Замечание 3.1. Индекс изолированного нуля векторного поля совпадает с $\epsilon\big(\mathrm{Ind}_s(pt)\big)$ и равен обычному индексу изолированного нуля [14].

Пример 3.2. Используя пример 3.1, покажем, что индекс $\mathrm{Ind}_s(F_l) \in \pi_s^0(F_l^+)$ может иметь ненулевую компоненту в $\mathrm{Ker}(\epsilon)$.

Определим действие группы положительных чисел $\mathbb{R}_+$ на RP^2 по формуле

$$t \circ (x_1 : x_2 : x_3) = (x_1 : x_2 : t^{-1}x_3).$$

Дифференциал этого действия при $t = 1$ задает касательное векторное поле s на RP^2. Нулями s будут неподвижные точки действия, т.е.

$$RP^1 = \big\{(x_1 : x_2 : 0)\big\} \subset RP^2$$

и точка $(0 : 0 : 1) \in RP^2$. Нормальное расслоение вложения $RP^1 \subset RP^2$ можно отождествить с нетривиальным одномерным вещественным векторным расслоением ξ_1 над S^1. В окрестности $RP^1 = S^1 \subset RP^2$ векторное поле s задается формулой $s(v) = -v, \ v \in \xi_1 \approx N(S^1) \subset RP^2$. В силу примера 3.1 индекс $\mathrm{Ind}_s(RP^1)$ равен $-1 + u$, где u – образующая группы $\pi_1^S \cong Z_2$.

Пусть отображение τ_l есть трансфер многообразия F_l. Обозначим через i вложение пространства Тома тривиального n-мерного векторного расслоения над $F_1 \cup \cdots \cup F_m$ в пространство Тома тривиального n-мерного векторного расслоения над F, соответствующее вложению

$$F_1 \cup \cdots \cup F_m \subset F.$$

Теорема 3.1 (свойство локализации). *Трансфер τ многобразия F гомотопен композиции*

$$i \circ (j_1 \circ \tau_1 \vee \dots \vee j_m \circ \tau_m) \circ g,$$

где g – отображение, переводящее сферу S^n в букет m сфер.

Доказательство. Вложение пространства Тома

$$\alpha \colon T\nu(F) \to T\big(\nu(F) \oplus \tau(F)\big),$$

использованное нами при определении трансфера, можно заменить на гомотопное, воспользовавшись наличием касательного векторного поля. Именно, рассмотрим однопараметрическое семейство отображений

$$\alpha_t(v) = \alpha(v) \oplus ts\big(\pi(v)\big), \qquad v \in \nu(F),$$

где π – проекция в расслоении $\nu(F)$. Выбирая достаточно большой параметр t, мы получим гомотопное α отображение, которое переводит внешности малых окрестностей нулей поля s в отмеченную точку пространства $T\big(\nu(F) \oplus \tau(F)\big)$. Это означает, что отображение τ может быть пропущено через отображение g и букет отображений, переводящих S^n в $T\nu(F_l)$, $l = 1, \dots, m$.

Для того чтобы описать устройство отображения τ в окрестности нулей поля s, нам будет удобно заменить отображение α на гомотопное, используя каноническое отождествление трубчатых окрестностей подмногообразий F_l и нормальных расслоений вложений $F_l \subset F$, $l = 1, \dots, m$.

Обозначим через $\exp_l$ экспоненциальное отображение, которое задает диффеоморфизм расслоения на единичные диски, ассоциированного с нормальным расслоением ν_l вложения $F_l \subset F$, и трубчатой окрестности $N(F_l) \subset F$ подмногообразия F_l в F, $l = 1, \dots, m$. Для каждого $l = 1, \dots, m$ определим две функции

$$\lambda_l, \mu_l \colon D^{k_l} \to \mathbb{R}^{k_l},$$

где D^s обозначает единичный диск размерности s, $k_l = \operatorname{codim} F_l$, полагая

$$\lambda_l(v) = \begin{cases} |v|, & |v| \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1 - |v|, & |v| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

и

$$\mu_l(v) = \begin{cases} 0, & |v| \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2|v| - 1, & |v| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Рассмотрим отображение

$$\tilde{\alpha} \colon F \to \tau(F),$$

$$\tilde{\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha(x), & x \notin N(F_l), \\ \big\{\exp\big(\mu_l\big(\exp_l^{-1}(x)\big)\exp_l^{-1}(x)\big), \lambda_l\big(\exp_l^{-1}(x)\big)\exp_l^{-1}(x)\big\}, & x \in N(F_l), \end{cases}$$

$$l = 1, \dots, m.$$

Поскольку λ_l гомотопно нулевому отображению и $\mu_l\big(\exp_l^{-1}(x)\big)\exp_l^{-1}(x)$ гомотопно отображению $\exp^{-1}(x)$, то отображение $\tilde{\alpha}$ гомотопно вложению на нулевое сечение $F \to \tau(F)$.

Заметим, что

$$\nu(F)\big|_{N(F_l)} \cong \psi_l(1)^*\nu(F)\big|_{F_l},$$

где $\psi_l(t)$ – ретракция нормальной t-трубки $N_t(F_l)$ на F_l. Следовательно, отображение α гомотопно отображению

$$\beta(v) = \begin{cases} v, & \pi(v) \notin N(F_l), \\ \psi_l\big(\big|\pi\alpha\big(\pi(v)\big)\big|\big)^*(v), & \pi(v) \in N(F_l), \end{cases} \qquad l = 1, \dots, m.$$

Отметим, что построенное отображение есть результат малого шевеления вложения

$$T\nu(F) \to T\big(\nu(F) \oplus \tau(F)\big),$$

при котором слои трубчатых окрестностей подмногообразий F_l переходят в слои нормальных расслоений вложений $F_l \subset F$, соответствующих им при экспоненциальном отображении.

Построим отображение

$$\tau(t) = \Big(\beta(v) \oplus t\tilde{\alpha}_*\Big(s\big(\pi(v)\big)\Big)\Big),$$

где $v \in T\nu(F)$, $t \in [0;\infty)$, и устремим t к ∞. Мы получим отображение $\tau(\infty)$, которое переводит в бесконечность точки расслоения $\nu(F)$, лежащие в слоях над внешностью трубчатых окрестностей подмногообразий F_l.

Слой трубчатой окрестности подмногообразия F_l в F под действием $\tau(\infty)$ отобразится на слой подрасслоения ν_l (см. выше). При больших t можно пренебречь первым слагаемым в сумме

$$\beta(v) \oplus t\tilde{\alpha}_*\big(s\big(\pi(v)\big)\big).$$

Поэтому ограничение отображения $\tau(\infty)$ на слой трубчатой окрестности подмногообразия F_l в F совпадает с отображением ϕ_l^s (см. выше). Для завершения доказательства остается заметить, что образ отображения $\tau(\infty)$ совпадает с образом отображения i.

Замечание 3.2. Требования, налагаемые на векторные поля в формулировке свойства локализации, можно ослабить. Достаточно потребовать, чтобы векторное поле было гомотопно полю Морса–Ботта в классе векторных полей с фиксированным множеством нулей.

Замечание 3.3. Нетрудно проверить, что если векторное поле s на границе трубчатой окрестности подмногообразия нулей F_l гомотопно полю внешних нормалей, то соответствующее этому подмногообразию отображение j_l гомотопно тождественному отображению [8]. Эта ситуация выполняется всегда, когда векторное поле на многообразии задается действием окружности на этом многообразии [2].

Замечание 3.4. Непосредственно из доказательства теоремы 3.1 вытекает, что если касательное векторное поле на многообразии не имеет нулей, то трансфер этого многообразия гомотопен отображению в точку.

Свойство локализации и замечание 3.1 позволяют сразу получить следующее обобщение теоремы Пуанкаре–Хопфа (ср. [20]).

Теорема 3.2. *Пусть F – гладкое компактное замкнутое многообразие. Пусть на нем задано касательное векторное поле Морса–Ботта s. Предположим, что нули векторного поля s образуют конечный набор связных компактных замкнутых подмногообразий $F_1, \dots, F_m$ многообразия F. Тогда*

$$\chi(F) = \sum_{l=1}^{m} \epsilon\bigl(\mathrm{Ind}_s(F_l)\bigr) \cdot \chi(F_l),$$

где $\chi(F)$ – эйлерова характеристика многообразия F.

Доказательство. Мы будем использовать обозначения теоремы 3.1. Сначала рассмотрим произвольное касательное векторное поле на F с изолированными невырожденными нулями. Применим свойство локализации к этому полю, получим

$$I(F) = \{\pi \circ \tau\} = \sum_{k=1}^{N} \{\pi \circ j_k\} = \sum_{k=1}^{N} \epsilon\bigl(\mathrm{Ind}_s(z_k)\bigr),$$

где z_k – нули векторного поля, $k = 1, \dots, N$. В силу замечания 3.1 это означает, что $I(F) = \chi(F)$ – эйлерова характеристика многообразия F.

Применяя свойство локализации к полю s, получим

$$\chi(F) = I(F) = \{\pi \circ \tau\} = \sum_{l=1}^{m} \{\pi \circ j_l \circ \tau_l\} = \sum_{l=1}^{m} \tau(p_l)^* \{\pi \circ j_l\}$$
$$= \sum_{l=1}^{m} \epsilon\bigl(\mathrm{Ind}_s(F_l)\bigr) \cdot I(F_l) = \sum_{l=1}^{m} \epsilon\bigl(\mathrm{Ind}_s(F_l)\bigr) \cdot \chi(F_l).$$

§ 4. Эквивариантные векторные поля и трансфер Беккера–Готтлиба

В этом параграфе мы обобщим свойство локализации трансфера на случай произвольных расслоений с гладким слоем. Известные результаты из [5], [11] являются частными случаями нашего результата. В связи с этим мы показываем, как эти результаты могут быть получены в терминах введенного выше индекса векторного поля.

Рассмотрим гладкое главное G-расслоение $(\mathscr{E}, G, B, p)$, база которого – компактное связное многообразие, а G – компактная группа Ли. Пусть F – компактное замкнутое связное многообразие с гладким действием группы G. Предположим, что на многообразии F задано касательное векторное поле Морса–Ботта s, инвариантное относительно действия группы G. Нули векторного поля s представляют собой объединение неприводимых инвариантных подмногообразий многообразия F. Обозначим их через $F_1, \dots, F_m$. Заметим, что из неприводимости следует связность гладких многообразий

$$E_l = \mathscr{E} \times_G F_l.$$

Всякое инвариантное относительно G касательное векторное поле Морса–Ботта s на F позволяет нам построить векторное поле на $E = \mathscr{E} \times_G F$, которое будет касательным вдоль слоев расслоения E. Будем обозначать его также через s. Имеем

$$s\colon E \to \tau_F(E) = \mathscr{E} \times_G \tau(F).$$

Более того, векторное поле s на E также является полем Морса–Ботта. Нули поля s на E представляют собой подрасслоения $E_l = \mathscr{E} \times_G F_l$, $l = 1, \dots, m$, расслоения E. Фиксируем вложение расслоения E в $\mathbb{R}^n$. Точно так же, как и в предыдущем параграфе, векторное поле s определяет отображения

$$j_l\colon S^n \wedge E_l^+ \to S^n \wedge E_l^+.$$

Обозначим через $\tau(p_l)$ трансфер расслоения E_l. Пусть $\hat{g}$ – отображение, переводящее $S^n \wedge B^+$ в букет из m пространств $S^n \wedge B^+$, индуцированное отображением $g\colon S^n \to \bigvee_m S^n$.

Теорема 4.1. *Трансфер $\tau(p)$ расслоения E гомотопически разлагается в композицию отображений*

$$\tau(p) \sim i \circ \big(j_1 \circ \tau(p_1) \vee \dots \vee j_l \circ \tau(p_l)\big) \circ \hat{g},$$

где i – вложение пространства Тома тривиального n-мерного векторного расслоения над $E_1 \cup \dots \cup E_m$ в пространство Тома тривиального n-мерного векторного расслоения над E.

Доказательство. Поскольку векторное поле s инвариантно относительно действия группы G на F, все гомотопии, описанные при доказательстве теоремы 3.1, эквивариантны относительно действия структурной группы на слое. Поэтому имеет место эквивариантный аналог теоремы 3.1, который и представляет собой формулировка теоремы 4.1.

Замечание 4.1. Требования, налагаемые на базу расслоения E, можно ослабить. Достаточно потребовать, чтобы база была клеточным комплексом. При этом снова достаточно провести доказательство для слоя расслоения, а затем воспользоваться его эквивариантностью относительно действия структурной группы расслоения. Заметим также, что для бесконечного клеточного комплекса гомотопическая эквивалентность понимается как эквивалентность стабильных классов отображений.

Пусть $h^*(\cdot)$ – мультипликативная теория когомологий с единицей. Обозначим через $\big(\mathrm{Ind}_s(E_l)\big)_h$ образ $\mathrm{Ind}_s(E_l)$ при естественном преобразовании теорий когомологий $\mu_h\colon \pi_S^* \to h^*$.

Теорема 4.2. *В описанных выше условиях имеет место соотношение*

$$\tau(p)^* a = \sum_{i=1}^{m} \tau(p_l)^* \Big(\big(\mathrm{Ind}_s(E_l)\big)_h \cdot i_l^* a\Big),$$

где $a \in h^*(E^+)$ и $i_l\colon E_l \subset E$ – вложение расслоений, $l = 1, \dots, m$.

Доказательство. Заметим, что отображения j_l как элементы группы стабильно эквивалентных отображений из E_l в себя однозначно определяют гомоморфизмы j_l^* групп когомологий соответсвующих пространств. Непосредственно из определения умножения в мультипликативных теориях когомологий следует, что гомоморфизм j_l^* представляет собой умножение на $\big(\mathrm{Ind}_s(E_l)\big)_h$. Поэтому утверждение теоремы 4.2 следует из теоремы 4.1.

Теорема 4.2 позволяет получить результат работы [5] в следующем виде.

Следствие 4.1. *Для гомоморфизмов теории сингулярных когомологий имеет место равенство*

$$\tau(p)^* = \sum_{l=1}^{m} \epsilon\big(\mathrm{Ind}_s(E_l)\big)\tau(p_l)^* i^*,$$

где $i\colon E_l \subset E,\ \ l = 1,\dots,m,$ *– вложение подрасслоений нулей поля* s.

Для того чтобы получить из теоремы 4.2 результат работы [11], мы приведем сначала необходимые нам определения.

Рассмотрим главное G-расслоение $(\mathscr{E}, G, B, p)$, где G – компактная группа Ли. Пусть G действует на гладком замкнутом компактном многообразии F.

Определение 4.1. Будем говорить, что *орбиты точек* $x_1, x_2 \in F$ *принадлежат одному типу*, если их стабилизаторы $N(x_1)$, $N(x_2)$ сопряжены. Тип орбиты точки x_1 меньше типа орбиты точки x_2, если $N(x_2)$ сопряжена подгруппе группы $N(x_1)$.

Совокупность точек, принадлежащих орбитам одного и того же типа γ, образуют гладкое подмногообразие F_γ в F, граница которого принадлежит орбитам меньшего типа. Рассмотрим факторпространство $Y = F/G$. Замыкание множества $Y_\gamma = F_\gamma/G \subset Y$ является гладким многообразием с углами, и его граница лежит в $\bigcup_{\gamma'<\gamma} Y_{\gamma'}$ [18].

Теорема 4.3 [18]. *Существует симплициальное разбиение пространства* Y, *при котором внутренность каждого симплекса лежит в* $\mathrm{Int}(Y_\gamma)$ *для некоторого* γ.

Покажем, как с помощью теоремы 4.1 можно доказать теорему 5.14 из [11].

Теорема 4.4. *В описанных выше условиях для гомоморфизма в произвольной теории когомологий, индуцированного трансфером расслоения* $\mathscr{E} \times_G F$, *имеет место формула*

$$\tau(p)^* = \sum_{\sigma\subset Y} (-1)^{\dim\sigma}\tau(p_\sigma)^*,$$

где $\tau(p_\sigma)$ *– трансфер расслоения* $\mathscr{E}\times_G \big(G/N(x_\sigma)\big)$, x_σ *– произвольный прообраз барицентра симплекса* $\sigma \subset Y$ *в построенном в теореме* 4.3 *симплициальном разбиении.*

Доказательство. Построим на многообразии F каноническое касательное векторное поле Морса–Ботта. Для этого сначала построим морсовское векторное поле на каждом n-мерном остове $\mathrm{sk}^n Y$ в симплициальном разбиении пространства Y. Построение проведем индукцией по размерности остова. Положим нулями поля s все вершины симплексов симплициального разбиения. На $\mathrm{sk}^1 Y$ определим векторное поле s отталкивающимся из $\mathrm{sk}^0 Y$ и притягивающимся в барицентры одномерных симплексов. Предположим, что мы построили векторное поле на $\mathrm{sk}^n Y$. Продолжим его до поля на $\mathrm{sk}^{n+1} Y$, полагая барицентры $(n+1)$-мерных симплексов притягивающими нулями поля s. Это завершает шаг индукции, а вместе с ним и построение поля. Таким образом, мы построили морсовское векторное поле на каждом остове $\mathrm{sk}^n Y$, нули которого суть все барицентры симплексов. Индекс нуля в барицентре симплекса размерности n равен $(-1)^n$. Отображение $g\colon F \to F/G = Y$ для каждого симплекса $\sigma \subset Y$ индуцирует тривиальное расслоение $g\colon g^{-1}\big(\mathrm{Int}(\sigma)\big) \to \mathrm{Int}(\sigma)$. Фиксируем инвариантную относительно G риманову метрику на многообразии F. Каноническое расщепление касательного расслоения

$$\tau\big(g^{-1}\big(\mathrm{Int}(\sigma)\big)\big) = g^* \tau\big(\mathrm{Int}(\sigma)\big) \oplus \mathrm{Ker}\, g_*$$

позволяет поднять векторное поле s на многообразие $g^{-1}\big(\mathrm{Int}(\sigma)\big)$. Это поднятие будет согласованным для различных симплексов, поскольку

$$\partial g^{-1}(\sigma) = g^{-1}(\partial\sigma).$$

Обозначим поднятие поля s на все F через $\hat{s}$. Векторное поле $\hat{s}$ есть векторное поле Морса–Ботта на F, инвариантное относительно действия G на F. Нулями векторного поля $\hat{s}$ будут подмногообразия $G/N(x_\sigma)$. Заметим, что

$$\mathscr{E} \times_G g^{-1}(\sigma) \cong \big(\mathscr{E} \times_G G/N(x_\sigma)\big) \times \sigma.$$

Это означает, что нормальное расслоение вложения

$$\big(\mathscr{E} \times_G G/N(x_\sigma)\big) \subset \mathscr{E} \times_G F$$

есть тривиальное расслоение. Поэтому $\mathrm{Ind}_{\hat{s}}\big(G/N(x_\sigma)\big) = (-1)^n$, где n – размерность симплекса σ. Отсюда вытекает утверждение теоремы.

Пример 4.1 (ср. [10]). Рассмотрим расслоение бутылки Клейна KL над окружностью S^1 со слоем S^1:

$$p\colon KL \xrightarrow{S^1} S^1.$$

Индекс $I(p)$ построенного расслоения равен образующей группы

$$Z_2 \cong \pi_1^S \subset \pi_S^0(S^{1+}).$$

Доказательство. Пусть ξ_1 – нетривиальное одномерное вещественное векторное расслоение над S^1. Тогда расслоение $p\colon KL \to S^1$ изоморфно расслоению $p\colon RP(\xi_1 \oplus 1) \to S^1$. Структурная группа этого расслоения действует на слое S^1 отражениями относительно фиксированной прямой. Неподвижные точки действия соответствуют двум подрасслоениям $RP(\xi_1)$ и $RP(1)$ в расслоении $RP(\xi_1 \oplus 1)$. Нормальные расслоения вложений $RP(\xi_1)$, $RP(1) \subset RP(\xi_1 \oplus 1)$ изоморфны расслоению $\xi_1 \otimes 1 \cong \xi_1$. Построим векторное поле на S^1, инвариантное относительно действия структурной группы расслоения $RP(\xi_1 \oplus 1)$. Нулями этого поля будут неподвижные точки действия. Поле будет выталкивающим в одном нуле и притягивающим в другом. Кроме того, поле будет симметрично относительно прямой, проходящей через неподвижные точки действия. Это поле определяет послойное векторное поле Морса–Ботта s на $RP(\xi_1 \oplus 1)$. Нулями этого поля будут подрасслоения $RP(\xi_1)$ и $RP(1)$, пространства которых есть сечения расслоения $RP(\xi_1 \oplus 1)$, т.е. S^1. Свойство локализации (теорема 4.1), примененное к векторному полю s, дает

$$I(p) = \operatorname{Ind}_s\bigl(RP(\xi_1)\bigr) + \operatorname{Ind}_s\bigl(RP(1)\bigr).$$

Выталкивающий нуль поля s имеет индекс, равный 1. Притягивающий нуль имеет индекс, как в примере 3.2, т.е. $-1 + u$, где u – образующая группы π_1^S. Следовательно, $I(p) = u$.

§ 5. Векторные поля Морса–Ботта на грассманизациях разложимых векторных расслоений

В этом параграфе мы построим послойное векторное поле Морса–Ботта на грассманизации разложимого векторного расслоения и явно вычислим его индексы. Свойства этого векторного поля играют важную роль при доказательстве формул сложения для характеристических классов Понтрягина.

В дальнейшем будем обозначать через RG_k^n многообразие Грассмана k-мерных подпространств n-мерного вещественного векторного пространства. Рассмотрим n-мерное вещественное векторное расслоение η над базой B. Обозначим через $RG_k^n(\eta)$ ассоциированное с η расслоение со слоем RG_k^n.

Пусть ξ, ζ – вещественные векторные расслоения над B размерности n_1, n_2 соответственно $(n_1 + n_2 = n)$. Зададим действие группы положительных вещественных чисел $\mathbb{R}_+$ на $\xi \times \zeta$ по формуле: $t \circ (v, u) = (v, tu)$. Это действие канонически переносится на грассманизацию $RG_k^n(\xi \times \zeta)$. Определим векторное поле s:

$$s(z) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=1} t \circ z,$$

где $z \in RG_k^n(\xi \times \zeta)$, и покажем, что оно является полем Морса–Ботта. Для этого достаточно проверить, что на типичном слое $RG_k^n(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ расслоения $RG_k^n(\xi \times \zeta)$ это поле есть поле Морса–Ботта.

Нули ограничения векторного поля s на $RG_k^n(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ суть неподвижные точки действия $\mathbb{R}_+$ на этом слое, т.е. объединение многообразий $RG_{k_1}^{n_1}(\mathbb{R}^{n_1}) \times RG_{k_2}^{n_2}(\mathbb{R}^{n_2})$, $k_1 + k_2 = k$ (см. [7]).

В окрестности точки $z_0 \in RG_{k_1}^{n_1}(\mathbb{R}^{n_1}) \times RG_{k_2}^{n_2}(\mathbb{R}^{n_2}) \subset RG_k^n(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ можно ввести систему координат:

$$A(z) = \pi_z^{\perp} \circ \pi_z^{-1},$$

где $A(z)$ – матрица размера $(n-k)\times k$, π_z – ортогональная проекция плоскости z на плоскость z_0, $\pi_z^\perp$ – ортогональная проекция плоскости z на ортогональное дополнение к z_0 (окрестность точки z_0 состоит из всех точек z, для которых π_z – изоморфизм). Поскольку плоскость z_0 есть прямая сумма плоскостей $x_0\in RG_{k_1}^{n_1}(\mathbb{R}^{n_1})$ и $y_0\in RG_{k_2}^{n_2}(\mathbb{R}^{n_2})$, то матрица $A(z)$ естественным образом разбивается на блоки:

$$A(z)=\begin{pmatrix} D_1 & D_2\\ D_3 & D_4\end{pmatrix},$$

где D_1 – матрица размера $(n_1-k_1)\times k_1$, D_2 – размера $(n_1-k_1)\times k_2$, D_3 – размера $(n_2-k_2)\times k_1$, D_4 – размера $(n_2-k_2)\times k_2$. Точки подмногообразия $RG_{k_1}^{n_1}(\mathbb{R}^{n_1})\times RG_{k_2}^{n_2}(\mathbb{R}^{n_2})$ в этой окрестности выделяются уравнениями $D_2=D_3=0$, а точки слоя трубчатой окрестности этого же подмногообразия над точкой z_0 выделяются уравнениями $D_1=D_4=0$. В этой окрестности точки z_0 группа $\mathbb{R}_+$ действует следующим образом:

$$t\circ\begin{pmatrix} D_1 & D_2\\ D_3 & D_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D_1 & D_2/t\\ tD_3 & D_4\end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Отсюда вытекает, что построенное векторное поле является полем Морса–Ботта.

Опишем поведение векторного поля s на всем пространстве $RG_k^n(\xi\times\zeta)$. Пусть $\mathscr{E}$ – главное $O(n)$-расслоение, ассоциированное с векторным расслоением $\xi\times\zeta$ над B. Нулями поля s будут подрасслоения $RG_{k_1}^{n_1}(\xi)\times RG_{k_2}^{n_2}(\zeta)$, $k_1+k_2=k$. Касательным расслоением вдоль слоев расслоения $RG_k^n(\xi\times\zeta)$ является векторное расслоение

$$\mathscr{E}\times_{O(n)}\tau(RG_k^n).$$

Пусть $\nu(RG_{k_1}^{n_1}\times RG_{k_2}^{n_2})$ – нормальное расслоение вложения $RG_{k_1}^{n_1}\times RG_{k_2}^{n_2}\subset RG_k^n$. Оно изоморфно прямой сумме векторных расслоений $\xi_{n_1-k_1}\otimes\xi_{k_2}$ и $\xi_{k_1}\otimes\xi_{n_2-k_2}$, где через ξ_k мы обозначаем k-мерное тавтологическое векторное расслоение над RG_k^n, ξ_{n-k} – $(n-k)$-мерное векторное расслоение над $RG_{k_2}^{n_2}$, дополнительное к ξ (отметим, что расслоение ξ_{n-k} изоморфно $(n-k)$-мерному тавтологическому векторному расслоению над RG_{n-k}^n). Поэтому нормальное расслоение вложения

$$RG_{k_1}^{n_1}(\xi)\times RG_{k_2}^{n_2}(\zeta)\subset RG_k^n(\xi\times\zeta)$$

есть расслоение

$$\nu=\mathscr{E}\times_{O(n)}\nu(RG_{k_1}^{n_1}\times RG_{k_2}^{n_2}),$$

и

$$\nu\cong\pi_1^*\xi(k_1)\otimes\pi_2^*\zeta(n_2-k_2)\oplus\pi_1^*\xi(n_1-k_1)\otimes\pi_2^*\zeta(k_2),$$

где через $\xi(k)$ мы обозначаем k-мерное тавтологическое векторное расслоение над $RG_k^n(\xi)$ (соответственно $\xi(n-k)$ есть $(n-k)$-мерное тавтологическое векторное расслоение над $RG_{n-k}^n(\xi)\cong RG_k^n(\xi)$), π_1, π_2 – проекции на первый и второй множители в произведении $RG_{k_1}^{n_1}(\xi)\times RG_{k_2}^{n_2}(\zeta)$.

Лемма 5.1. *Векторное поле s сопоставляет подрасслоению $RG_{k_1}^{n_1}(\xi)\times RG_{k_2}^{n_2}(\zeta)$ отображение (см. § 3)*

$$\psi_{k_1k_2}^s\colon\nu\to\nu$$

по формуле

$$\phi^s_{k_1k_2}(u,v)=(u,-v),$$

где $u\in\pi_1^*\xi(k_1)\otimes\pi_2^*\zeta(n_2-k_2)$, $v\in\pi_1^*\xi(n_1-k_1)\otimes\pi_2^*\zeta(k_2)$.

Доказательство. Достаточно проверить это утверждение на каждом слое расслоения $RG^{n_1}_{k_1}(\xi)\times RG^{n_2}_{k_2}(\zeta)$. На каждом слое этого расслоения в силу (5.1) ограничение $\phi^s_{k_1k_2}$ на слой есть симметрия относительно подрасслоения $\xi_{k_1}\otimes\xi_{n_2-k_2}$. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Следствие 5.1. *В случае* $k_2=0$ *индекс векторного поля* s *на подрасслоении нулей* $RG^n_k(\xi)\times B$ *равен* 1.

Доказательство очевидно.

Следствие 5.2. *Квадрат индекса* $\mathrm{Ind}_s\big(RG^{n_1}_{k_1}(\xi)\times RG^{n_2}_{k_2}(\zeta)\big)$ *нуля векторного поля* s *равен* 1 *для любых* k_1 *и* k_2, *где* $k_1+k_2=k$.

Доказательство. Заметим, что $(\psi^s_{k_1k_2})^2=\mathrm{id}$ для всех k_1 и k_2, где $k_1+k_2=k$. Поэтому утверждение следствия вытекает из определения умножения в кольце $\pi^0_S(\cdot)$ через композицию отображений.

Следствие 5.3. *Имеет место равенство*

$$\epsilon\big(\mathrm{Ind}_s\big(RG^{n_1}_{k_1}(\xi)\times RG^{n_2}_{k_2}(\zeta)\big)\big)=(-1)^{(n_1-k_1)k_2}.$$

Доказательство очевидно.

В заключение параграфа мы проведем вычисление индекса нуля векторного поля s в случае, когда соответствующее ему отображение ψ^s есть симметрия относительно некоторого подрасслоения. В качестве следствия мы получим явное выражение для индексов нулей поля s, построенного в этом параграфе.

В [6] рассмотрена теория кобордизмов $CO^*(\cdot)$, построенная по многообразиям, в стабильном касательном расслоении которых фиксирована структура комплексификации вещественного векторного расслоения. Любое расслоение вида $\mathbb{C}\otimes\xi$ ориентируемо в этой теории, т.е. обладает классом Тома. Для n-мерного векторного расслоения ξ канонический класс Тома расслоения $\mathbb{C}\otimes\xi$ в этой теории определяется при помощи классифицирующего отображения

$$u(\xi)\colon T(\mathbb{C}\otimes\xi)\to T(\mathbb{C}\otimes\xi_n),$$

где ξ_n – n-мерное тавтологическое векторное расслоение над $BO(n)$. Обозначим через $\bar u(\xi)$ другой класс Тома расслоения $\mathbb{C}\otimes\xi$ в этой теории, задаваемый при помощи отображения

$$\bar u(\mathbb{C}\otimes\xi)\colon T(\mathbb{C}\otimes\xi)=T(\xi\oplus\xi)\xrightarrow{(1,-1)}T(\xi\oplus\xi)=T(\mathbb{C}\otimes\xi)\xrightarrow{u(\xi)}T(\mathbb{C}\otimes\xi_n).$$

Пусть ξ – вещественное векторное расслоение над конечным клеточным комплексом B и $\xi^\perp$ – ортогональное дополнение к нему. Построим отображение

$$\rho(\xi)\colon T(\xi\oplus\xi^\perp)\xrightarrow{(-1,1)}T(\xi\oplus\xi^\perp).$$

Обозначим через σ_m изоморфизм надстройки $CO^*(B^+)\to CO^{*+m}(S^m\wedge B^+)$.

Теорема 5.1. *Для вещественного векторного расслоения ξ в кольце $CO^*(B^+)$ имеет место формула*

$$\sigma_k^{-1}\rho(\xi)^*\sigma_k(1) = u(\xi)^{-1}\bar{u}(\xi), \tag{5.2}$$

где через u^{-1} мы обозначаем обратное отображение к изоморфизму Тома в теории $CO^*(\cdot)$, индуцированного классом Тома u, здесь $k = \dim(\xi \oplus \xi^\perp)$.

Доказательство. Заметим, что отображение $\Sigma^k\big(\rho(\xi)\big)$ гомотопно отображению

$$T(\xi \oplus \xi \oplus \xi^\perp \oplus \xi^\perp) \xrightarrow{(1,-1,1,1)} T(\xi \oplus \xi \oplus \xi^\perp \oplus \xi^\perp).$$

Поэтому утверждение теоремы немедленно следует из мультипликативности класса Тома.

Элемент (5.2) кольца $CO^*(B^+)$ мы будем в дальнейшем обозначать через $\gamma(\xi)$.

Пусть F_l – связная компонента многообразия нулей поля Морса–Ботта s на многообразии F и соответствующее отображение ψ^s есть симметрия относительно некоторого подрасслоения. Пусть теперь ξ – подрасслоение, на котором ψ^s действует послойным умножением на -1.

Следствие 5.4. *Имеет место формула*

$$\big(\mathrm{Ind}_s(F_l)\big)_{CO} = \gamma(\xi).$$

В частности, для векторного поля s на грассманизации разложимого векторного расслоения, построенного выше в этом параграфе, выполняется равенство

$$\big(\mathrm{Ind}\big(RG_{k_1}^{n_1}(\xi) \times RG_{k_2}^{n_2}(\zeta)\big)\big)_{CO} = \gamma\big(\pi_1^*\big(\xi(n_1-k_1)\big) \otimes \pi_2^*\big(\zeta(k_2)\big)\big).$$

Рассмотрим формальную группу $f(u,v) = u+v+\sum_{i,j\geqslant 1}\alpha_{ij}u^iv^j$, где $\alpha_{ij} \in \Omega_U$, в комплексных кобордизмах [15]. Пусть $\bar{u} \in U^2\big(CP(\infty)\big)$ – обратный элемент для $u \in U^2\big(CP(\infty)\big)$ в этой группе, т.е. такой формальный ряд в $\Omega_U\big[[u]\big]$, что $f(u,\bar{u}) = 0$. Обозначим через $\phi(x)$ ряд такой, что $\bar{u} = u\phi(u)$, и $\phi_n(c_1,\dots,c_n)$ – ряд в кольце $U^*\big(BU(n)\big) \cong \Omega_U\big[[c_1,\dots,c_1]\big]$, задаваемый тождеством

$$\phi_n\big(\sigma_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\sigma_n(x_1,\dots,x_n)\big) = \prod_{i=1}^n \phi(x_i),$$

где σ_i – элементарные симметрические многочлены от n переменных.

Используя каноническое преобразование $\mu_U^{CO}: CO^*(\cdot) \to U^*(\cdot)$, непосредственно из теоремы 5.1 получаем

Следствие 5.5. *В кольце комплексных кобордизмов $U^*(B^+)$ имеет место формула*

$$\big(\mathrm{Ind}_s(F_l)\big)_U = \gamma_U(\xi) = \phi_n\big(c_1(\mathbb{C}\xi),\dots,c_n(\mathbb{C}\xi)\big),$$

где $\gamma_U(\xi) = \mu_U^{CO}\big(\gamma(\xi)\big)$.

Следствие 5.6. *Для одномерного вещественного векторного расслоения ξ в кольце комплексных кобордизмов $U^*(B^+)$ имеет место формула*

$$\gamma_U(\xi) = -1 - \sum_{i,j \geqslant 1} \alpha_{ij} \big(c_1(\mathbb{C}\xi)\big)^{i+j-1}.$$

Доказательство. Заметим, что $c_1(\mathbb{C}\xi) = c_1(\,\overline{\mathbb{C}\xi}\,)$. Поэтому

$$f\big(c_1(\mathbb{C}\xi), c_1(\mathbb{C}\xi)\big) = 0.$$

Отсюда следует требуемое.

§ 6. Теоремы сложения для характеристических классов Понтрягина

В этом параграфе мы применим свойство локализации трансфера для изучения характеристических классов вещественных векторных расслоений, введенных в [6]. В случае обычных целочисленных когомологий эти классы с целыми номерами совпадают с классическими характеристическими классами Понтрягина, и потому они были названы в [6] также классами Понтрягина. Построение характеристических классов [6] опирается на следующие свойства трансфера (см. [3], [8]).

Пусть (E_i, F_i, B_i, p), $i = 1, 2$, – расслоения, слои которых являются гладкими компактными замкнутыми многообразиями.

Свойство 6.1 (функториальность). *Если*

$$\psi\colon (E_1, F_1, B_1, p) \to (E_2, F_2, B_2, p)$$

– отображение расслоений, то $\tau(p_2) \circ \psi \sim \psi \circ \tau(p_1)$.

Свойство 6.2 (мультипликативность). *Если*

$$(E, F, B, p) = (E_1 \times E_2, F_1 \times F_2, B_1 \times B_2, p_1 \times p_2),$$

то $\tau(p_1) \wedge \tau(p_2) \sim \tau(p_1 \times p_2)$.

Пусть ξ – вещественное n-мерное векторное расслоение над конечным клеточным комплексом B (без ограничения общности можно считать, что B – гладкое многообразие). Для данного k, $1 \leqslant k \leqslant n$, рассмотрим грассманизацию векторного расслоения ξ, т.е. расслоение

$$\big(RG_k^n(\xi), RG_k^n, B, p_k\big).$$

Пусть $\tau(p_k)$ – трансфер этого расслоения. Обозначим через $\xi(k)$ тавтологическое векторное расслоение над $RG_k^n(\xi)$ и через f_k – классифицирующее его отображение $\xi(k) = f_k^* \xi_k$, где ξ_k – тавтологическое расслоение над $BO(k)$. Пусть

$$s_0\colon BO(k) \to T(\mathbb{C} \otimes \xi_k)$$

– вложение на нулевое сечение.

Определение 6.1. Полуцелый класс Понтрягина $p_{k/2}(\xi)$ в теории CO^* равен

$$p_{k/2}(\xi) = \tau(p_k)^* f^* \chi(\mathbb{C} \otimes \xi_k) = \tau(p_k)^* f^* [s_0], \tag{6.1}$$

где $\chi(\mathbb{C} \otimes \zeta)$ – эйлеров класс расслоения $\mathbb{C} \otimes \zeta$ в теории CO^* (см. [6]). Положим $p_{k/2}(\xi) = 0$ при $k > n$.

Как следует из свойства трансфера 6.1, формула (6.1) задает характеристические классы вещественных векторных расслоений.

Теорема 6.1. *Пусть ξ и ζ – вещественные векторные расслоения* ($\dim \xi = n_1$, $\dim \zeta = n_2$, $n_1 + n_2 = n$). *Тогда для любого k имеет место формула*

$$\begin{aligned} p_{k/2}(\xi \times \zeta) = \sum_{k_1+k_2=k} & \tau(p_{k_1k_2})^* \bigl(\gamma\bigl(\pi_1^*\xi(n_1 - k_1) \otimes \pi_2^*\zeta(k_2)\bigr) \\ & \times \chi\bigl(\mathbb{C} \otimes \xi(k_1)\bigr)\chi\bigl(\mathbb{C} \otimes \zeta(k_2)\bigr)\bigr), \end{aligned}$$

где $\tau(p_{k_1k_2})$ – трансфер расслоения $RG_{k_1}^{n_1}(\xi) \times RG_{k_2}^{n_2}(\zeta)$, π_1 и π_2 – проекции на первый и второй сомножитель в произведении $RG_{k_1}^{n_1}(\xi) \times RG_{k_2}^{n_2}(\zeta)$.

Доказательство. Применим к векторному полю s на $RG_k^n(\xi \times \zeta)$, построенному в § 5, свойство локализации трансфера в форме теоремы 4.2. В силу следствия 5.4 получаем

$$\begin{aligned} \tau(p_k)^* \chi\bigl(\mathbb{C} \otimes \eta(k)\bigr) = \sum_{k_1+k_2=k} & \tau(p_{k_1k_2})^* \bigl(\gamma\bigl(\pi_1^*\xi(n_1 - k_1) \otimes \pi_2^*\zeta(k_2)\bigr) \\ & \times \chi\bigl(\mathbb{C} \otimes \xi(k_1)\bigr)\chi\bigl(\mathbb{C} \otimes \zeta(k_2)\bigr)\bigr), \end{aligned} \tag{6.2}$$

где через $\eta(k)$ мы обозначили k-мерное тавтологическое векторное расслоение над $RG_k^n(\xi \times \zeta)$. Остается заметить, что левая часть (6.2) по определению равна $p_{k/2}(\xi \times \zeta)$.

Покажем, как из теоремы 6.1 может быть получена формула сложения для классов Понтрягина по модулю элементов 2-примарного порядка.

Теорема 6.2. *Пусть ξ и ζ – вещественные векторные расслоения над конечной клеточной базой B* ($\dim \xi = n_1$, $\dim \zeta = n_2$, $n_1 + n_2 = n$). *Для любого k имеет место формула*

$$p_{k/2}(\xi \oplus \zeta) = \sum_{k_1+k_2=k} (-1)^{(n_1-k_1)k_2} p_{k_1/2}(\xi) p_{k_2/2}(\zeta) \pmod{(2\,\mathrm{Tors})}.$$

Доказательство. В силу функториальности классов Понтрягина достаточно доказать утверждение теоремы для расслоения $\pi_1^*(\xi) \oplus \pi_2^*(\zeta)$ над $B \times B$, где π_1 и π_2 – проекции на первый и второй сомножители в произведении $B \times B$. Заметим также, что

$$\pi_1^*(\xi) \oplus \pi_2^*(\zeta) \cong \xi \times \zeta.$$

Положим

$$\alpha = \bigl(\mathrm{Ind}_s\bigl(RG_{k_1}^{n_1}(\xi) \times RG_{k_2}^{n_2}(\zeta)\bigr)\bigr)_{CO}.$$

В силу следствия 5.2 $\alpha^2 = 1$. Имеем $\alpha = \pm 1 + u$, где $u \in \widetilde{CO^0}\big(RG^{n_1}_{k_1}(\xi) \times RG^{n_2}_{k_2}(\zeta)^+\big)$. Поскольку мы работаем в категории конечных клеточных комплексов, элемент u нильпотентен. Соотношение $\alpha^2 = 1$ влечет равенство $\pm 2u + u^2 = 0$. Отсюда и из нильпотентности u заключаем, что элемент u 2-примарен, т.е. $u \in 2\,\mathrm{Tors}$. Поэтому $\alpha = \pm 1 \pmod{(2\,\mathrm{Tors})}$. В силу следствия 5.3

$$\alpha \equiv (-1)^{(n_1-k_1)k_2} \pmod{(2\,\mathrm{Tors})}. \tag{6.3}$$

Обозначим через $\eta(k)$ k-мерное тавтологическое векторное расслоение над $RG^n_k(\xi\times\zeta)$. Из формулы (6.2), учитывая (6.3), получаем

$$\begin{aligned}\tau(p_k)^*\chi\big(\mathbb{C}\otimes\eta(k)\big) &= \\ = \sum_{k_1+k_2=k} (-1)^{(n_1-k_1)k_2}\,&\tau(p_{k_1k_2})^*\big(\chi(\mathbb{C}\otimes\xi_{k_1})\times\chi(\mathbb{C}\otimes\zeta_{k_2})\big) \pmod{(2\,\mathrm{Tors})}.\end{aligned} \tag{6.4}$$

Из свойства мультипликативности трансфера 6.2 вытекает, что

$$\begin{aligned}\tau(p_{k_1}\times p_{k_2})^*&\big(\chi\big(\mathbb{C}\otimes\xi(k_1)\big)\times\chi\big(\mathbb{C}\otimes\zeta(k_2)\big)\big)\\ &= \tau(p_{k_1})^*\chi\big(\mathbb{C}\otimes\xi(k_1)\big)\tau(p_{k_2})^*\chi\big(\mathbb{C}\otimes\zeta(k_2)\big).\end{aligned} \tag{6.5}$$

Объединяя (6.4) и (6.5), получаем требуемую формулу:

$$p_{k/2}(\xi\times\zeta) = \sum_{k_1+k_2=k}(-1)^{(n_1-k_1)k_2}p_{k_1/2}(\xi)\times p_{k_2/2}(\zeta) \pmod{(2\,\mathrm{Tors})}.$$

Теорема 6.3. *Полуцелые классы Понтрягина стабильны*:

$$p_{k/2}(\xi\oplus 1) = p_{k/2}(\xi) = p_{k/2}(1\oplus\xi).$$

Доказательство. Применим свойство локализации трансфера к расслоению $RG^{n+1}_k(\xi\oplus 1)$ $(\dim\xi = n)$. Используя следствием 5.1, получим, что для любого элемента $x \in CO^*\big(RG^{n+1}_k(\xi\oplus 1)^+\big)$ и некоторого элемента $\alpha \in CO^0\big(RG^{n+1}_k(\xi\oplus 1)^+\big)$ имеет место разложение

$$\tau(p)^*x = \tau(p_1)^*i_1^*x + \tau(p_2)^*\alpha i_2^*x,$$

где $\tau(p_1)$ – трансфер расслоения $\big(RG^n_k(\xi), RG^n_k, B, p_1\big)$ и $\tau(p_2)$ – трансфер расслоения $\big(RG^n_{k-1}(\xi), RG^n_{k-1}, B, p_2\big)$, остальные отображения определены в свойстве локализации.

Поскольку при вложении $RG^n_{k-1}(\xi)\subset RG^{n+1}_k(\xi\oplus 1)$ тавтологическое векторное расслоение $\xi(k)$ над $RG^{n+1}_k(\xi\oplus 1)$ переходит в сумму $\xi(k-1)\oplus 1$, где $\xi(k-1)$ – тавтологическое векторное расслоение над $RG^n_{k-1}(\xi)$, то

$$\begin{aligned}\tau(p)^*\chi\big(\mathbb{C}\otimes\xi(k)\big) &= \tau(p_1)^*\chi\big(\mathbb{C}\otimes\xi(k)\big) + \tau(p_2)^*\alpha\chi\big(\mathbb{C}\otimes\big(\xi(k-1)\oplus 1\big)\big)\\ &= \tau(p_1)^*\chi\big(\mathbb{C}\otimes\xi(k)\big).\end{aligned}$$

Отсюда получаем первое равенство теоремы.

Для доказательства второго равенства необходимо векторное поле из § 5 умножить на -1 и провести аналогичные рассуждения.

Следствие 6.1. *При нечетных k полуцелый класс Понтрягина $p_{k/2}(\xi)$ 2-примарен.*

Доказательство. В силу теоремы 6.2

$$p_{k/2}(1 \oplus \xi) = (-1)^k p_{k/2}(\xi) \pmod{2\,\mathrm{Tors}},$$

а в силу теоремы 6.3

$$p_{k/2}(1 \oplus \xi) = p_{k/2}(\xi).$$

При нечетных k эти равенства совместны, если $p_{k/2}(\xi) \in 2\,\mathrm{Tors}$.

Следствие 6.2. *Для любых двух вещественных векторных расслоений ξ и ζ выполняется соотношение* [6]

$$p_{2k/2}(\xi \oplus \zeta) = \sum_{k_1+k_2=k} p_{2k_1/2}(\xi) p_{2k_2/2}(\zeta) \pmod{2\,\mathrm{Tors}}.$$

Теорема 6.4. *Для образа характеристических классов Понтрягина в комплексных кобордизмах существует формула, выражающая полуцелые классы Понтрягина суммы двух вещественных векторных расслоений через характеристические классы слагаемых.*

Доказательство. В силу разложения (6.2) достаточно показать, что $\big(\mathrm{Ind}_s\big(RG^{n_1}_{k_1}(\xi) \times RG^{n_2}_{k_2}(\zeta)\big)\big)_U$ может быть представлен в виде полинома от характеристических классов векторных расслоений $\xi(k_1)$ и $\zeta(k_2)$ с коэффициентами в $p_1^*\big(U^*(B)\big) \otimes p_2^*\big(U^*(B)\big)$, где p_1 и p_2 – проекции в расслоениях $RG^{n_1}_{k_1}(\xi)$ и $RG^{n_2}_{k_2}(\zeta)$ соответственно. В силу леммы 5.1 и следствия 5.5 в комплексных кобордизмах имеет место равенство

$$\big(\mathrm{Ind}_s\big(RG^{n_1}_{k_1}(\xi) \times RG^{n_2}_{k_2}(\zeta)\big)\big)_U = \phi_{(n_1-k_1)k_2}\big(c_1(\eta), \dots, c_{(n_1-k_1)k_2}(\eta)\big),$$

где $\eta \cong \mathbb{C} \otimes \big(\xi(n_1-k_1) \otimes \zeta(k_2)\big)$. Используя принцип расщепления для комплексных векторных расслоений и формулу для формальной группы

$$f\big(c_1(\eta_1), c_1(\eta_2)\big) = c_1(\eta_1 \otimes \eta_2),$$

получаем выражение классов $c_i(\eta)$ через характеристические классы векторных расслоений $\mathbb{C} \otimes \xi(n_1 - k_1)$ и $\mathbb{C} \otimes \zeta(k_2)$. Остается заметить, что $\xi(n_1 - k_1) \oplus \xi(k_1) \cong p_1^*\xi$.

Замечание 6.1. Полуцелые классы Понтрягина $p_{k/2}(\xi)$ с нечетными номерами k могут иметь любой 2-примарный порядок. Пусть, например, ξ_1 – одномерное тавтологическое векторное расслоение над RP^{2n+1}. Обозначим через $\mu_K^{CO} : CO^*(\cdot) \to K^*(\cdot)$ естественное преобразование теорий когомологий. Порядок элемента $\mu_K^{CO}\big(p_{1/2}(\xi_1)\big) \in K^*(RP^{2n+1})$ равен 2^n.

В заключение параграфа рассмотрим более детально теорему сложения для первого полуцелого класса Понтрягина (см. [9]).

Пусть ξ и ζ – векторные расслоения над конечной клеточной базой B. Пусть $\tau(p)$ – трансфер расслоения $RP(\xi \oplus \zeta)$, $\tau(p_1)$ – трансфер расслоения $RP(\xi)$, $\tau(p_2)$ – трансфер расслоения $RP(\zeta)$. Обозначим через i_1 вложение $RP(\xi) \subset RP(\xi \oplus \zeta)$, через i_2 – вложение $RP(\zeta) \subset RP(\xi \oplus \zeta)$.

Теорема 6.5. *Для любого $x \in U^*\big(RP(\xi\oplus\zeta)\big)$ имеет место формула*

$$\tau(p)^*(x) = \tau(p_1)^* i_1^*(x) + \tau(p_2)^*\big(\gamma_U\left(p_2^*\xi\otimes\zeta(1)\right) i_2^*(x)\big).$$

Доказательство. Утверждение теоремы немедленно следует из теоремы 4.2 и следствий 5.1 и 5.4.

Следствие 6.3. *Для любых двух одномерных вещественных векторных расслоений ξ и ζ над конечной клеточной базой имеет место равенство*

$$p_{1/2}(\xi\oplus\zeta) = u - v - \sum_{i,j\geqslant 1}\alpha_{ij} f(u,v)^{i+j-1} v,$$

где $u = p_{1/2}(\xi)$, $v = p_{1/2}(\zeta)$.

Доказательство. Для одномерного векторного расслоения ξ имеем $p_{1/2}(\xi) = c_1(\mathbb{C}\otimes\xi)$. Поэтому требуемое утверждение вытекает из явного вида $\gamma_U(\xi\otimes\zeta)$ (см. следствие 5.6).

Положим $[u]_2 = ua(u)$, где $a(u) = 2 + \sum_{i,j\geqslant 1}\alpha_{ij}u^{i+j-1}$. Тогда результат следствия 6.3 можно переписать в виде

$$p_{1/2}(\xi\oplus\zeta) = u + v - a\big(f(u,v)\big)v.$$

Далее введем следующие симметричные по u и v ряды:

$$\delta(u,v) = \frac{a(u)-a(v)}{u-v},\qquad d(u,v) = \frac{va(u)-ua(v)}{u-v}.$$

Запишем ряд $\alpha(u) = 1 + \sum_{i\geqslant 1}\alpha_{i1}u^i$ в виде

$$\alpha(u) = \alpha_0(u^2) + u\alpha_1(u^2).$$

Теорема 6.6. *Для любых двух вещественных одномерных векторных расслоений ξ и ζ имеет место равенство*

$$p_{1/2}(\xi\oplus\zeta) = u + v - uv\big[\alpha_0(uv)\delta(u,v) + \alpha_1(uv)d(u,v)\big],$$

где $u = p_{1/2}(\xi)$ и $v = p_{1/2}(\zeta)$.

Доказательство. Положим

$$\Phi(u,v) = 1 + \sum_{i,j\geqslant 1}\alpha_{ij}u^i\left(\frac{v^j-\bar u^j}{v-\bar u}\right)\in\Omega_U\big[[u,v]\big],$$

где $\bar u$: $f(u,\bar u) = 0$. Тогда

$$f(u,v) = f(u,v) - f(u,\bar u) = (v-\bar u)\Phi(u,v).$$

Имеем

$$f\big([u]_2,[v]_2\big) = \big[f(u,v)\big]_2 = f(u,v)a\big(f(u,v)\big).$$

Следовательно,
$$\big([v]_2 - [\bar u]_2\big)\Phi\big([u]_2, [v]_2\big) = (v - \bar u)\Phi(u, v)a\big(f(u, v)\big).$$
Таким образом, в кольце $\Omega_U\big[[u, v]\big]$ имеет место тождество
$$\Phi(u, v)a\big(f(u, v)\big)v = \left([v]_2 + \bar u v\frac{a(v) - a(\bar u)}{v - \bar u}\right)\Phi\big([u]_2, [v]_2\big).$$

При доказательстве теоремы 6.6 достаточно считать, что ξ и ζ – одномерные тавтологические векторные расслоения над $RP(\infty)$. Поэтому далее все вычисления мы будем проводить в факторкольце
$$A = \Omega_U\big[[u, v]\big]/\big([u]_2, [v]_2\big).$$
Из тождества $[u]_2 = (u - \bar u)\Phi(u, u)$ в $\Omega_U\big[[u]\big]$ немедленно следует, что в этом факторкольце $u = \bar u$ и $v = \bar v$. Используя соотношения $[u]_2 = 0$ и $u = \bar u$, мы получаем следующее тождество в A:
$$\Phi(u, v)a\big(f(u, v)\big)v = uv\,\delta(u, v),$$
из которого непосредственно следует, что в A имеет место соотношение
$$a\big(f(u, v)\big)v = a\big(f(u, v)\big)u.$$

Теперь, используя приведенный выше явный вид ряда $\Phi(u, v)$, получаем, что в кольце A выполняется тождество
$$a\big(f(u, v)\big)\Phi(u, v) = a\big(f(u, v)\big)\frac{\partial}{\partial v}f(u, v).$$

Лемма 6.1. *В кольце* $\Omega_U\big[[u, v]\big]$ *имеет место формула*
$$\frac{\partial}{\partial v}f(u, v) = \frac{CP(v)}{CP\big(f(u, v)\big)},$$
где $CP(v) = dg(v)/dv = 1 + \sum_{n\geqslant 1}\big[CP(n)\big]v^n$ *и* $g(v)$ *– логарифм группы* $f(u, v)$.

Доказательство. В кольце $\Omega_U \otimes Q\big[[u, v]\big]$ для ряда $f(u, v)$ имеет место выражение
$$f(u, v) = g^{-1}\big(g(u) + g(v)\big).$$
Так как
$$\frac{dg^{-1}(x)}{dx}\cdot\frac{dg\big(g^{-1}(x)\big)}{dg^{-1}(x)} = 1,$$
получаем, что
$$\frac{\partial}{\partial v}f(u, v) = \frac{\partial g^{-1}\big(g(u) + g(v)\big)}{\partial g(v)}\frac{\partial g(v)}{\partial v} = \frac{CP(v)}{CP\big(f(u, v)\big)}.$$

Возвращаясь к кольцу A, получаем
$$a\big(f(u, v)\big)\frac{\partial}{\partial v}f(u, v) = a\big(f(u, v)\big)\frac{CP(v)}{CP\big(f(u, v)\big)} = a\big(f(u, v)\big)CP(v).$$
Напомним, что
$$\frac{1}{CP(v)} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}\bigg|_{u=0} = 1 + \sum_{i\geqslant 1}\alpha_{i1}v^i = \alpha(v).$$
Следовательно,
$$uv\,\delta(u, v)\alpha(v) = \alpha(v)\Phi(u, v)a\big(f(u, v)\big)v = a\big(f(u, v)\big)v.$$

Лемма 6.2. *В кольце A имеют место соотношения*:

$$uv\,\delta(u,v)v = uv\,d(u,v),$$
$$uv\,\delta(u,v)v^2 = uv\,\delta(u,v)uv.$$

Доказательство. Первое равенство вытекает из соотношения

$$\begin{aligned} uv\frac{a(v)-a(u)}{v-u}v &= uv\frac{va(v)-va(u)+ua(v)-ua(v)}{v-u} \\ &= uv\frac{ua(v)-va(u)+(v-u)a(v)}{v-u} = uv\frac{ua(v)-va(u)}{v-u} = uv\,d(u,v). \end{aligned}$$

Второе равенство следует из соотношения $a\big(f(u,v)\big)v = a\big(f(u,v)\big)u$:

$$uv\,\delta(u,v)v^2 = \Phi(u,v)a\big(f(u,v)\big)v^3 = \Phi(u,v)a\big(f(u,v)\big)vuv = uv\,\delta(u,v).$$

Применяя соотношения из леммы 6.2, получаем

$$\begin{aligned} uv\,\delta(u,v)\alpha(v) &= uv\,\delta(u,v)\big(\alpha_0(v^2)+v\alpha_1(v^2)\big) \\ &= uv\big(\alpha_0(uv)\delta(u,v)+\alpha_1(uv)\delta(u,v)v\big) = uv\big(\alpha_0(uv)\delta(u,v)+\alpha_1(uv)d(u,v)\big), \end{aligned}$$

что завершает доказательство теоремы 6.6.

Эта теорема дает явный вид симметричного по u и v формального ряда

$$b(u,v) = u+v+\sum_{i,j\geqslant 1}\beta_{ij}u^iv^j$$

такого, что для любых двух одномерных вещественных векторных расслоений ξ и ζ над X имеет место формула

$$p_{1/2}(\xi\oplus\zeta) = b(u,v)\in U^2(X),$$

где $u = p_{1/2}(\xi)$ и $v = p_{1/2}(\zeta)$.

Теорема 6.7 (формула сложения для первого полуцелого класса Понтрягина). *Для любых двух вещественных векторных расслоений ξ и ζ*

$$p_{1/2}(\xi\oplus\zeta) = u+v+\sum_{k,l\geqslant 1}\beta_{kl}s_{k-1}(u)s_{l-1}(v),$$

где $u = p_{1/2}(\xi)$, $v = p_{1/2}(\zeta)$, s_k – операции Ландвебера–Новикова в комплексных кобордизмах [15].

Доказательство. Из теоремы о локализации трансфера вытекает,что

$$p_{1/2}(\xi\oplus\zeta)=p_{1/2}(\xi)+\tau(p)^*\big(\gamma_U\big(p^*(\xi)\otimes\zeta(1)\big)\cdot w\big),$$

где $\tau(p)$ – трансфер расслоения $RP(\zeta)$, $w=\chi\big(\mathbb{C}\otimes\zeta(1)\big)$. Предположим сначала, что $\dim\xi=1$. Имеем

$$p_{1/2}(\xi\oplus\zeta)=u+\tau(p)^*\big(\gamma_U\big(p^*\xi\otimes\zeta(1)\big)w\big), \tag{6.6}$$

$$p_{1/2}(\zeta\oplus\xi)=v+\gamma_U(\zeta\otimes\xi)u, \tag{6.7}$$

где $u=p_{1/2}(\xi)$, $v=p_{1/2}(\zeta)$.

Заметим, что в силу следствия 5.6

$$\begin{aligned}\tau(p)^*\big(\gamma_U\big(p^*\xi\otimes\zeta(1)\big)w\big)&=-\tau(p)^*\left(w+\sum_{i,j\geqslant1}\alpha_{ij}f(p^*u,w)^{i+j-1}w\right)\\&=\tau(p)^*\big(p_{1/2}\big(p^*\xi\oplus\zeta(1)\big)-p_{1/2}(p^*\xi)\big).\end{aligned} \tag{6.8}$$

Операции Ландвебера–Новикова суть стабильные когомологические операции, поэтому они коммутируют с отображением $\tau(p)^*$. В силу теоремы 6.6 получаем, что выражение (6.8) равно

$$\tau(p)^*\left(w+\sum_{k,l\geqslant1}\beta_{kl}(p^*u)^kw^l\right)=v+\sum_{k,l\geqslant1}\beta_{kl}u^ks_{l-1}(v).$$

Приравнивая теперь (6.6) и (6.7), получаем

$$\gamma_U(\zeta\otimes\xi^*)\cdot u=u+\sum_{k,l\geqslant1}\beta_{kl}u^ls_{k-1}(v).$$

Рассмотрим случай произвольного ξ. Имеем

$$\begin{aligned}p_{1/2}(\xi\oplus\zeta)&=u+\tau(p)^*\big(\gamma_U\big(p^*(\xi)\otimes\zeta(1)^*\big)w\big)\\&=u+\tau(p)^*\left(w+\sum_{k,l\geqslant1}\beta_{kl}w^lp^*s_{k-1}(u)\right)=u+v+\sum_{k,l\geqslant1}\beta_{kl}s_{l-1}(v)s_{k-1}(u).\end{aligned}$$

Это завершает доказательство.

Теорема 6.8. *Характеристический класс $p_{1/2}$ задает отображение*

$$p_{1/2}\colon KO(X)\to U^2(X),$$

на образе которого имеется ассоциативная операция сложения

$$x\oplus y=x+y+\sum_{k,l\geqslant1}\beta_{kl}s_{l-1}(y)s_{k-1}(x).$$

Обратим внимание, что эта операция не сводится ни к какой формальной группе.

§ 7. Характеристические классы Понтрягина комплексных векторных расслоений

Теорема 7.1. *Пусть η – n-мерное комплексное векторное расслоение. Трансфер $\tau(p)$ расслоения $RG^{2n}_{2k+1}(\eta)$ гомотопен отображению в точку. Трансферы $\tau(p_1)$ и $\tau(p_2)$ расслоений $RG^{2n}_{2k}(\eta)$ и $CG^n_k(\eta)$ связаны соотношением*

$$\tau(p_1) \sim i \circ \tau(p_2),$$

где $i\colon CG^n_k(\eta) \to RG^{2n}_{2k}(\eta)$ – каноническое вложение.

Доказательство. Рассмотрим расслоение $RG^{2n}_k(\eta) \xrightarrow{RG^{2n}_k} B$. На пространстве этого расслоения действует группа $U(1) = S^1$. Это действие индуцировано комплексной структурой в векторном расслоении η. Неподвижными точками этого действия будут такие плоскости α, что для любого вектора $v \in \alpha$ вектор iv принадлежит α. Поскольку векторы v и iv линейно независимы над полем действительных чисел, неподвижные точки возникнут только в том случае, когда k четно. Применяя свойство локализации к векторному полю, соответствующему этому действию, получим, что трансфер $\tau(p)$ расслоения $RG^{2n}_{2k+1}(\eta)$ гомотопен отображению в точку (см. замечание 3.4). В случае четного k неподвижными точками действия будут плоскости, которые являются овеществлением $(k/2)$-мерных комплексных подпространств расслоения η. Применяя свойство локализации, получим, что $\tau(p_1) \sim i \circ \tau(p_2)$.

Следствие 7.1. *Если расслоение η стабильно изоморфно комплексному векторному расслоению, то $p_{(2k+1)/2}(\eta) = 0$.*

Доказательство. Пусть расслоение $\eta \oplus [N]$ допускает структуру комплексного векторного расслоения; тогда

$$p_{(2k+1)/2}(\eta) = p_{(2k+1)/2}(\eta \oplus [N]) = 0.$$

Для теории комплексных самосопряженных кобордизмов $SC^*(\cdot)$ имеют место естественные преобразования теорий когомологий

$$\mu^{CO}_{SC}\colon CO^*(\cdot) \to SC^*(\cdot) \quad \text{и} \quad \mu^{Sp}_{SC}\colon Sp^*(\cdot) \to SC^*(\cdot),$$

где $Sp^*(\cdot)$ – теория симплектических кобордизмов (см. [6]).

Следствие 7.2. *Если векторное расслоение η стабильно эквивалентно комплексному векторному расслоению, то образ $p_{2k/2}(\eta)$ в $SC^*(B)$ при преобразовании μ^{CO}_{Sp} лежит в $\operatorname{Im} \mu^{Sp}_{SC}(Sp^*(B)) \subset SC^*(B)$.*

Доказательство. Поскольку классы Понтрягина стабильны, без ограничения общности можно считать, что само расслоение η допускает комплексную структуру. Пусть $\tau(p_1)$ – трансфер расслоения $RG^{2n}_{2k}(\eta)$ и $\tau(p_2)$ – трансфер расслоения $CG^n_k(\eta)$. Обозначим через $i\colon CG^n_k \to RG^{2n}_{2k}$ каноническое вложение. Из теоремы 7.1 получаем

$$\begin{aligned}
\mu^{CO}_{SC}\bigl(p_{2k/2}(\eta)\bigr) &= \mu^{CO}_{SC}\tau(p_1)^*\chi\bigl(\mathbb{C}\otimes\xi(2k)\bigr)\\
&= \mu^{CO}_{SC}\tau(p_2)^* i^*\chi\bigl(\mathbb{C}\otimes\xi(2k)\bigr) = \mu^{CO}_{SC}\tau(p_2)^*\chi\bigl(\mathbb{C}\otimes\eta(k)\bigr)\\
&= \tau(p_2)^*\mu^{CO}_{SC}\chi\bigl(\mathbb{C}\otimes\eta(k)\bigr) = \tau(p_2)^*\chi\bigl(\eta(k)\oplus\overline{\eta(k)}\bigr),
\end{aligned} \tag{7.1}$$

где $\xi(2k)$ – $2k$-мерное тавтологическое векторное расслоение над $RG^{2n}_{2k}(\eta)$ и $\eta(k)$ – k-мерное тавтологическое векторное расслоение над $CG^{n}_{k}(\eta)$. Заметим, что для любого комплексного векторного расслоения η расслоение $\eta \oplus \bar{\eta}$ наделено канонической симплектической структурой. Следовательно, правая часть (7.1) лежит $\operatorname{Im}\mu^{Sp}_{SC}(Sp^*(B))$.

Список литературы

1. *Atiyah M. F.* Characters and cohomology of finite groups // Publ. Math. I.H.E.S. 1961. № 9. P. 23–64.
2. *Becker J. C.* Characteristic classes and K-theory // Lecture Notes in Mathematics. V. 428. Springer-Verlag, 1974. P. 132–143.
3. *Becker J. C., Gottlieb D. H.* The transfer map and fiber bundles // Topology. 1975. V. 14. № 1. P. 1–12.
4. *Bressler P., Evens S.* The Shubert calculas, braid relations, and generalized cohomology // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. V. 317. P. 799–811.
5. *Brumfiel G., Madsen I.* Evaluation of the transfer and the universal surgery classes // Inventiones math. 1976. V. 32. P. 133–169.
6. *Бухштабер В. М.* Топологические приложения теории двузначных формальных групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. № 1. С. 130–184.
7. *Бухштабер В. М.* Характеристические классы в кобордизмах и приложения теории однозначных и двузначных групп // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 10. М.: ВИНИТИ, 1978. С. 5–178.
8. *Бухштабер В. М.* Трансфер Беккера–Готтлиба. Прилож. 3 в книге: Снэйт В. Алгебраический кобордизм и K-теория. М.: Мир, 1983.
9. *Бухштабер В. М., Фельдман К. Э.* Формула сложения для первого полуцелого класса Понтрягина в комплексных кобордизмах // УМН. 1997. Т. 52. № 6. С. 151–152.
10. *Dold A.* The fixed point index of fibre-preserving maps // Inventiones math. 1974. V. 25. P. 281–297.
11. *Feshbach M.* The transfer and compact Lie groups // Trans. of the Am. Math. Soc. 1979. V. 251. P. 139–169.
12. *Fulton W., MacPherson R.* Characteristic classes of direct image bundles for covering maps // Annals of Mathematics. 1987. V. 125. P. 1–92.
13. *Милнор Дж., Сташеф Дж.* Характеристические классы. М.: Мир, 1979.
14. *Милнор Дж., Уоллес А.* Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир, 1972.
15. *Новиков С. П.* Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. № 4. С. 885–951.
16. *Постников М. М.* Введение в теорию Морса. М.: Наука, 1971.
17. *Снэйт В.* Алгебраический кобордизм и K-теория. М.: Мир, 1983.
18. *Verona A.* Triangulation of stratified fibre bundles // Manu. Math. 1979/80. V. 30. P. 425–445.
19. *Уайтхед Дж.* Новейшие достижения в теории гомотопий. М.: Мир, 1974.
20. *Witten E.* Suppersymmetry and Morse theory // J. Differential Geometry. 1982. V. 17. P. 661–692.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступило в редакцию
29.I.1999