ПРИЛОЖЕНИЯ ФРОБЕНИУСОВЫХ n-ГОМОМОРФИЗМОВ

В. М. Бухштабер, Э. Г. Рис

Для каждого линейного отображения алгебр $f\colon A\to B$ определено полилинейное отображение $\Phi_k(f)\colon A^k\to B$ при помощи рекурсии Фробениуса ($\Phi_1=f$):

$$\Phi_k(f)(a_1,\dots,a_k)=\Phi_1(a_1)\Phi_{k-1}(f)(a_2,\dots,a_k)-\sum_{j=2}^{k}\Phi_{k-1}(f)(a_2,\dots,a_1a_j,\dots,a_k).$$

Определение [1]. Пусть A и B – алгебры с единицей. Отображение f называется фробениусовым n-гомоморфизмом, если $f(1)=n$ и $\Phi_{n+1}(f)\equiv 0$.

Результаты настоящей работы опираются на следующий наш результат [2]: *линейное отображение $f\colon \mathbb{C}[u_1,\dots,u_m]\to\mathbb{C}$ является фробениусовым n-гомоморфизмом тогда и только тогда, когда существует такой набор точек $X=[\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n]$ из $\mathbb{C}^m$, что $f(p)=p(\mathbf{x}_1)+\dots+p(\mathbf{x}_n)$.*

1. Для данных m и n рассмотрим отображение $g\colon\mathbb{C}^m\to\operatorname{Sym}^n(\mathbb{C})$. Пусть $s_k\colon\operatorname{Sym}^n(\mathbb{C})\to\mathbb{C}$ – отображение, заданное k-м полиномом Ньютона $s_k[b_1,b_2,\dots,b_n]=b_1^k+b_2^k+\dots+b_n^k$. Обозначим через $\mathcal{N}_m$ полурешетку $\mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$. Для $\omega=(i_1,i_2,\dots,i_m)\in\mathcal{N}_m$ положим $\mathbf{z}^\omega=z_1^{i_1}z_2^{i_2}\cdots z_m^{i_m}$ и $|\omega|=i_1+i_2+\dots+i_m$.

Свойство 1. Композиция $s_k\circ g\colon\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}$ является формой $\sum_{|\omega|=k}\alpha_\omega\mathbf{z}^\omega$ степени k для всех $k=1,2,\dots$.

Таким образом, если g обладает свойством 1, то формула $\Phi(\omega)=\alpha_\omega$ определяет отображение $\Phi\colon\mathcal{N}_m\to\mathbb{C}$.

Для $\omega=0$ положим $\Phi(0)=n$, и, задавая $\Phi_1=\Phi$, введем отображения $\Phi_\ell\colon\mathcal{N}_m^\ell\to\mathbb{C}$ для $\ell>1$ при помощи следующей рекуррентной формулы:

$$\Phi_\ell(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_\ell)=\Phi_1(\omega_1)\Phi_{\ell-1}(\omega_2,\dots,\omega_\ell)-\sum_{j=2}^{\ell}\Phi_{\ell-1}(\omega_2,\dots,\omega_1+\omega_j,\dots,\omega_\ell).$$

Свойство 2. Последовательность $\{\Phi_\ell\}$, соответствующая g, обрывается на $(n+1)$-м шаге, т.е. $\Phi_{n+1}(\omega_1,\dots,\omega_{n+1})\equiv 0$.

2. Пусть $X=[\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n]$ – набор точек из $\mathbb{C}^m$.
Введем отображение $f_X\colon\mathbb{C}^m\to\operatorname{Sym}^n(\mathbb{C})$ по формуле

$$f_X(\mathbf{z})=\bigl[\langle\mathbf{z},\mathbf{x}_1\rangle,\dots,\langle\mathbf{z},\mathbf{x}_n\rangle\bigr].$$

Теорема 1. *Отображение g имеет вид f_X для некоторого набора X тогда и только тогда, когда g обладает свойствами* 1 *и* 2.

Этот результат дает нетривиальное обобщение "аналога теоремы Пэли–Винера для комплексного преобразования Радона" (в терминологии [3]) на случай конечных мер.

3. Пусть

$$A(t,\mathbf{z})=t^n-a_1(\mathbf{z})t^{n-1}+\dots+(-1)^n a_n(\mathbf{z}),$$

где $a_k(\mathbf{z})$ – формы степени k. Корни $[t_1,\dots,t_n]$ уравнения $A(t,\mathbf{z})=0$ определяют отображение $f_A\colon\mathbb{C}^m\to\operatorname{Sym}^n(\mathbb{C})$.

Следствие 1. *Отображение f_A имеет вид f_X, т.е. $[t_1,\dots,t_n]=[\langle\mathbf{z},\mathbf{x}_1\rangle,\dots,\langle\mathbf{z},\mathbf{x}_n\rangle]$ и, следовательно, $A(t,\mathbf{z})=\prod_{i=1}^n(t-\langle\mathbf{z},\mathbf{x}_i\rangle)$, тогда и только тогда, когда f_A обладает свойством* 2.

Таким образом, получен алгоритм проверки на разложимость полинома $A(t,\mathbf{z})$ в произведение линейных множителей. Из соотношения

$$\frac{d}{dt}\log A(t,\mathbf{z})=\sum_{k\geqslant 0}t^{-k-1}s_k\circ f_A(\mathbf{z})=\sum_{k\geqslant 0}t^{-k-1}\sum_{|\omega|=k}\alpha_\omega\mathbf{z}^\omega$$

находим значения параметров α_ω, что определяет отображение Φ. Требуется проверить условие $\Phi_{n+1}\equiv 0$. Используем следующее явное выражение [1]:

$$\Phi_\ell(\omega_1,\dots,\omega_\ell)=\sum_\sigma \operatorname{sign}(\sigma)\Phi_\sigma(\omega_1,\dots,\omega_\ell),$$

где σ пробегает группу перестановок S_ℓ. Разлагая σ в произведение циклов $\gamma_1\cdot\gamma_2\cdots\gamma_q$, задаем $\Phi_\sigma=\Phi_{\gamma_1}\Phi_{\gamma_2}\cdots\Phi_{\gamma_q}$, и для $\gamma=(i_1,\dots,i_r)\subset(1,\dots,\ell)$ полагаем $\Phi_\gamma(\omega_1,\dots,\omega_\ell)=\Phi(\omega_{i_1}+\dots+\omega_{i_r})$.

4. Пусть, как и выше, $a_n(\mathbf{z})$ – ненулевая форма степени n. Выберем точку $\mathbf{y}\in\mathbb{C}^m$ такую, что $a_n(\mathbf{y})=1$, и положим $A_\mathbf{y}(t,\mathbf{z})=a_n(\mathbf{z}+t\mathbf{y})$. Тогда

$$A_\mathbf{y}(t,\mathbf{z})=t^n+\sum_{k=1}^n(-1)^k a_n(\mathbf{z},\mathbf{y})t^{n-k}.$$

Согласно следствию 1 полином $A_\mathbf{y}(t,\mathbf{z})$ разлагается в произведение линейных множителей (и, следовательно, форма $a_n(\mathbf{z})$ имеет вид $\prod_{i=1}^n\langle\mathbf{z},\mathbf{x}_i\rangle$) тогда и только тогда, когда $f_{A_\mathbf{y}}$ обладает свойством 2. Таким образом, описанный выше алгоритм применим к решению задачи о разложении форм на линейные множители (см. [4]).

5. Рассмотрим алгебру Ли W_m формальных векторных полей на $\mathbb{C}^m$. Базис в W_m составляют поля $D_{\omega,j}=\mathbf{z}^\omega\dfrac{\partial}{\partial z_j}$.

Теорема 2. *Алгебра Ли W_m действует на функциях Φ_ℓ по формуле*

$$D_{\omega,j}\Phi_\ell(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_\ell)=\sum_{k=1}^n\langle\omega_k,e_j\rangle\Phi_\ell(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_k+\omega-e_j,\dots,\omega_\ell),$$

где e_j – j-й орт.

Следствие 2. *Для проверки свойства* 2 *достаточно ограничиться вычислением значений Φ_{n+1} только на представителях орбит действия обертывающей алгебры алгебры Ли W_m.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] В. М. Бухштабер, Е. Г. Рис // УМН. 1997. Т. 52. № 2. С. 159–160. [**2**] V. M. Buchstaber, E. G. Rees // uk.arXiv.org: math.CO/0109122. [**3**] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962. (Обобщенные функции, вып. 5.) [**4**] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants. Boston: Birkhäuser, 1994.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
Эдинбургский университет
E-mail: buchstab@mendeleevo.ru, elmer@maths.ed.ac.uk

Принято редколлегией
15.01.2002