inepoint

АЛГЕБРЫ ЛИ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С σ-ФУНКЦИЯМИ, И ВЕРСАЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин

Сопоставим паре полиномов f и g от двух переменных полином

$$H(f,g)=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} \frac{f(x,y)-f(z,y)}{z-x}+\frac{f(x,w)-f(z,w)}{z-x} & \frac{g(x,y)-g(z,y)}{z-x}+\frac{g(x,w)-g(z,w)}{z-x}\\ \frac{f(x,y)-f(x,w)}{y-w}+\frac{f(z,y)-f(z,w)}{y-w} & \frac{g(x,y)-g(x,w)}{y-w}+\frac{g(z,y)-g(z,w)}{y-w}\end{vmatrix}.$$

При $(z,w)\to(x,y)$ получаем функциональный определитель $f_xg_y-f_yg_x$ пары f и g.

Пусть P – градуированное кольцо полиномов от $\{\lambda_k\}$ над $\mathbb{C}$, $\deg\lambda_k=k$ и $\deg t=0$ для $t\in\mathbb{C}$. Далее n и s всегда обозначают пару взаимно простых натуральных чисел таких, что $s>n\geqslant 2$. Для $t\in\mathbb{C}$ положим $F(x,y,\lambda;t)=y^n-x^s-\sum_{i,j}t\,\lambda_{ns-in-js}x^iy^j$, где $0\leqslant i\leqslant s-2$ и $0\leqslant j\leqslant n-2$. Пусть $\deg x=n$ и $\deg y=s$, тогда $\deg F=ns$.

Введем кольцо $Q_t=P[x,y]/(\nabla F(x,y,\lambda;t))$, где $\nabla=(\partial_x,\partial_y)$. Набор мономов $G=\{x^iy^j\}$, $0\leqslant i\leqslant s-2$, $0\leqslant j\leqslant n-2$, образует базис кольца Q_t. Обозначим через $I_{n,s}$ упорядоченное по убыванию множество весов $\{i_1=2(ns-n-s),i_2,\dots,i_{(n-1)(s-1)}=0\}$ элементов базиса G; отметим, что это упорядочение строгое. Для $x^iy^j\in G$ положим $x^iy^j=e_k$, где $k=in+js\in I_{n,s}$. Получаем $e=\{e_i\}$. Обозначим через $\mathscr{F}(x,y,\lambda)$ образ полинома $F(x,y,\lambda;1)$ в кольце Q_1. Фиксируем базис $\{e_i\widetilde{e}_j\}$ в кольце $E_t=Q_t\otimes_P Q_t\approx P[x,y,z,w]/(\nabla F(x,y,\lambda;t),\nabla F(x,w,\lambda;t))$.

Лемма 1. *Образ полинома $H(\nabla F(x,y,\lambda;t))\mathscr{F}(x,y,\lambda)$ в кольце E_t представляет собой симметрическую билинейную форму $S^{(t)}(e,\widetilde{e})$, с матрицей $\{s^{(t)}_{i,j}(\lambda)\}$.*

Введем производящую функцию линейных дифференциальных операторов $\{\ell^{(t)}_k\}$ на кольце P:

$$\ell^{(t)}(e)=\sum_{i\in I_{n,s}}e_i\,\ell^{(t)}_{2(ns-n-s)-i}=\sum_{i,j\in I_{n,s}}e_i\,s^{(t)}_{i,j}(\lambda)\,\partial_{\lambda_{ns-j}}.$$

Операторы $\ell^{(t)}_k$ занумерованы весами, $\deg\ell^{(t)}_k=k$, так что $\deg\ell^{(t)}(e)=2(ns-n-s)$.

Лемма 2. *Положим $\gamma(i,j)=3ns-2n-2s-i-j$. Тогда $s^{(0)}_{i,j}(\lambda)=\gamma(i,j)\lambda_{\gamma(i,j)}$, если $(ns-\gamma(i,j))\in I_{n,s}$, и равно нулю в остальных случаях.*

Обозначим через $\Delta(\lambda;t)$ определитель матрицы $S^{(t)}(\lambda)$.

Лемма 3. *Имеем $\Delta(\lambda;0)=(ns\lambda_{ns})^{(n-1)(s-1)}$, и $\Delta(\lambda;1)$ с точностью до числового множителя равен дискриминанту $\Delta_F(\lambda)$ полинома $F(x,y,\lambda;1)$.*

Теорема 4. *Пусть $k\in I_{n,s}$ и $\phi_k(\lambda,t)\in P$. Тогда $\ell^{(t)}_k(\Delta(\lambda;t))=\phi_k(\lambda;t)\,\Delta(\lambda;t)$, причем $\phi_0(\lambda;t)=(n-1)n(s-1)s$, а $\phi_k(\lambda;0)=0$, $k>0$.*

Следствие 5. *Векторные поля $\ell^{(t)}_k$ касаются поверхности $\{\Delta(\lambda;t)=0\}$.*

В теории особенностей [1] полиномы вида $F(x,y,\lambda;1)$ встречаются как миниверсальные деформации изолированной особенности y^n-x^s. Им сопоставляются так называемые матрицы *линеаризованного сворачивания* и матрицы *полного сворачивания* инвариантов группы, связанной с особенностью. В работе [2] описан алгоритм вычисления матриц полного сворачивания, основанный на методе [3] построения векторных полей касающихся дискриминанта особенности.

Следствие 6. *Семейство матриц $S^{(t)}(\lambda)$ дает матрицу линеаризованного сворачивания при $t=0$ и матрицу полного сворачивания при $t=1$.*

Рассмотрим алгебру Ли W_1 векторных полей на прямой с базисом $\{\xi_k=t^{k+1}\mathrm{d}/\mathrm{d}t\}$, $k=-1,0,1,\dots$, и коммутационными соотношениями $[\xi_i,\xi_j]=(j-i)\xi_{i+j}$.

Теорема 7. *Набор операторов* $\{\ell_k^{(0)}\}$, $k \in I_{n,s}$, *порождает алгебру Ли* $W_1^{(n,s)}$, *у которой* $[\ell_i^{(0)}, \ell_j^{(0)}] = (j-i)\ell_{i+j}^{(0)}$, *если* $i+j \in I_{n,s}$, *и равно нулю в остальных случаях. Таким образом, для любой пары* (n,s) *определена фактор-алгебра Ли* $W_1^{(n,s)}$ *алгебры Ли* W_1 *по модулю соотношений*: $\{\ell_q^{(0)} = 0,\ \text{если } q \in \mathbb{Z} \setminus I_{n,s}\}$.

Центральное место в наших исследованиях по теории абелевых функций занимают σ-функции [4], связанные с так называемыми (n,s)-кривыми, задаваемыми уравнениями $f_{n,s}(x,y,\lambda) = 0$. Полином $f_{n,s}(x,y,\lambda)$ равен $F(x,y,\lambda;1)$, в котором все λ_j с отрицательными j равны 0, т.е. представляет собой деформацию особенности $y^n - x^s$ с нулевыми модальными параметрами. Размерность пространства оставшихся параметров $\{\lambda_j\}_{j>0}$ равна $d_{n,s} = (n+1)(s+1)/2 - [s/n] - 3$. Обозначим через P_+ кольцо полиномов от $\{\lambda_j\}_{j>0}$.

Введем универсальное пространство $J_{n,s}$ многообразий Якоби $(n,\,s)$-кривых как пространство расслоения $J_{n,s} \to M_{n,s} \cong \mathbb{C}^{d_{n,s}}$, слоем которого над точкой $\lambda \in M_{n,s}$ является многообразие Якоби соответствующей кривой. В слое имеются канонические координаты $u = (u_1, \dots, u_g)$, $g = (n-1)(s-1)/2$ (см. [5]). Сигма-функция представляет собой целую функцию $\sigma\colon J_{n,s} \to \mathbb{C}$ по всем аргументам. В кольце $\mathfrak{D}$ дифференциальных операторов по u и λ с полиномиальными коэффициентами лежит аннуляторный идеал $\mathfrak{A}(\sigma) = \{L \in \mathfrak{D} \mid L(\sigma(u,\lambda)) = 0\}$. Идеал $\mathfrak{A}(\sigma)$ порожден операторами $\{L_k\}$, $k \in I_{n,s}$, при этом $[L_i, L_j] = \sum_k c_{i,j}^k(\lambda) L_k$, где $c_{i,j}^k(\lambda) \in P_+$. Отождествим полиномы из P_+ с операторами умножения на них в кольце функций на $J_{n,s}$. При этом $[L_i, p]$ для $p \in P_+$ представляет собой оператор умножения на некоторый полином из P_+. Пусть $\pi\colon P \to P$ – проектор, выделяющий P_+. Определим действие операторов $\{L_k\}$ на кольце P формулой $L_i(p) = [L_i, \pi(p)]$.

Теорема 8. *Действие оператора* L_k *на кольце* P *задается векторным полем* $\ell_k^{(1)}$ *по формуле* $L_k(p) = \pi(\ell_k^{(1)}(\pi(p)))$.

Изолированная особенность называется простой, если число ее модальных параметров равно нулю [1]. Все простые особенности вида $y^n - x^s$ исчерпываются списком пар (n,s): $(2, 2g+1)$, $g = 1, 2, \dots$; $(3,4)$ и $(3,5)$. В этих случаях $P_+ = P$.

Следствие 9. *Для простых особенностей вида* $y^n - x^s$ *указанное действие дает точное представление алгебры Ли, порожденной операторами* $\{L_k\}$ *и операторами умножения на полиномы из* P.

Введем операторы $\{L_k^{(0)}\}$ на $Q = \mathbb{C}[u_1, \dots, u_g]$, полагая $L_i^{(0)}(q) = L_i(q)|_{\lambda=0}$ для $q \in Q$.

Теорема 10. *Указанное действие операторов* $\{L_k^{(0)}\}$ *реализует точное представление алгебры Ли* $W_1^{(n,s)}$ *на кольце* Q, *при котором* $\{L_k^{(0)}\}$ *порождают аннуляторный идеал полинома* $\sigma(u,0)$.

Полиномы $\sigma(u,0)$ описаны в работе [5] и называются полиномами Шура–Вейерштрасса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] В. И. Арнольд Особенности каустик и волновых фронтов. М.: Фазис, 1996. [**2**] А. Б. Гивенталь // Функц. анализ и его прил. 1980. Т. 14. № 2. С. 4–14. [**3**] В. М. Закалюкин // Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10. № 2. С. 69–70. [**4**] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leykin // Rev. Math. Math. Phys. 1997. V. 10. № 2. P. 3–120. [**5**] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, В. З. Энольский // Функц. анализ и его прил. 1999. Т. 33. № 2. С. 1–15.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
Институт магнетизма, Киев, Украина
E-mail: `buchstab@mendeleevo.ru, dile@imag.kiev.ua`

Принято редколлегией
06.05.2002