

Олимпиада по геометрии

Кафедра высшей геометрии и топологии и лаборатория геометрических методов в математической физике.

24 ноября 2011г.

Задача 1. Пусть прямая пересекает гиперболу в точках A и B , а ее асимптоты — в точках X и Y . Доказать, что $AХ = ВУ$.

Задача 2. Пусть A — фиксированная точка параболы Γ . Докажите, что все хорды Γ , видимые из A под прямым углом, пересекаются в одной точке.

Задача 3. В трехмерном пространстве дан выпуклый многогранник. Для каждой его грани F строится вектор \mathbf{e}_F перпендикулярный F , направленный вне многогранника, если его начало лежит на грани F , и равный по длине площади F . Докажите, что сумма всех построенных векторов равна $\mathbf{0}$.

Задача 4. В пространстве даны два эллипса с общим фокусом. Два эллипсоида получены вращением этих эллипсов относительно больших осей. Докажите, что все плоскости, касающиеся данных эллипсоидов проходят через одну точку или параллельны одной прямой.

Задача 5. Будем говорить, что тетраэдр *разбивает* параллелепипед если параллелепипед можно разбить на 6 копий данного тетраэдра. Существуют ли параллелепипед, который разбивают хотя бы два различных тетраэдра?