

Олимпиада по геометрии для студентов 1-2 курсов

- (1) Однополостный гиперболоид не является гиперболоидом вращения. Можно ли пересечь его эллипсоидом так, чтобы пересечение состояло из двух окружностей?
- (2) На плоскости дана прямая, на которой отмечены две тройки точек p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3 . С помощью линейки без делений постройте образ произвольной точки t прямой при дробно-линейном преобразовании этой прямой, переводящем каждую из точек p_i в точку q_i .
- (3) Найдите максимальное число вершин многоугольника в пересечении n -мерного куба и двумерной плоскости.
- (4) *Триангуляцией* многоугольника называется его разбиение на конечное число треугольников такое, что пересечение любых двух треугольников этого разбиения либо пусто, либо является вершиной каждого из этих двух треугольников, либо является стороной каждого из этих двух треугольников. Триангуляции выпуклых многоугольников можно получать следующим образом. Рассмотрим в трёхмерном пространстве с фиксированной прямоугольной системой координат $Oxyz$ выпуклый многогранник P , все грани которого являются треугольниками. *Верхней шапкой* многогранника P назовём объединение всех его граней, внешние нормали которых образуют острые углы с осью Oz . Ортогонально спроектировав верхнюю шапку многогранника P на плоскость Oxy , мы получим триангуляцию выпуклого многоугольника. Существуют ли триангуляции выпуклых многоугольников, которые нельзя получить таким образом?
- (5) Пусть $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ — три точки, не лежащие на одной прямой. Рассмотрим многочлен

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$$

и обозначим через x_1 и x_2 корни его производной. Докажите, что

- а) точки x_1 и x_2 лежат внутри треугольника с вершинами z_1, z_2 и z_3 ;
- б) точки x_1 и x_2 являются фокусами эллипса, касающегося сторон треугольника с вершинами z_1, z_2 и z_3 в их серединах.