ЧИСЛА РАЙДЕМАЙСТЕРА

Из второй части курса высшей алгебры хорошо известна следующая замечательная *теорема Бернсайда-Фробениуса*: число классов сопряженности конечной группы равно числу попарно неэквивалентных неприводимых (унитарных) представлений этой группы. В центре доказательства лежит следующий факт: в пространстве класс-функций (функций, постоянных на классах сопряженности) имеются два естественных базиса: базис из характеристических функций классов и базис из характеров неприводимых представлений. Нас интересует обобщение этой теоремы, с одной стороны, на бесконечные группы, а с другой — на случай действия некоторого автоморфизма $f : G \to G$. Роль классов сопряженности играют теперь *классы Райдемайстера* (или классы скрученной сопряженности), т.е. классы эквивалентности отношения $g \sim hgf(h^{-1})$. Следующая теорема не является сложной, но была доказана только 20 лет назад.

Задача 1. Докажите, что для конечной группы G следующие три числа совпадают: число классов Райдемайстера $R(f)$ (число Райдемайстера), число обычных классов сопряженности, неподвижных при действии f, и число неподвижных представлений, т.е. таких неприводимых представлений ρ, что $\rho \circ f$ эквивалентно ρ.

Для бесконечных групп это утверждение верно только отчасти:

Задача 2. Рассмотрите группу целых чисел $\mathbb{Z}$ и ее (единственный нетривиальный) автоморфизм $f = -\operatorname{id}$. Убедитесь, что $R(f)$ равно числу неподвижных представлений и равно двум, в то время как число неподвижных обычных классов сопряженности равно одному.

Эти и близкие задачи, лежащие на стыке теории групп и некоммутативной геометрии, исследуются, в первую очередь, с точки зрения применения к топологической динамике, но как оказалось, в последнее время они нашли ряд неожиданных применений, в том числе в криптографии с открытым ключом.

Дальнейшие ссылки можно найти, например, по адресу
`http://mech.math.msu.su/~troitsky/`