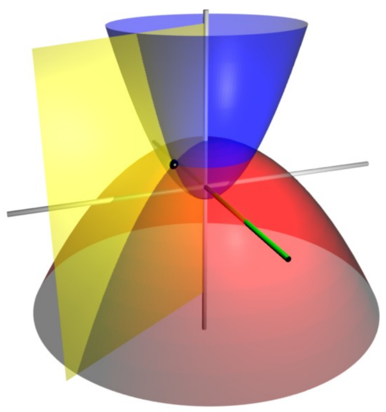
ОРТОГОНАЛЬНЫЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ В $\mathbb{R}^n$ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Одной из важнейших, но до сих пор недостаточно изученных, классических задач дифференциальной геометрии является задача описания и построения ортогональных криволинейных координат в $\mathbb{R}^n$, т.е. построение в n-мерном евклидовом пространстве с евклидовыми координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ криволинейных систем координат $\mathbf{r}(u) = (x^1(u^1, \ldots, u^n), \ldots, x^n(u^1, \ldots, u^n))$, $\det(\partial x^i / \partial u^j) \neq 0$, таких, что в каждой точке все координатные линии ортогональны. Условие ортогональности криволинейных координат эквивалентно условию диагональности евклидовой метрики в этих криволинейных координатах:

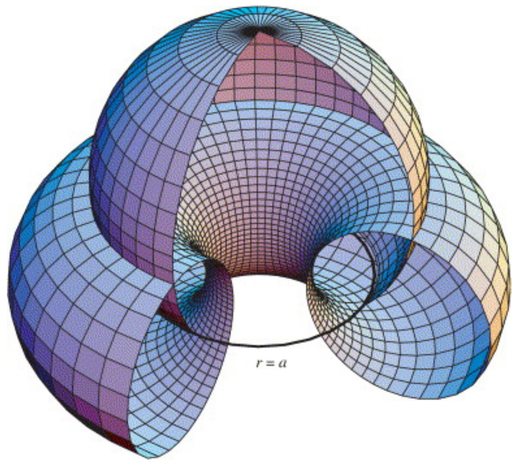
$$g_{ij}(u) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial u^i}\frac{\partial x^k}{\partial u^j} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}\right)\delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$



Задача имеет и локальную (в некоторой области), и глобальную (во всем пространстве $\mathbb{R}^n$) формулировки, причем в глобальном случае координатные гиперповерхности могут иметь нетривиальную топологию. Криволинейные системы координат $x^i(u)$, $1 \leq i \leq n$, удовлетворяют линейной системе деривационных уравнений

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial u^i \partial u^j} = \sum_{s=1}^{n} \Gamma^s_{ij}(u)\frac{\partial x^k}{\partial u^s}, \quad 1 \leq i, j, k \leq n, \tag{1}$$

где $\Gamma^s_{ij}(u)$ – символы Кристоффеля метрики $g_{ij}(u)$. Условием совместности линейной системы (1) является равенство нулю тензора римановой кривизны $R^k_{ijl}(u)$ метрики $g_{ij}(u)$ (такие метрики называются плоскими). Таким образом, локально задача сводится к описанию и построению диагональных плоских метрик. Условие, что диагональная метрика является плоской, приводит к системе уравнений в частных производных – классическим уравнениям Ламе. При $n = 2$ эта система уравнений является линейной и на евклидовой плоскости несложно описать и построить ортогональные криволинейные системы координат. При $n > 2$ система уравнений Ламе является нелинейной, задача становится очень сложной, этой проблеме были посвящены труды многих классиков дифференциальной геометрии, в частности, было выяснено, что пространство решений параметризуется $n(n-1)/2$ произвольными функциями двух переменных.



В последние десятилетия была открыта глубокая связь этой задачи с важными современными проблемами математической физики, теории систем гидродинамического типа, теории интегрируемых систем, гамильтоновых систем, топологическими теориями поля, современными проблемами дифференциальной геометрии, теорией фробениусовых многообразий, теорией согласованных метрик. При значительном интересе к этой проблеме в последние годы в ее решении был достигнут значительный прогресс. Было доказано, что нелинейная система уравнений Ламе является интегрируемой системой, построение ее решений сведено к решению линейных уравнений по заданному набору произвольных функций двух переменных, развит алгебро-геометрический подход, позволяющий строить решения по набору алгебро-геометрических данных, построены конкретные примеры. В работах О.И. Мохова была, в частности, доказана интегрируемость задачи описания полупростых пар согласованных плоских метрик, играющей важную роль в современной дифференциальной геометрии и математической физике. Эта задача была сведена к описанию и построению пар диагональных плоских метрик вида $g_{1,ij}(u) = g_i(u)\delta_{ij}$, $g_{2,ij}(u) = \lambda_i(u^i)g_i(u)\delta_{ij}$, где $\lambda_i(u^i)$, $1 \leq i \leq n$, – произвольные заданные функции одной переменной. Доказано, что такие пары диагональных плоских метрик описываются интегрируемой нелинейной дифференциальной редукцией классических уравнений Ламе, и построение таких пар диагональных плоских метрик сведено к решению линейных уравнений. Много важных вопросов в этой области остаются открытыми. В частности, для многих известных ортогональных криволинейных систем координат, даже для таких фундаментальных как эллипсоидальная система координат в $\mathbb{R}^3$, не известно как они получаются в рамках развитых подходов теории интегрируемых систем.