НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

Основная идея некоммутативной геометрии и топологии — пользуясь двойственностью между пространствами и алгебрами функций на них, расширить класс изучаемых объектов до не обязательно коммутативных алгебр, рассматривая их как “некоммутативные пространства” и исследуя на них геометрические и топологические вопросы. Этим направлением в МГУ занимаются А.С.Мищенко, Е.В.Троицкий и В.М.Мануйлов.

Вот один из аспектов некоммутативной топологии, связанный с асимптотическими представлениями групп.

Пример. Рассмотрим матрицы размерности n

$$U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad V_n = \begin{pmatrix} \omega & & & & \\ & \omega^2 & & & \\ & & \omega^3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega^n \end{pmatrix},$$

где $\omega = \omega_n = e^{2\pi i/n}$. Тогда $U_n V_n U_n^{-1} V_n^{-1} = \omega_n \cdot E$, где E — единичная матрица. При $n \to \infty$, $\omega_n \to 1$, и матрицы U_n и V_n асимптотически коммутируют. Полезная точка зрения состоит в том, чтобы рассматривать такую последовательность пар (U_n, V_n) как асимптотическое представление свободной абелевой группы $\mathbb{Z}^2$ с двумя образующими, a, b (считаем, что “представление” π_n переводит a в U_n, b в V_n).

В общем случае, если матрицы U, V таковы, что $UVU^{-1}V^{-1}$ близко к единичной матрице, $\det(tUVU^{-1}V^{-1}+(1-t)E) \neq 0$ для всех $t \in [0,1]$, таким образом получаем непрерывное отображение $f : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ в комплексную плоскость без 0.

Ясно, что $f(0) = \det E = 1$, $f(1) = \det(UVU^{-1}V^{-1}) = 1$. Функцию на отрезке, имеющую равные значения на концах, можно считать заданной на окружности, поэтому f задает отображение окружности S^1 в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Каждому такому отображению можно сопоставить *число вращения.*

Как обычно в топологии, если “пошевелить” U и V, заменив их на близкие к ним матрицы, число вращения не изменится.

Если $UV = VU$, то f не зависит от t и тождественно равна 1, ее число вращения равно 0.

Упражнение. Проверить, что для матриц U_n, V_n (при $n \geq 3$) число вращения равно 1.

Вывод: “рядом” с асимптотическим представлением $\pi = (\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ группы $\mathbb{Z}^2$ не существует “настоящих” представлений.

Такой подход позволяет определить асимптотические представления групп, заданных образующими и соотношениями (надо требовать, чтобы образы соотношений были близки к E), а также на еще более общие объекты, называющиеся C^*-алгебрами. Они включают также кольца $C(X)$ непрерывных функций на хороших топологических пространствах X.

Для одних C^*-алгебр любое асимптотическое представление можно продеформировать в настоящее представление, для других имеется много асимптотических представлений, не сводимых к настоящим (как в примере с $\mathbb{Z}^2$).

С помощью асимптотических представлений можно определить инварианты C^*-алгебр (в том числе, топологических пространств). Получаемая в результате K-теория является важнейшим инструментом некоммутативной геометрии и топологии. В коммутативном случае получается классическая K-теория, а возможность рассматривать некоммутативные C^*-алгебры позволяет усилить мощность этого инструмента.