КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

Специальный курс по выбору кафедры

Торическая геометрия и топология

чл.-корр. РАН В. М. Бухштабер, проф. Т. Е. Панов, проф. А. А. Гафуллин

Курс посвящён изучению торических многообразий с различных точек зрения: алгебраической, топологической и комбинаторной. Вначале рассматривается классическая конструкция торических многообразий через вееры. Специальный случай этой конструкции устанавливает соответствие между выпуклыми многогранниками и проективными торическими многообразиями. Одним из важных приложений торических многообразий в комбинаторной геометрии является доказательство известной гипотезы Макмаллена о числах граней симплициальных выпуклых многогранников. Эта гипотеза была доказана Стенли в 1980 году на основе одной из фундаментальных теорем алгебраической геометрии — сильной теоремы Лефшеца. В курсе даётся доказательство теоремы Лефшеца и, как следствие, доказательство гипотезы Макмаллена.

Далее рассмотривается конструкция торических многообразий и их обобщений как пространств орбит действия торов на полных пересечениях вещественных квадратичных гиперповерхностей. Излагаются основанные на этой конструкции приложения теории торических многообразий к классическим и современным задачам теорий комплексных и симплектических многообразий.

Продолжительность: 2 семестра, форма отчетности: экзамен.

Программа курса

1. Выпуклые многогранники.
2. Двойственность Гейла и диаграммы Гейла.
3. Числа граней и соотношения Дена-Соммервилля.
4. Вееры.
5. Симплициальные комплексы.
6. Триангуляции многообразий.
7. Алгебраические торические многообразия: конструкция через рациональные вееры.
8. Проективные торические многообразия и многогранники.
9. Когомологии торических многообразий.
10. Алгебраическая фактор-конструкция торических многообразий (“конструкция Кокса”).
11. Гамильтоновы действия тора и симплектическая редукция.
12. Понятие момент-угол-многообразия.
13. Кольца граней симплициальных комплексов (кольца Стенли-Райснера).
14. Tor-алгебры и биградуированные числа Бетти.
15. Комплексы Коэна-Маколея.
16. Момент-угол-комплексы.

17. Полиэдральные произведения, их функториальные свойства. Примеры.
18. Кольца когомологий момент-угол-комплексов.
19. Конфигурации координатных подпространств, топология их дополнений.
20. Пересечения квадрик и момент-угол-многообразия.
21. Комплексные структуры на пересечениях эрмитовых квадрик (LVM-многообразия).
22. Комплексные структуры на момент-угол-многообразиях.
23. Голоморфные главные расслоения.
24. Когомологии Дольбо момент-угол-многообразий.
25. Гамильтоново минимальные лагранжевы подмногообразия.
26. Действия тора половинной размерности на многообразиях.
27. Локально стандартные действия тора.
28. Квазиторические многообразия.
29. Гомотопическая теория полиэдральных произведений.
30. Действия тора и комплексные кобордизмы.
31. Теоремы локализации для эквивариантных кобордизмов.
32. Универсальный торический род.