

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

Специальный курс по выбору кафедры

Топологические инварианты особенностей

проф. С. М. Гусейн-Заде

Курс посвящен изучению топологии критических точек голоморфных функций нескольких переменных, в основном — изолированных. Известная теорема Дж. Милнора (1968) утверждает, что локальное многообразие уровня (называемое слоем Милнора) голоморфной функции около изолированной критической точки гомотопически эквивалентно букету сфер средней размерности. На группе гомологий слоя Милнора имеется ряд структур, определяемых топологией критической точки. Для ряда естественных образом выделяемых классов критических точек они оказываются совпадающими с рядом математических объектов и понятий, с критическими точками функций априори никак не связанных. Так, например, В.И. Арнольд обнаружил, что для так называемых простых, т.е. не имеющих модулей в классификации, функций нечетного числа переменных группа целочисленных гомологий слоя Милнора вместе с формой пересечений на ней изоморфна решетке, порожденной корнями простой алгебры Ли, а группа монодромии изоморфна соответствующей группе Вейля. В рамках курса дается классификация простых (не имеющих модулей) критических точек функций. Доказывается теорема Милнора о топологии слоя Милнора изолированной критической точки. Определяются такие объекты, связанные с критической точкой, как форма пересечений, оператор монодромии, оператор вариации, форма Зейферта, группа монодромии. Изучается топология слоя Милнора и расслоения Милнора для невырожденной (морсовской) критической точки. Доказывается классическая формула Пикара–Лефшеца. Описывается метод вычисления топологических инвариантов для функций двух переменных. Обсуждается теория краевых особенностей и топология особенностей полных пересечений.

Продолжительность: 1 семестр, форма отчетности: экзамен.

Программа курса

1. Критические точки функций. Различные типы эквивалентности. Задачи классификации ростков функций.
2. Деформации ростков функций, версальные и миниверсальные деформации, модальность особенностей. Бифуркационные диаграммы ростков функций.
3. Струя функции. Конечно определенные ростки. Лемма Морса с параметрами, стабилизация особенностей, стабильная эквивалентность, коранг ростка функции.
4. Классификация простых (0-модальных) ростков функций.
5. Морсовские функции. Топологическое строение невырожденной критической точки голоморфной функции.
6. Элементы теории Пикара-Лефшеца: исчезающие циклы, преобразования монодромии, операторы Пикара-Лефшеца, группа монодромии, операторы вариации.
7. Слой Милнора и расслоение Милнора ростка голоморфной функции.
8. Топология слоя Милнора ростка голоморфной функции. Теорема Милнора о гомотопическом типе слоя Милнора ростка голоморфной функции с изолированной критической точкой.

9. Форма Зейферта особенности. Основные соотношения между операторами монодромии, операторами вариации, формой пересечения и формой Зейферта особенности.
10. Оператор вариации и форма пересечений прямой суммы особенностей. Формула Пикара-Лефшеца и ее доказательство.
11. Отмеченные и слабо отмеченные базисы в исчезающих гомологиях. Замены базисов. Группа кос и ее основные свойства.
12. Локальная алгебра ростка. Локальная кратность отображения. Алгебраическая формула для локальной степени отображения.
13. Разрешение особенностей плоских кривых. Специальные морсификации ростков функций двух переменных, их существование.
14. Форма Зейферта и форма пересечений ростка функции двух переменных.
15. Особенности функций на многообразии с краем и их топологическое строение.
16. Полные пересечения. Топология ростков полных пересечений с изолированными особенностями.