

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ  
Специальный курс по выбору кафедры  
**Теория выпуклых многогранников и основы  
торической топологии**

чл.-корр. РАН В. М. Бухштабер, проф. Т. Е. Панов, к.ф.-м.н. Н. Ю. Ероховец

Курс посвящён введению в теорию выпуклых многогранников и торическую топологию. В первой части курса рассматриваются основные инструменты работы с многогранниками: грани, перечисляющие многочлены, веера, диаграммы Гейла. Приводятся основные результаты. Во второй части курса даются основные понятия торической топологии: момент-угол многообразия, квазиторические многообразия, малые накрытия. Описываются когомологии этих пространств. Рассматриваются комбинаторные инварианты многогранников, возникающие в торической топологии.

Продолжительность: 2 семестра, форма отчетности: экзамен.

**Программа курса**

1. Основные понятия.
  - (a) Два определения выпуклого многогранника. Простые и симплициальные многогранники.
  - (b) Примеры выпуклых многогранников: Платоновы тела, циклические многогранники, пермutoэдр, многогранник Биркгофа, гиперсимплексы, кроссполитопы, нестоэды.
  - (c) Теорема о представлении выпуклых многогранников. Метод исключения Фурье-Моцкина.
  - (d) Лемма Фаркаша.
  - (e) Теорема Каратеодори.
  - (f) Грани выпуклых многогранников.
  - (g) Суммы Минковского и нестоэды.
  - (h) Полярность.
  - (i) Проективные преобразования.
  - (j) Диаграммы Шлегеля.
2. Графы выпуклых многогранников.
  - (a) Восстановление простого многогранника по его графу.
  - (b) Теорема Балинского о  $d$ -связности. Формулировка теоремы Штейница.
3. Двойственность Гейла.
4. Шеллинговость выпуклых многогранников.
5. Комбинаторные характеристики выпуклых многогранников.
  - (a) Числа граней, формула Эйлера,  $f$ - и  $h$ - полиномы.
  - (b) Соотношения Дена-Соммервилля для простых многогранников.
  - (c) Флаговые числа, соотношения Байер-Биллеры.
6. Понятие о  $g$ -теореме.

7. Проблема флаговых чисел выпуклых многогранников.

- (a) Флаговые числа.
- (b) Четырёхмерные многогранники, толщина многогранника.
- (c)  $d$ -индекс выпуклого многогранника. Теорема Стенли и конструкция К. Ли.
- (d) Торический  $g$ -полином Стенли.
- (e) Кольцо выпуклых многогранников.
- (f) Алгебры Хопфа. Действие алгебры операторов граней на кольце выпуклых многогранников.
- (g) Квазисимметрические функции. Обобщённые  $f$ -полиномы.
- (h) Кольцо флаговых векторов. Базисы в пространстве флаговых векторов.
- (i) Слова Линдона и мультипликативные образующие.
- (j) Деформации умножения в кольцах и торический  $g$ -полином.

8. Инварианты выпуклых многогранников, происходящие из торической топологии.

- (a) Основные конструкции торической топологии: момент-угол многообразие, квазиторическое многообразие.
- (b) Биградуированные числа Бетти. Резольвенты Кошуля и Тейлор.

9. Теория числа Бухштабера симплициальных комплексов и выпуклых многогранников.

- (a) Подходы к вычислению:
  - дуальные описания;
  - обобщённые хроматические числа;
  - матроиды;
  - рациональные точки многообразий Грассмана;
  - недостающие грани;
  - вещественное число Бухштабера.
- (b) Связь с операциями и конструкциями теории многогранников.
- (c) Связь с известными комбинаторными инвариантами.
- (d) Специальные классы комплексов и многогранников.
- (e) Малые значения.