

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

Специальный курс по выбору кафедры

Симплектическая геометрия и топология

ассистент М. В. Прасолов, м. н. с. В. А. Шасти́н

Первая часть курса посвящена симплектической геометрии и линейной алгебре. Обсуждаются классические конструкции: геометрия симплектического векторного пространства, фундаментальная группа симплектической группы и индекс Маслова, лагранжевы грассманианы, гамильтонов формализм, задание симплектоморфизмов производящими функциями и т.п. После этого рассказывается о приложениях линейной теории к топологии и анализу: категория Люстерника-Шнирельмана и критические точки функций, теория возмущений линейных операторов. Доказываются теорема Конли-Цендера о числе неподвижных точек такого диффеоморфизма двумерного тора, который сохраняет площадь и центр масс, а также докажем обобщение, сделанное В.И. Арнольдом теоремы о числе нулей решений задачи Штурма-Лиувилля.

Вторая часть курса посвящена симплектической топологии. Обсуждаются классические сюжеты: симплектические многообразия, теорема Дарбу и трюк Мозера, почти комплексные структуры, лагранжевы и симплектические подмногообразия и их окрестности. В качестве приложений развитой теории рассказывается о теории J -голоморфных кривых и их связях с минимальными поверхностями и доказывается теорема Элиашберга о замкнутости подгруппы симплектоморфизмов в группе гомеоморфизмов симплектического многообразия. Также рассказывается теория о действиях групп Ли на симплектических многообразиях: строится отображение момента для гамильтонова действия, дается общая схема симплектической редукции для гамильтонова действия и доказывается теорема Атьи-Гийемина-Стернберга о многограннике.

Продолжительность: 2 семестра, форма отчетности: экзамен.

Программа курса

1. Предыстория симплектической геометрии и топологии. Линейная оптика, гамильтонов формализм и линейный комплекс прямых.
2. Геометрия симплектического пространства.
3. Топология симплектической группы и лагранжева грассманиана.
4. Симплектоморфизмы и производящие функции.
5. Теорема Конли-Цендера.
6. Когомологическая длина топологического пространства и критические точки.
7. Обобщенная задача Штурма-Лиувилля и индекс Маслова. Топология шлейфа.
8. Симплектические многообразия. Теорема Дарбу и трюк Мозера. Примеры.
9. Почти комплексные структуры.
10. Лагранжевы и симплектические подмногообразия, их окрестности и изотопии.
11. J -голоморфные кривые и теорема Элиашберга.
12. Действия групп Ли на симплектических многообразиях. Гамильтоновы действия и отображение момента. Симплектическая редукция и теорема Атьи-Гийемина-Стернберга.