

Спектральная геометрия

доц. А. В. Пенской, д. ф.-м.н.

Спектральная геометрия — современная и интенсивно развивающаяся область математики, находящаяся на стыке дифференциальных уравнений с частными производными, дифференциальной геометрии и анализа, которая изучает связь между геометрией области с одной стороны и спектром оператора Лапласа и собственными функциями оператора Лапласа с другой стороны.

По-видимому, первым вопросом спектральной геометрии был заданный лордом Рэлеем в его знаменитой книге «Теория звука» вопрос о том, какой должна быть форма мембраны барабана, чтобы среди мембран той же площади она издавала звук самой низкой частоты. Во второй половине двадцатого века Марк Кац сформулировал другой известный вопрос: «Можно ли услышать форму барабана?». Ответы на этот и другие вопросы мы обсудим в данном курсе, а что еще более интересно — узнаем еще больше вопросов, на которые мы еще не знаем ответа.

Примерная программа курса:

1. Оператор Лапласа, задачи Дирихле, Неймана и Стеклова, физический смысл.
2. Спектр простейших областей.
3. Вариационное описание собственных чисел оператора Лапласа.
4. Элементарные неравенства для собственных чисел, вилка Дирихле–Неймана.
5. Теорема Вейля и ее доказательство для областей в евклидовом пространстве. Гипотеза Вейля.

6. Доказательство Филонова неравенства Фридландера. Другие неравенства.
7. Нодальные области, нодальный граф, теорема Куранта о нодальных областях. Нодальная геометрия. Теоремы Плейеля и Брюнинга.
8. Сферическое перекладывание и доказательство неравенства Фабера-Крана.
9. Оператор Лапласа-Бельтрами на римановом многообразии. Связь собственных функций с минимальными поверхностями (теорема Такахаси).
10. Геометрическая оптимизация собственных чисел на поверхностях. Экстремальные метрики. Связь экстремальных метрик с минимальными поверхностями (теорема Надирашвили - Эль-Суфи - Илиаса).
11. Теорема Херша.
12. Максимизация собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами на конкретных поверхностях.