

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

Специальный курс по выбору кафедры

Теория Морса

проф. С. М. Гусейн-Заде

Курс посвящен изучению основ теории Морса, которая является мощным инструментом исследования топологии гладких многообразий и пространств петель на них. Конечномерная версия теории Морса использует функции с невырожденными критическими точками для описания топологии многообразий. Бесконечномерная версия использует функционалы на пространстве путей для описания топологии пространства петель на многообразии и через нее для исследования геодезических. Курс начинается с доказательства леммы Морса и существования и общности морсовских функций на многообразии. Дается описание топологии многообразия через морсовскую функцию на нем, выводятся неравенства Морса. Демонстрируются приложения теории Морса к исследованию топологии комплексных подмногообразий, доказываются теорема Лефшеца о гиперплоских сечениях. Обсуждается пространство путей на гладком многообразии, функция действия и ее критические точки. Описывается гессиан функции действия на критическом пути, индекс гессиана на геодезической. Определяется гомотопический тип пространства путей, соединяющих две точки на многообразии. Описывается топология пространства петель на многообразии неположительной кривизны и на многообразии с положительным тензором Риччи.

Продолжительность: 1 семестр, форма отчетности: экзамен.

Программа курса

1. Критические точки функций. Невырожденные критические точки. Лемма Морса. Доказательство.
2. Морсификация функции. Существование и общность морсовских функций на многообразии.
3. Множества уровня и множества меньших значений. Изменение множества уровня и множества меньших значений при переходе через критическое значение.
4. Топология многообразия через морсовскую функцию на нем.
5. Простейшие приложения морсовских функций к топологии многообразий. Неравенства Морса.
6. Лемма Сарда. Функции высоты и расстояния до точки на подмногообразиях евклидова пространства.
7. Топология аффинных комплексных подмногообразий. Теорема Лефшеца о гиперплоских сечениях.
8. Пространство путей на гладком многообразии. Функция действия и ее критические точки.
9. Гессиан функции действия на критическом пути. Сопряженные точки на геодезической. Кратность сопряженных точек.
10. Индекс гессиана на геодезической.

11. Гомотопический тип пространства путей, соединяющих две точки. Пространство петель сферы.
12. Топология пространства петель на многообразии неположительной кривизны. Топология пространства петель на многообразии с положительным тензором Риччи.