КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

Специальный курс по выбору кафедры

Введение в маломерную топологию

м. н. с. В. А. Шастин

В рамках курса изучаются геометрические и топологические свойства пространств размерности 1, 2 и 3, посредством исследования алгебраических свойств групп, ассоциированных с этими пространствами: фундаментальной группы, группы изометрий и т.д..

Будут рассмотрены фундаментальные теоремы алгебраической топологии и их приложения к топологическим пространствам малой размерности.

С помощью теоремы Зейферта ван Кампена будут построены копредставления фундаментальных групп компактных поверхностей и копредставление Виртингера группы узла в трехмерной сфере.

В рамках общей теории накрытий топологических пространтсв будут исследованы дискретные подгруппы групп изометрий классических геометрий и доказана теорема Пуанкаре о фундаментальном многоугольнике. Кроме того будут доказаны теоремы Дэна о разрешимости проблемы равенства и сопряженности для фундаментальных групп компактных поверхностей.

Как приложение фундаментальных теорем из гомотопической теории клеточных протсрантсв: теоремы Гуревича и Уайтхеда будет построен пример Уайтхеда трехмерного стягиваемого многообразия негомеоморфного $\mathbb{R}^3$.

Структура гомологий асферических клеточных пространств будет представлена на примере гомологий комплекса Виртингера узла, с помощью которого будет построен полином Александера. В завершении курса будут также доказаны фундаментальные теоремы Папакирьякопулоса о петле и о сфере. С помощью этих теорем и теоремы Милнора-Кнезера будет показано как в теории трехмерных многообразий возникают асферические двумерные комплексы.

Продолжительность: 1 семестра, форма отчетности: экзамен.

Программа курса

1. Фундаментальная группа топологического пространства. Гомотопные отображения и гомотопическая эквивалентность топологических пространств. Ретракты. Фундаментальная группа окружности.

2. Теорема Зейферта-ван Кампена. Фундаментальные группы компактных поверхностей. Группа узла. Представление Виртингера.

3. Накрывающие пространства. Тоерема о поднятии отображения. Фундаментальная группа накрывающего пространства. Автоморфизмы накрытий. Действие фундаментальной группы автоморфизмами слоя накрытия. Регулярные накрытия. Универсальное накрывающее пространство. Соответствие между классами экивалентности накрытий и классами сопряженности подгрупп фундаментальной группы пространства.

4. Вполне разрывные действия групп на топологических пространствах. Дискретные подгруппы групп движений сферической, евклидовой и гиперболических геометрий. Федоровские группы. Фуксовы группы и теорема Пуанкаре о фундаментальным многоугольнике. Теоремы Дена о разрешимости проблем равенства и сопряженности для фундаментальных групп компактных поверхностей.

5. Гомотопические группы. Гомотопическая последовательность накрытия. Гомотопическая теория клеточных пространств. Пространства Эйленберга-Маклейна. Теоремы Гуревича и Уайтхеда. Пример Уайтхеда трехмерного стягиваемого многообразия негомеоморфного $\mathbb{R}^3$.

6. Гомологии асферических пространств и гомологии групп. Комплекс Виртингера и модуль Александера узла.

7. Двумерные комплексы и трехмерные многообразия. Спайн многообразия. Теоремы Папакирьякопулоса о петле и сфере. Гомотопические группы трехмерных многообразий. Неприводимые трехмерные многообразия. Нормальные поверхности. Теорема Милнора-Кнезера.