

# КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

Обязательный курс

## Линейная алгебра и геометрия

проф. В. М. Мануйлов

В курсе обсуждаются следующие разделы: линейные и аффинные пространства, евклидовы и аффинно-евклидовы пространства, общая теория линейных операторов, теория операторов, сохраняющих скалярное произведение, билинейные функции в линейных и в евклидовых пространствах, полилинейные функции и тензоры.

Продолжительность: 1 семестр (8 часов в неделю), форма отчетности: зачет, экзамен.

### Программа курса

1. Линейное пространство. Определение, примеры. Линейная оболочка. Аффинное пространство.
2. Линейное подпространство. Линейное многообразие. Факторпространство. Теорема о сумме размерностей подпространства и факторпространства.
3. Линейная (не)зависимость системы векторов. Ранг системы векторов. Размерность. Базис. Координаты.
4. Пересечение и сумма подпространств. Теорема об их размерностях. Прямая сумма подпространств. Внешняя прямая сумма.
5. Двойственное пространство. Двойственный базис. Пример: двойственное пространство к пространству многочленов степени не выше  $n$  и его базис.
6. Изоморфизм линейных пространств. Изоморфность линейных пространств одинаковой размерности. Второе двойственное пространство. Канонический изоморфизм между пространством и его вторым двойственным.
7. Евклидовы и эрмитовы пространства. Неравенство Коши–Буняковского и неравенство треугольника.
8. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Ортогональное дополнение. Проекция и ортогональная составляющая.
9. Расстояние от вектора до подпространства, угол между вектором и подпространством. Метод наименьших квадратов. Псевдорешение.
10. Ортогональные (унитарные) матрицы. Разложение невырожденной матрицы в произведение ортогональной (унитарной) на верхнетреугольную.
11. Определитель Грама. Объем  $n$ -мерного параллелепипеда. Критерий невырожденности матрицы Грама.
12. Линейные отображения. Ядро и образ линейного отображения. Теорема о сумме размерностей ядра и образа. Матрица линейного отображения. Зависимость от базисов.

13. Линейные операторы. Ядро и образ оператора. Инвариантное подпространство. Ограничение оператора и фактор-оператор. Вид матрицы оператора, обладающего инвариантным подпространством.
14. (Не)вырожденные операторы. Собственные значения и собственные векторы. Существование нетривиальных инвариантных подпространств в случае алгебраически замкнутого поля.
15. Операторы проектирования. Их алгебраическая и геометрическая характеристика.
16. Многочлены от операторов. Аннулирующий многочлен. Минимальный многочлен. Характеристический многочлен. Их корни.
17. Присоединенные векторы. Корневые подпространства. Стабилизация ядер степеней оператора.
18. Теорема Гамильтона–Кэли.
19. Теорема о разложении в прямую сумму корневых подпространств (для случая алгебраически замкнутого поля).
20. Теорема Жордана о приведении к нормальной форме.
21. Единственность Жордановой формы.
22. Овеществление и комплексификация линейных пространств и операторов.
23. Существование одномерных или двумерных инвариантных подпространств у операторов в вещественных линейных пространствах.
24. Сопряженный оператор. Единственность. Существование. Инвариантность подпространств и их ортогональных дополнений относительно оператора и его сопряженного.
25. Самосопряженные и кососимметрические операторы, их канонический вид.
26. Нормальные операторы, связь нормальности с диагонализируемостью. Одновременное приведение к каноническому виду двух самосопряженных операторов.
27. Операторы, сохраняющие скалярное произведение. Изометрии. Канонический вид унитарного оператора.
28. Канонический вид ортогонального оператора.
29. Неотрицательные операторы. Квадратный корень из неотрицательного оператора.
30. Полярное разложение операторов.
31. Билинейные, полуторалинейные, квадратичные функции. Правое и левое ядро. Невырожденность.

32. Матрица билинейной (полуторалинейной) функции, ее изменение при заменах базиса. (Косо)симметричные и (косо)эрмитовы функции.
33. Ортогональное дополнение относительно (косо)симметричной билинейной (эрмитовой полуторалинейной) функции. Его размерность. Сумма подпространства и его ортогонального дополнения. Второе ортогональное дополнение.
34. Нормальный вид (косо)симметричных билинейных функций в вещественных и комплексных линейных пространствах, эрмитовых полуторалинейных функций.
35. Теорема инерции.
36. Теорема Якоби. Критерий Сильвестра.
37. Операторы, сохраняющие невырожденную (косо)симметричную билинейную (эрмитову полуторалинейную) функцию. Соответствующие группы. Описание группы  $O(1, 1)$ .
38. Изотропные подпространства в симплектическом пространстве. Лагранжевы подпространства. Существование для любого изотропного подпространства содержащего его лагранжева подпространства.
39. Существование дополнительного лагранжева подпространства для любого лагранжева подпространства в симплектическом пространстве.
40. Канонический изоморфизм между билинейными функциями и линейными операторами в евклидовом пространстве. Приведение симметрической билинейной функции к каноническому виду в евклидовом пространстве.
41. Канонический вид квадратичной функции и принцип минимакса.
42. Приведение пары квадратичных функций к диагональному виду. Обобщенный характеристический многочлен. Теорема об одновременном приведении одной квадратичной функции к каноническому виду, а другой (положительно определенной) – к нормальному виду.
43. Тензоры. Полилинейные функции. Примеры. Тензорное произведение тензоров. Базис в пространстве тензоров.
44. Свертка тензоров. Поднятие и опускание индексов в случае евклидова пространства.
45. Симметрические и кососимметрические тензоры. Симметризация и альтернирование как проекторы.
46. Внешнее умножение кососимметрических тензоров, его свойства.
47. Базис в пространстве кососимметрических тензоров.
48. Приводимость кососимметрических тензоров.