КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

Специальный курс по выбору кафедры

Введение в теорию интегрируемых систем

проф. О. И. Мохов, доц. С. В. Смирнов

Первая часть курса посвящена изучению конечномерных интегрируемых систем. Обсуждается лагранжев и гамильтонов формализм, рассматриваются симплектические и пуассоновы многообразия и доказывается теорема Лиувилля–Арнольда. Вводится понятие представления Лакса и рассматриваются различные примеры интегрируемых систем: интегрируемые системы классической механики (задача Кеплера, волчок Эйлера, волчок Лагранжа, геодезические на трехосном эллипсоиде), цепочка Тоды, одевающая цепочка Веселова–Шабата. Вводится понятие бигамильтоновой системы и на основе бигамильтонова подхода доказывается интегрируемость некоторых систем. Вторая часть курса посвящена изучению бесконечномерных интегрируемых систем. Изучается теория рассеяния для одномерного оператора Шредингера с быстро убывающим потенциалом и на примере уравнения Кортевега-де Фриза рассматривается схема интегрирования эволюционных уравнений методом обратной задачи рассеяния. Рассматриваются теоретико-полевые скобки Пуассона и бигамильтонова теория уравнения КдФ. В конце курса обсуждаются и другие подходы к интегрируемости: на основе подхода Адлера–Бобенко–Суриса рассматриваются интегрируемые уравнения на квад-графах, обсуждаются интегрируемые по Дарбу гиперболические системы типа двумеризованной цепочки Тоды.

Продолжительность: 2 семестра, форма отчетности: экзамен.

Программа курса

1. Лагранжев формализм: элементы вариационного исчисления, уравнения Эйлера–Лагранжа, лагранжев подход в ньютоновой механике, вариационная природа геодезических, теорема Нетер, обобщенная вариационая задача с высшими производными.

2. Гамильтонов формализм: уравнения Гамильтона, гамильтоновость лагранжевых систем, скобка Пуассона и первые интегралы.

3. Симплектические и пуассоновы многообразия, теорема Дарбу. Гамильтоновые векторные поля. Симплектические листы, функции Казимира.

4. Интегрируемость по Лиувиллю: Теорема Лиувилля, переменные “действие-угол”.

5. Классические примеры: задача Кеплера, волчок Эйлера, волчок Лагранжа, геодезические на трехосном эллипсоиде.

6. Представление Лакса: нахождение первых интегралов, спектральный параметр.

7. Цепочка Тоды: представление Лакса, интегрируемость по Лиувиллю, метод обратной задачи, связь с QR-алгоритмом.

8. Одевающая цепочка Веселова–Шабата: преобразования Дарбу, представление Лакса, интегрируемость по Лиувиллю, связь с уравнениями Пенлеве.

9. Бигамильтоновы системы: схема Ленарда–Магри.

10. Изоспектральные деформации оператора Шредингера и уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ). Односолитонное решение КдФ.

11. Подход Гельфанда–Дикого: псевдодифференциальные операторы и извлечение квадратного корня из оператора Шредингера. Иерархия КдФ.

12. Элементы теории рассеяния для одномерного оператора Шредингера с быстро убывающим потенциалом.

13. Интегрирование КдФ методом обратной задачи рассеяния: уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко, уравнения Гарднера–Грина–Крускала–Миуры.

14. Безотражательные потенциалы и многосолитонные решения КдФ. Взаимодействие солитонов. Асимптотика решений КдФ.

15. Модифицированное уравнение КдФ, преобразование Миуры. Преобразования Бэклунда для КдФ. Метод Хироты.

16. Скобка Гарднера–Захарова–Фаддеева. Гамильтонова структура КдФ, бигамильтоновость.

17. Полиномиальные интегралы движения, полная интегрируемость КдФ.

18. Асимптотические линиии на поверхностях постоянной отрицательной кривизны и уравнение sin-Гордон.

19. Интегрируемые дискретные уравнения на квад-графах: трехмерная совместность, представление нулевой кривизны, формулировка классификационной теоремы Адлера–Бобенко–Суриса, постановка задачи Коши.

20. Гиперболические уравнения, явное решение уравнения Лиувилля. Преобразования Дарбу-Лапласа, инварианты Лапласа, ряд Лапласа. Интегрируемость по Дарбу.

21. Двумеризованная цепочка Тоды: представление Лакса, x-интегралы, y-интегралы. Системы экспоненциального типа. Характеристическая алгебра.