КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

Специальный курс по выбору кафедры

Геометрическая теория групп

м. н. с. В. А. Шастин

В рамках курса изучаются конечно-порожденные группы, посредством исследования геометрических и топологических свойств пространств, на которых эти группы действуют: графы Кэлли, универсальные накрывающие пространства, гиперболические пространства и кубические комплексы.

Будут разбираться классические способы изучения конечно-порожденных групп топологическими методами. Будут рассмотрены связи топологических констркуций и теорем о фундаментальной группе: накрывающих пространств и теоремы Зейферта-Ван Кампена с алгебраическими конструкциями и теоремами: амальгамированными произведениями и HNN-расширениями, а также теоремами Куроша и Грушко. Кроме того будет рассмотрен подход к изучению конечно-порожденных групп через их действия на одномерных комплексах. В рамках этого подхода будут доказана теорема Нильсена-Шрайера о подгруппах свободной группа и некоторые структурные теоремы из теории Басса–Серра групп, действующих на деревьях. Далее мы перейдем к изучению двумерных клеточных пространств. Будет доказана теорема о реализации любой группы как фундаментальной группы двумерного клеточного комплекса и с помощью этого факта будут дано топологическое доказательство теоремы Грушко. Будет рассказано о результатах Столлингса-Эпштейна обобщающих результаты теории Басса-Серра на случай групп действующих, на двумерных клеточных комплексах и ограниченность их применения. Наконец будет доказана общая теорема Брауна о структуре группы действующей на клеточном комплексе.

Продолжительность: 1 семестр, форма отчетности: экзамен.

Программа курса

1. Фундаментальная группа топологического пространства. Гомотопные отображения и гомотопическая эквивалентность топологических пространств. Ретракты. Фундаментальная группа окружности.

2. Свободные произведения групп. Редуцированные слова. Свободные группы. Задания групп образующими и отношениями.

3. Теорема Зейферта-ван Кампена. Фундаментальные группы компактных поверхностей. Группа узла. Представление Виртингера.

4. Накрывающие пространства. Тоерема о поднятии отображения. Фундаментальная группа накрывающего пространства. Автоморфизмы накрытий. Действие фундаментальной группы автоморфизмами слоя накрытия. Регулярные накрытия. Универсальное накрывающее пространство. Соответствие между классами эквивалентности накрытий и классами сопряженности подгрупп фундаментальной группы пространства.

5. Одномерные клеточные пространства. Деревья. Фундаментальная группа одномерного клеточного пространства. Эйлерова характеристика.

6. Действие групп на одномерных комплексах. Дерево представителей. Действие групп на деревьях. Свободные действия. Теорема Нильсена-Шрайера. Система Шрайера для подгруппы свободной группы. Формула для ранга подгруппы свободной группы.

7. Несвободные действия групп на деревьях. Простейшие случаи теории Басса-Серра: произведение с объединенной подгруппой и HNN- расширение. Редуцированные слова. Общий случай теории Басса-Серра: граф групп. Теорема Куроша.

8. Клеточные пространства размерности 2 и выше. Теорема о структуре фундаментальной группы клеточного комплекса. Алгоритм Столлингса и теорема Грушко.

9. Действие групп на двумерных клеточных комплексах. Теорема Столлингса-Эпштейна и проблемы с обобщением теории Басса-Серра.

10. Действие групп на клеточных пространствах. Теорема Брауна.