

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

Специальный курс по выбору студента

Геометрия и анализ операторов в конечномерных и бесконечномерных пространствах

проф. В. М. Мануйлов, проф. Е. В. Троицкий

Курс посвящен геометрическим вопросам конечномерных линейных пространств и гильбертовых пространств и общей теории операторов в этих пространствах. Особенности курса являются: 1) рассмотрение (в начале курса) конечномерных пространств, что устанавливает связь между продвинутыми вопросами линейной алгебры и вопросами функционального анализа, 2) освещение, в том числе, тех вопросов, которые не рассматриваются в курсе функционального анализа (в середине курса), 3) нацеленность на топологические приложения (конец курса).

В частности, рассматривается спектральная теория нормальных операторов в конечномерном пространстве, включая неравенства для собственных значений и сингулярных чисел и изучение экстремальных свойств. Рассматриваются вопросы геометрии проекторов и подпространств в (бесконечномерных) гильбертовых пространствах, включая разложение подпространств. Изучаются различные топологии в пространстве и в пространстве операторов. Развивается спектральная теория нормальных операторов, включая рассмотрение важных примеров. Наконец, доказывается стягиваемость унитарной группы сепарабельного гильбертова пространства в сильной топологии (теорема Диксмье-Дуади) и в топологии нормы (теорема Кюйпера).

Продолжительность: 2 семестра, форма отчетности: экзамен.

Программа курса

1. Спектральная теория унитарных операторов в конечномерном пространстве.
2. Преобразование Кэли. Полярное представление оператора.
3. Спектральная теория нормальных операторов
4. Экстремальные свойства собственных значений.
5. Норма и спектральный радиус оператора.
6. Нормы в пространстве операторов.
7. Неравенства между нормами степеней оператора.
8. Неравенства между собственными значениями и сингулярными числами.
9. Гильбертовы пространства.
10. Замкнутые подпространства. Решетка подпространств.
11. Проекторы. Разложение двух подпространств.
12. Функционалы, слабая топология.
13. Слабая компактность единичного шара.
14. Бесконечные матрицы и операторы в гильбертовом пространстве.

15. Ограниченность и обратимость операторов.
16. Спектр.
17. Операторы умножения. Их спектр.
18. Теорема об отображении спектра.
19. Спектральный радиус.
20. (Полу)непрерывность спектра.
21. Числовой образ.
22. Частичные изометрии. Максимальные частичные изометрии. Полярное разложение.
23. Унитарные операторы. Связность. Плотность. Открытость.
24. Унитарная группа в топологии нормы. Теорема Кюйпера.
25. Унитарная группа в сильной топологии. Теорема Диксмье-Дуади.
26. Билнейные функции на гильбертовом пространстве.