

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

Специальный курс по выбору кафедры

Конечномерные интегрируемые гамильтоновы системы

проф. О. И. Мохов, доц. С. В. Смирнов

Курс посвящен изучению гамильтоновой теории конечномерных интегрируемых систем. Обсуждается лагранжев и гамильтонов формализм, рассматриваются симплектические и пуассоновы многообразия и доказывается теорема Лиувилля–Арнольда. Вводится понятие представления Лакса и рассматриваются различные примеры интегрируемых систем: интегрируемые системы классической механики (задача Кеплера, волчок Эйлера, волчок Лагранжа, геодезические на трехосном эллипсоиде), цепочка Тоды, одевающая цепочка Веселова–Шабата. Вводится понятие бигамильтоновой системы и на основе бигамильтонова подхода доказывается интегрируемость некоторых систем. В конце курса на основе подхода Адлера–Бобенко–Суриса рассматриваются интегрируемые уравнения на квад-графах.

Продолжительность: 1 семестр, форма отчетности: экзамен.

Программа курса

1. Лагранжев формализм: элементы вариационного исчисления, уравнения Эйлера–Лагранжа, лагранжев подход в ньютоновой механике, вариационная природа геодезических, теорема Нетер, обобщенная вариационная задача с высшими производными.
2. Гамильтонов формализм: уравнения Гамильтона, гамильтоновость лагранжевых систем, скобка Пуассона и первые интегралы.
3. Симплектические и пуассоновы многообразия, теорема Дарбу. Гамильтоновы векторные поля. Симплектические листы, функции Казимира.
4. Интегрируемость по Лиувиллю: Теорема Лиувилля, переменные “действие-угол”.
5. Классические примеры: задача Кеплера, волчок Эйлера, волчок Лагранжа, геодезические на трехосном эллипсоиде.
6. Представление Лакса: нахождение первых интегралов, спектральный параметр.
7. Цепочка Тоды: представление Лакса, интегрируемость по Лиувиллю, метод обратной задачи, связь с QR -алгоритмом.
8. Одевающая цепочка Веселова–Шабата: преобразования Дарбу, представление Лакса, интегрируемость по Лиувиллю, связь с уравнениями Пенлеве.
9. Бигамильтоновы системы: схема Ленарда–Магри.
10. Интегрируемые дискретные уравнения на квад-графах: трехмерная совместность, представление нулевой кривизны, формулировка классификационной теоремы Адлера–Бобенко–Суриса, постановка задачи Коши.