

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

Специальный курс по выбору кафедры

Элементы вариационного исчисления

проф. И. А. Дынников

В курсе рассматриваются классические одномерные и многомерные вариационные задачи, возникающие в геометрии и физике, и вывод важных уравнений из вариационного принципа.

Предполагается знание элементов дифференциальной геометрии, дифференциального исчисления тензоров и дифференциально-геометрических связностей.

Продолжительность: 1 семестр, форма отчетности: экзамен.

Программа курса

1. Экстремум функции, ограниченной на подмногообразии. Множители Лагранжа.
2. Постановка одномерной вариационной задачи. Уравнения Эйлера–Лагранжа.
3. Задача Дидоны. Задача о брахистохроне. Эластики.
4. Функционал действия. Геодезические.
5. Циклические координаты и первые интегралы. Теорема Нётер. Возникновение «магнитного поля» при исключении переменной.
6. Вторая вариация функционала действия. Поле Якоби. Сопряженные точки. Конечность индекса второй вариации.
7. Лагранжевы системы с неголономными связями. Шар Чаплыгина.
8. Постановка многомерной вариационной задачи. Многомерные уравнения Эйлера–Лагранжа.
9. Минимальные поверхности. Мыльные пленки, ограничивающие фиксированный объем.
10. Функционал Уиллмора. Функционал Дирихле. Гармонические отображения.
11. Симметрии вариационной задачи. Теорема Нётер в теории поля. Тензор энергии–импульса.
12. Функционал Янга–Миллса. Уравнения Максвелла и Янга–Миллса. Автодуальные связности.
13. Функционал Гильберта. Вариационная производная по связности. Уравнения Эйнштейна.
14. Лагранжианы Лавлока.
15. Функционал Черна–Саймонса, его экстремали и траектории градиентного спуска.