

# КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

Специальный курс по выбору кафедры

## Связности в векторных расслоениях

проф. И. А. Дынников

В курсе излагаются основы теории векторных расслоений со структурной группой, дифференциально-геометрической связности, параллельного переноса и кривизны. Даются различные способы определения этих понятий и обсуждаются их основные свойства. Обсуждаются различные конструкции и вариационные задачи, использующие понятия связности и кривизны: рациональные характеристические классы, уравнения теории поля, функционал Черна–Саймонса, инстантоны.

Курс предполагает знакомство с понятиями гладкого многообразия и тензорного поля.

Продолжительность: 2 семестра, форма отчетности: экзамен.

### Программа курса

1. Группа Ли, левые и правые сдвиги. Левоинвариантные векторные поля. Алгебра Ли группы Ли.
2. Представления групп и алгебр Ли.
3. Инвариантные тензоры на группах Ли. Форма Киллинга. Инвариантные симметрические тензоры на  $\mathfrak{u}(n)$  и  $\mathfrak{so}(n)$ .
4. Инвариантные дифференциальные формы на группе Ли, формы со значениями в алгебре.
5. Локально тривиальные расслоения. Примеры: тривиальное, касательное, тавтологическое расслоения.
6. Послойные отображения, обобщенное гауссово отображение в многообразии Грассмана.
7. Функции перехода. Задание расслоения с помощью функций перехода. Индуцированное расслоение при отображении баз.
8. Расслоения со структурной группой. Векторные расслоения.
9. Главные расслоения. Векторные расслоения, ассоциированные с главным.
10. Операции над векторными расслоениями. Сумма Уитни. Гладкие функторы.
11. Гладкие сечения локально тривиальных расслоений.
12. Связность в расслоении как распределение горизонтальных плоскостей. Параллельный перенос.
13. Связности, согласованные со структурной группой.
14. Поднятие векторных полей на базе. Локально плоские связности.
15. Задание связности в локальных координатах. Калибровочные преобразования.
16. Ковариантное дифференцирование сечений. Свойства ковариантного дифференцирования.
17. Форма кривизны. Связь кривизны с параллельным переносом и ковариантным дифференцированием.

18. Каноническая связность в тавтологическом расслоении. Индуцированная связность при отображении баз.
19. Связность в главном расслоении. Форма связности. Применение гладкого функтора к связности.
20. Ковариантный дифференциал дифференциальной формы. Ковариантное дифференцирование в терминах тотального пространства. Гомологии с локальными коэффициентами.
21. Аффинное пространство связностей. Существование связностей в расслоении.
22. Классификация расслоений в терминах гомотопических классов отображений в классифицирующее пространство.
23. Связность в касательном расслоении. Тензор кручения. Тензор Римана.
24. Связность Леви–Чивиты. Кэлерова метрика. Примеры кэлеровых многообразий.
25. Дифференциальное тождество Бианки. Характеристические классы расслоений.
26. Характеристические классы Черна и Понтрягина. Свойства классов Черна и Понтрягина.
27. Характеристический класс Эйлера. Связь класса Эйлера с гауссовой кривизной четномерной гиперповерхности.
28. Функционал Гильберта. Уравнения Эйнштейна.
29. Функционал Черна–Саймонса. Плоские связности как экстремали.
30. Функционал Янга–Миллса. Уравнения Максвелла. Автодуальные связности. Топологический заряд.
31. Голоморфные и эрмитовы расслоения. Их связь с автодуальностью.
32. Конструкция ADHM инстантонов в четырехмерном пространстве.