КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

Специальный курс по выбору кафедры

Комбинаторика выпуклых многогранников

чл.-корр. РАН В. М. Бухштабер, проф. Т. Е. Панов, к.ф.-м.н. Н. Ю. Ероховец

Курс посвящён основам теории выпуклых многогранников. Вводятся основные понятия, связанный с выпуклыми многогранниками (различные способы задания, грани, конусы и полиэдры, граф многогранника, двойственность Гейла, циклические многогранники, шеллинговость, нестоэдры), доказываются основные теоремы о комбинаторике выпуклых многогранников (теорема об эквивалентности двух способов задания многогранника, теорема Штейница, формула Эйлера-Пуанкаре, соотношения Дена-Соммервилля). Рассматривается много примеров многогранников.

Продолжительность: 1 семестр, форма отчетности: экзамен.

Программа курса

1. Основные понятия.
   (a) Два определения многогранника: выпуклая оболочка конечного набора точек и ограниченное пересечение замкнутых полупространств.
   (b) Вершины как крайние точки многогранника.
   (c) Грани многогранника как пересечения многогранника с опорными плоскостями.
   (d) Комбинаторно эквивалентные многогранники.
   (e) Двойственный многогранник.
   (f) Операции с многогранниками.
2. Примеры многогранников.
   (a) Циклический многогранник. Условие чётности Гейла.
   (b) Смежностные многогранники.
   (c) Пермутоэдр $Pe(1, 2, \ldots, n)$.
   (d) Многогранники Ньютона. Пермутоэдр как многогранник Ньютона определителя Вандермонда.
3. Конусы и полиэдры.
   (a) Задание полиэдра неравенствами и образующими.
   (b) Грани полиэдров.
   (c) Конусы и веера.
   (d) Нормальный веер многогранника.
   (e) Конус в вершине многогранника.
   (f) Вершинная и гранная фигуры многогранника.
4. Нестоэдры.
   (a) Сумма Минковского многогранников. Зонотопы.
   (b) Нормальный веер суммы Минковского многогранников.

(c) Пурмутоэдр $Pe(1, 2, \ldots, 2^n)$ как сумма Минковского всех граней симплекса Δ^{n+1}.

(d) Определение нестоэдра.

(e) Простота нестоэдра. Описание его вершин.

(f) Граф-ассоциэдры: ассоциэдр, звездоэдр, пермутоэдр, циклоэдр.

5. Нестоэдры и дифференциальные уравнения.

   (a) Перечисляющие многочлены: f- и h-многочлен.

   (b) Кольцо комбинаторных многогранников.

   (c) Доказательство формулы $f(dP) = \frac{\partial}{\partial t} f(P)$ для простых многогранников.

   (d) Последовательности многогранников и их производящие функции.

   (e) Дифференциальные уравнения для последовательностей пермутоэдров, ассоциэдров, звездоэдров и циклоэдров.

6. Двойственность Гейла и диаграммы Гейла.

   (a) Преобразование Гейла и его основные свойства.

   (b) Диаграммы Гейла: плоские, сферические, многогранников.

   (c) Классификация многогранников с $m \leqslant n + 3$ гипергранями.

   (d) Конструкция многогранника $P(a_1, \ldots, a_m)$ (i-ая точка в диаграмме Гейла берётся a_i раз).

7. Шеллинговость многогранников. Формула Эйлера-Пуанкаре. g-теорема.

   (a) Полиэдральные комплексы. Шеллинговость. g-теорема.

   (b) Шеллинг Брюггерсера-Мани многогранников.

   (c) Доказательство формулы Эйлера-Пуанкаре.

   (d) Соотношения Дена-Соммервилля для простого многогранника как следствие формулы $f(dP) = \frac{\partial}{\partial t} f(P)$.

   (e) Формулировка и идея доказательства g-теоремы.

8. Графы многогранников. Теорема Штейница.

   (a) Линейные функции в общем положении.

   (b) Теорема Балинского о n-связности графа n-мерного многогранника.

   (c) Теорема Штейница.

      i. Кусочно-линейные теоремы Жордана и Шёнфлиса.

      ii. Наличие 3-валентной вершины или 3-угольника у любого простого планарного 3-связного графа.

      iii. Редукции.

      iv. Медиальные графы и многогранники. Связь с теоремой Кёбе-Андреева-Тёрстона.

      v. Линзовые графы. Завершение доказательства.