КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

Обязательный курс

Классическая дифференциальная геометрия

проф. О. И. Мохов

В курсе обсуждаются следующие сюжеты: (би)-регулярные кривые, их кривизна и кручение, формулы Френе, криволинейные координаты, риманова метрика, деривационные формулы, регулярные поверхности в n-мерном пространстве, первая и вторая квадратичные формы гиперповерхности, фундаментальные уравнения теории поверхностей, теорема Бонне, главные кривизны, гауссова и средняя кривизна, теорема Гаусса, геодезическая кривизна кривой, геодезические линии, ковариантное дифференцирование на поверхности, параллельный перенос.

Продолжительность: 1 семестр (4 часа в неделю), форма отчетности: зачет, экзамен.

Программа курса

1. Элементарная кривая (простая дуга) в n-мерном евклидовом пространстве, параметризация. Параметризованные кривые, эквивалентность. Регулярные кривые. Различные способы задания регулярной кривой в n-мерном евклидовом пространстве, их локальная эквивалентность.
2. Касательная прямая к регулярной кривой в n-мерном евклидовом пространстве, ее свойства. Соприкосновение кривых в n-мерном евклидовом пространстве, порядок соприкосновения.
3. Длина кривой в n-мерном евклидовом пространстве. Натуральная параметризация, ее свойства. Кривизна кривой в n-мерном евклидовом пространстве, ее геометрический смысл и свойства. Вектор кривизны кривой.
4. Бирегулярные кривые в n-мерном евклидовом пространстве. Вектор главной нормали и соприкасающаяся плоскость бирегулярной кривой в n-мерном евклидовом пространстве. Радиус кривизны кривой в n-мерном евклидовом пространстве, соприкасающаяся окружность, ее свойства.
5. Формулы для вектора кривизны и кривизны кривой в n-мерном евклидовом пространстве для произвольной регулярной параметризации.
6. Плоские кривые. Коориентация кривой и кривизна со знаком. Формулы Френе плоской кривой. Натуральные уравнения плоской кривой и теорема о восстановлении плоской кривой по кривизне. Явные формулы восстановления плоской кривой по кривизне. Интеграл кривизны по замкнутому плоскому контуру.
7. Эволюта и эвольвента плоской кривой, их свойства.
8. Кривые в трехмерном евклидовом пространстве. Репер Френе вдоль кривой и формулы Френе. Кривизна и кручение пространственной кривой, их свойства и геометрический смысл.
9. Вектор Дарбу пространственной кривой, его геометрический смысл.
10. Соприкасающаяся, нормальная и спрямляющая плоскости пространственной кривой. Локальный вид кривой в проекциях на соприкасающуюся, нормальную и спрямляющую плоскости.
11. Формулы для кручения пространственной кривой в натуральной и произвольной параметризациях.
12. Натуральные уравнения пространственной кривой и теорема о восстановлении пространственной кривой по кривизне и кручению.
13. Репер Френе вдоль кривой в n-мерном евклидовом пространстве, формулы Френе и теорема о восстановлении кривой по кривизнам.
14. Поле реперов Френе вдоль кривой в n-мерном евклидовом пространстве и кривая в группе ортогональных преобразований, кососимметричность ее вектора скорости в единице группы.
15. Криволинейные системы координат в области n-мерного евклидова пространства. Координатные линии и координатные поверхности, их регулярность. Репер векторов скорости координатных линий, его матрица Грама и ее свойства.

16. Понятие о римановых и псевдоримановых метриках, заданных в области евклидова пространства. Метрика евклидова пространства в криволинейных координатах. Преобразование метрики при замене координат.
17. Деривационные формулы для репера векторов скорости координатных линий криволинейной системы координат n-мерного евклидова пространства. Символы Кристоффеля, их явное выражение через метрику и закон преобразования.
18. Совместные системы дифференциальных уравнений и теорема Дарбу об условиях совместности системы дифференциальных уравнений специального типа.
19. Условия совместности деривационных уравнений для репера векторов скорости координатных линий криволинейной системы координат n-мерного евклидова пространства. Тензор кривизны Римана. Плоские римановы метрики. Евклидовы координаты для плоских римановых метрик. Условия совместности линейных систем ("уравнения нулевой кривизны").
20. Элементарное k-мерное подмногообразие (элементарная k-мерная поверхность) в n-мерном евклидовом пространстве. Параметризация. Регулярные k-мерные поверхности. Различные способы задания регулярных k-мерных поверхностей, их локальная эквивалентность.
21. Координаты на k-мерной поверхности. Координатные линии на k-мерной поверхности, их векторы скорости. Касательное пространство в точке k-мерной поверхности и его свойства, базис в касательном пространстве, его матрица Грама и ее свойства. Нормальное пространство в точке k-мерной поверхности, его свойства, ортонормированный базис в нормальном пространстве.
22. Векторные поля на k-мерных поверхностях в n-мерном евклидовом пространстве. Необходимые и достаточные условия на векторные поля, задаваемые векторами скорости координатных линий некоторой системы координат на k-мерной поверхности. Коммутатор векторных полей.
23. Первая квадратичная форма k-мерной поверхности как пример римановой метрики, свойства и закон преобразования, квадратичная форма в касательных пространствах k-мерной поверхности.
24. Разложения Гаусса и Вайнгартена для k-мерной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве (деривационные формулы). Символы Кристоффеля, закон преобразования. Вторые квадратичные формы и коэффициенты кручения k-мерной поверхности. Операторы Вайнгартена, их выражение через первую и вторые квадратичные формы k-мерной поверхности.
25. Условия совместности деривационных уравнений и фундаментальные уравнения теории подмногообразий в n-мерном евклидовом пространстве. Уравнения Гаусса для k-мерного подмногообразия в n-мерном евклидовом пространстве и тензор кривизны Римана.
26. Уравнения Петерсона–Майнарди–Кодацци и уравнения Риччи для k-мерного подмногообразия в n-мерном евклидовом пространстве. Формулировка теоремы Бонне для k-мерных подмногообразий в n-мерном евклидовом пространстве. Подмногообразия без кручения. Гиперповерхности.
27. Двумерные поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. Способы задания, их локальная эквивалентность.
28. Разложения Гаусса и Вайнгартена для двумерных поверхностей (деривационные формулы). Первая и вторая квадратичные формы. Символы Кристоффеля, закон преобразования. Оператор Вайнгартена.
29. Условия совместности деривационных уравнений и фундаментальные уравнения теории поверхностей. Уравнения Гаусса и тензор кривизны Римана.
30. Уравнения Петерсона–Майнарди–Кодацци для двумерных поверхностей. Тензор Кодацци и его симметричность.
31. Теорема Бонне для двумерных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве.
32. Кривые на поверхности. Условие пересечения двух регулярных поверхностей по регулярной кривой. Нормальная составляющая вектора ускорения кривой на поверхности. Нормальные сечения поверхности. Кривизна нормального сечения.

33. Кривизна кривой на поверхности. Асимптотические направления. Теорема Менье. Примеры применения теоремы Менье.
34. Главные кривизны и главные направления. Собственные значения пары фундаментальных квадратичных форм поверхности. Теорема Эйлера. Экстремальные свойства главных кривизн.
35. Гауссова кривизна и средняя кривизна поверхности. Различные типы точек на поверхности, их свойства. Индикатриса Дюпена.
36. Соприкасающийся параболоид.
37. Оператор Вайнгартена, его собственные значения и собственные направления. Формулы Родрига. Сферическое отображение (отображение Гаусса) и оператор Вайнгартена.
38. Сопряженные направления в касательной плоскости. Сопряженная координатная сеть. Ортогональная сопряженная координатная сеть. Линии кривизны.
39. Теорема Гаусса (Egregium).
40. Изометрия, локальная изометрия. Инварианты локальной изометрии. Изгибание поверхностей. Внутренняя геометрия поверхности.
41. Нормальная и геодезическая кривизна кривой на поверхности. Формулы для геодезической кривизны кривой. Теорема Гаусса–Бонне для многоугольников на поверхности и для замкнутых поверхностей (формулировки, с эйлеровой характеристикой).
42. Геодезические линии на поверхности. Уравнения геодезических линий, их свойства. Теорема о существовании и единственности геодезической линии в данном направлении на поверхности.
43. Поверхности вращения. Теорема Клеро.
44. Уравнения Эйлера–Лагранжа. Геодезические как экстремали функционала длины.
45. Полугеодезические координаты и их свойства. Теорема о существовании полугеодезических координат на поверхности.
46. Геодезические как локально кратчайшие кривые на поверхности.
47. Классификация поверхностей постоянной гауссовой кривизны с точностью до локальной изометрии.
48. Ковариантная производная векторного поля вдоль кривой на поверхности. Параллельный перенос векторов вдоль кривой на поверхности. Ковариантное дифференцирование на поверхности.