КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

Специальный курс по выбору студента

Разветвленные накрытия многообразий и действия конечных групп

ст. преп. Д. В. Гугнин

Разветвленные накрытия многообразий размерности большей 2 и действия конечных групп — это классическая отрасль алгебраической топологии, которая недавно обогатилась новыми алгебраическими методами. В центре внимания этой науки в 60-70е годы была классификация множества неподвижных точек действия конечной группы на заданном многообразии. В последние 10 лет возник новый подход к двум другим постановкам в этой области математики.

Первая постановка — это нахождение наиболее сильных нижних оценок на степень возможного разветвленного накрытия между двумя заданными многообразиями. Здесь возник метод gt_n-формулы (Гугнин, 2018), связанной с групповым трансфером и техникой n-гомоморфизмов Фробениуса (Бухштабер, Рис, 1996, Гугнин, 2011). Этот метод на данный момент является самым сильным в этой задаче.

Вторая постановка — нахождение явных конструкций разветвленных накрытий разного рода серий многообразий над сферами. Дубль-конструкция (Гугнин, 2019) позволила построить явное 2^{k-1}-листное разветвленное накрытие произведения k штук сфер произвольной размерности над сферой. До этого в размерности 5 и выше существовала только неэффективная конструкция Александера (1920), годящаяся для любого PL многообразия.

Также в конце спецкурса планируется затронуть тему симметрических степеней римановых поверхностей и схем Гильберта точек на $\mathbb{C}^2$. Спецкурс рассчитан на студентов старших курсов и аспирантов, интересующихся алгебраической топологией и топологией многообразий, а также их приложениями к алгебраической геометрии.

Продолжительность: 1 семестр, форма отчетности: экзамен.

Программа курса

1. Общая теория G-пространств, где G — конечная группа
2. Симплициальные комплексы (конечные и счетные), барицентрическое подразбиение и его итерации
3. Симплициальные когомологии и усреднение по действию конечной группы (групповой трансфер)
4. Степень отображения и доминирование ориентируемых многообразий, связь с фундаментальной группой
5. PL многообразия и кусочно-линейные (конечнолистные) разветвленные накрытия многообразий. Коразмерность множества ветвления
6. Несовпадение (даже с точностью до гомотопии) понятия доминирования и понятия разветвленного накрытия
7. Конструкция Александера (1920) разветвленного накрытия произвольного ориентируемого PL многообразия над сферой
8. Существование 2-листного разветвленного накрытия над сферой в размерности 2 (гиперэллиптические поверхности)

9. Теорема Хирша-Хилдена-Монтезиноса (1974) о существовании 3-листного разветвленного накрытия над сферой в размерности 3

10. Рациональная когомологическая длина пространства и оценка Берстейна-Эдмондса (1978)

11. gt_n-формула (Гугнин, 2018) как самый сильный на сегодняшний день метод получения нижних оценок на степень разветвленных накрытий многообразий

12. Вывод оценки Берстейна-Эдмондса из gt_n-формулы

13. n-гомоморфизмы Фробениуса коммутативных неградуированных алгебр (Бухштабер, Рис, 1996). n-гомоморфизмы Фробениуса градуировано коммутативных алгебр (2011). Доказательство gt_n-формулы

14. Дубль-конструкция (Гугнин, 2019). Конструкция действия $\mathbb{Z}_2^{k-1}$ на произведении k штук сфер произвольных размерностей с факторпространством гомеоморфным сфере

15. Симметрические степени римановых поверхностей. Симметрические степени $\mathbb{C}^2$. Схемы Гильберта точек как каноническое разрешение особенностей симметрических степеней $\mathbb{C}^2$. Открытые проблемы