МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.Ломоносова
механико-математический факультет

Минимальные триангуляции многообразий

Курсовая работа
студента 3-го курса 303-ей группы
кафедры высшей геометрии и топологии
Зейникешевой Индиры Кайратовны

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, профессор
Панов Тарас Евгеньевич

Москва, 2015 г.

Содержание

1. Введение.

В данной курсовой работе рассматриваются неприводимые и минимальные триангуляции тора, а также устанавливается связь между эйлеровой характеристикой и числом вершин минимальной триангуляции многообразия.
Торическая топология активно развивается последние тридцать-сорок лет. Основным предметом изучения являются действия тора на топологических пространствах, пространства орбит которых в некоторых случаях приводят к интересным комбинаторным структурам (триангулированные многообразия, симплициальные комплексы, клеточные комплексы и т.д.), позволяющих полностью восстановить действие. В данной работе изучены базовые определения и конструкции, а также основные свойства тора и его триангуляций, позволяющие сделать первые шаги в данной области и прочувствовать предмет.
Также была проанализирована статья Лавренченко С.А. о триангуляциях тора, в которой показано, что все триангуляции тора порождаются из 21-й неприводимой триангуляции тора последовательностями операций вершинного расщепления.

2. Постановка.

Для изучения и решения вопросов данной курсовой работы, введем основные определения и базовые конструкции.

2.1. Многогранники.

Дадим основные определения и конструкции. Есть два эквивалентных способа определения выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^n$.
Определение 1.1. Выпуклым многогранником называется выпуклая оболочка конечного набора точек в некотором пространстве $\mathbb{R}^n$.
Определение 1.2. Выпуклым полиэдром называется пересечение P конечного набора полупространств в некотором пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$P = \{\, x \in \mathbb{R}^n \colon (l_i, x) \geqslant -a_i,\ i = 1, \dots, m \,\}$$

где $l_i \in (\mathbb{R}^n)^*$ — некоторые линейные функции, $a_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, m$. Ограниченный выпуклый полиэдр называется (выпуклым) многогранником.
Размерность многогранника - это размерность его аффинной оболочки. Аффинная гиперплоскость H, пересекающая многогранник P^n, называется его несущей гиперплоскостью, если многогранник целиком содержится в одном из двух определяемых ей замкнутых

полупространств. Тогда пересечение $P \cap H$ называется гранью многогранника. Грани, кроме самого многогранника, называются собственными. Объединение всех собственных граней называется границей. Нульмерные грани называются вершинами, одномерные - ребрами, а грани коразмерности один - гипергранями.
Симплексом Δ^n размерности n называется выпуклая оболочка набора из $(n+1)$ - точек в $\mathbb{R}^n$, не лежащих в одной аффинной гиперплоскости. Все грани n - симплекса являются симплексами размерности не выше n.
Существует понятие многогранника общего положения.
Набор из $m > n$ точек $\mathbb{R}^n$ находится в общем положении, если никакие $n+1$ из них не лежат на одной аффинной гиперплоскости. Тогда можем ввести определение симплициального многогранника. Многогранник называется симплициальным, если он, с позиции определения 1, является многогранником общего положения, т.е. является выпуклой оболочкой точек в общем положении. Все его собственные грани - симплексы.
Считаем, что набор из $m > n$ гиперплоскостей $(l_i, x) = -a_i$, $l_i \in (\mathbb{R}^n)^*$ находится в общем положении, если никакая точка не содержится более чем в n гиперплоскостях из этого набора. С позиции определения 2, многогранник является многогранником общего положения, если ограничивающие его гиперплоскости находятся в общем положении. Многогранник называется простым, если в каждой его вершине сходится ровно n гиперграней.
Определение 1.3. Для выпуклого многогранника $P \in \mathbb{R}^n$ определим его полярное множество $P^* \in (\mathbb{R}^n)^*$ как

$$P^* = \{l \in (\mathbb{R}^n)^* : (l, x) \geqslant -1 \text{ для всех } x \in P\}.$$

Многогранник P^* называется полярным (или двойственным) к P. Частично упорядоченное множество граней многогранника P^* получается из множества граней многогранника P обращением отношения порядка. Например, если P — простой многогранник, то P^* — симплициальный, и наоборот.

Введем понятие f-вектора (или вектора граней), которое является одним из основных в комбинаторной теории многогранников.

Определение 1.4. Пусть S — симплициальный многогранник. Обозначим через f_i число его i-мерных граней. Целочисленный вектор $f(S) = (f_0, \ldots, f_{n-1})$ называется f-вектором многогранника S. Дальше пусть $f_{-1} = 1$. Введем h-вектор многогранника S как целочисленный вектор $h(S) = (h_0, h_1, \ldots, h_n)$, определяемый из уравнения

$$h_0 t^n + \ldots + h_{n-1} t + h_n = (t-1)^n + f_0 (t-1)^{n-1} + \ldots + f_{n-1}.$$

И последовательность $(g_0, g_1, \ldots, g_{[\frac{n}{2}]})$, где $g_0 = 1, g_i = h_i - h_{i-1}$, $i > 0$, называется g-вектором многогранника S.

Для простого n-многогранника определим его f-вектор как f-вектор полярного симплициального многогранника: $f(P) := f(P^*)$, аналогично определяются $h-$ и g-векторы. Получаем, $f(P) = (f_0, \ldots, f_{n-1})$, где f_i — число граней многогранника коразмерности $(i+1)$ (т.е. размерности $(n-i-1)$). В частности, f_0 есть число гиперграней, которое обозначим $m(P)$ или просто m.
f-вектор и h-вектор можно выразить друг через друга:

$$(1)\qquad h_k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{n-i}{n-k}f_{i-1}, \qquad f_{n-1-k} = \sum_{q=k}^{n}\binom{q}{k}h_{n-q},\ k = 0, \ldots, n.$$

В частности, $h_0 = 1$ и $h_n = (-1)^n(1 - f_0 + f_1 + \ldots + (-1)^n f_{n-1})$. В силу формулы Эйлера

$$f_0 - f_1 + \ldots + (-1)^{n-1}f_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1},$$

что эквивалентно соотношению

$$\mathrm{h}_n = h_0 (= 1).\ (2)$$

Для простых многогранников формулу Эйлера можно обобщить до соотношений Дена—Соммервилля:

Теорема 1. Для любого простого (или симплициального) n-многогранника h-вектор симметричен, т.е. имеет место соотношение

$$h_i = h_{i-1},\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Приведем теперь соотношения Дена-Соммервилля для многообразий.

Теорема 2. Следующие соотношения имеют место для h-вектора $(h_0, h_1, \ldots, h_n)$ произвольного триангулированного многообразия K^{n-1}:

$$h_{n-i} - h_i = (-1)^i(\chi(K^{n-1}) - \chi(S^{n-1}))\binom{n}{i}, i = 0, 1, \ldots, n,$$

где $\chi(S^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}$ — эйлерова характеристика $n-1$-сферы. Заменяя $\chi(K^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}h_n$ и $\chi(S^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}$, получим

$$\chi(K^{n-1}) - \chi(S^{n-1}) = (-1)^{n-1}(h_n - 1) = h_n - 1,$$

где коэффициент $(-1)^{n-1}$ может быть опущен, так как для нечетных левая часть обращается в нуль.

Следствие. Пусть K^{n-1} — триангулированное многообразие с h-вектором $(h_0, \ldots, h_n)$. Тогда

$$h_{n-i} - h_i = (-1)^i (h_n - 1)\binom{n}{i},\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

2.2. Минимальные триангуляции многообразий.

В дальнейшем будут рассматриваться триангуляции многообразий, и в частности, тора. Введем некоторые понятия.

Определение 2.1. Графом называется топологическое пространство со структурой 0-мерного или 1-мерного симплициального комплекса; его 0-мерные симплексы называются вершинами, а 1-мерные - ребрами. Триангуляцией многообразия M^2 с графом G называется укладка графа G на 2-мерном многообразии M^2, разбивающая его на области (грани), если каждая область ограничена ровно тремя вершинами и тремя ребрами и две любые области либо имеют одну общую вершину, либо одно общее ребро, либо не имеют общих элементов графа. Следовательно, в триангуляции нет "петель"(ребер с совпадающими обоими концами), и "кратных ребер"(соединяющих одну и ту же пару вершин). Триангуляция многообразия называется минимальной, если она имеет минимальное возможное число вершин.

Предложение.

Пусть двумерная поверхность M^2 допускает смежностную триангуляцию с m вершинами. Тогда эта триангуляция является минимальной и выполнены следующие условия:

а) если M^2 — ориентируемая поверхность рода g, то

$$g = \frac{(m-3)(m-4)}{12}$$

и, следовательно, $m \equiv s \mod 12$, где $s = 0, 3, 4, 7$.

б) если M^2 — неориентируемая поверхность — сфера с k вклеенными листами Мебиуса, то

$$k = \frac{(m-3)(m-4)}{6}$$

и, следовательно, $k \equiv s \mod 6$, где $s = 0, 1, 3, 4$.

Доказательство: Заметим, что для двумерного триангулированного многообразия M^2 с m вершинами и эйлеровой характеристикой $\chi = \chi(M^2)$, можно с помощью теоремы 2 (соотношения Дена-Соммервилля) выразить f-вектор комплекса M^2 через χ и m:

$$\mathrm{f(M^2)} = (m,\ 3(m-\chi),\ 2(M-\chi)).\ (3)$$

Действительно, из условий о триангуляции многообразия: $f_0 = m$, а по формуле (1) можно выразить h_2 и h_1 через f_i:

$h_2 = \binom{3}{1}f_{-1} - \binom{2}{1}f_0 + \binom{1}{1}f_1 = 3 - 2m + f_1;$

$h_1 = -\binom{3}{2}f_{-1} + \binom{2}{2}f_0 = -3 + f_0 = m - 3;$
В силу (2) $h_0 = 1, h_3 = 1$, и из теоремы 2 при $i = 1, n = 3$ получаем:
$h_2 - h_1 = -3(\chi - \chi(S^{n-1}))$, где $\chi(S^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1} = [n = 3] = 2;$
$3 - 2m + f_1 - m + 3 = -3(\chi - 2).$
Откуда: $f_1 = 3(m - \chi)$.
Так как $f_0 - f_1 + \ldots + (-1)^{n-1}f_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1}$ и $\chi = 1 + (-1)^{n-1}h_n$, получаем, что $f_2 = \chi - f_0 + f_1 = \chi - m + 3(m - \chi) = 2(m - \chi)$. Т.е. $f(M^2) = (m, 3(m - \chi), 2(M - \chi))$. Отсюда, так как число ребер в триангуляции не превышает числа пар вершин, получаем неравенство:

$$6(\text{m-}\chi) \leqslant m(m-1). \ (4)$$

Заметим, что минимальная триангуляция двумерного многообразия является смежностной, тогда и только тогда, когда неравенство (4) превращается в равенство:

$$6(\text{m-}\chi) = m(m-1). \ (5)$$

Действительно, пусть минимальная триангуляция смежностна, т.е. любые две вершины соединены ребром. А значит, число ребер равно числу всевозможных пар вершин, что и означает выполнение равенства в (4). Если же выполнено равенство (5) означающее что число ребер равно числу пар вершин, т.е. все вершины соединены между собой ребром, следовательно триангуляция смежностна.
Рассмотрим неравенство (4). В случае а), $\chi = 2 - 2g$. Подставим выражение χ в (4). Получим:
$6m - 12 + 12g \leqslant m(m-1) \Rightarrow m^2 - 7m + 12 \leqslant 12g \Rightarrow$

$$\text{g} \leqslant \frac{(m-3)(m-4)}{12} \ (6)$$

Если исходная смежностная триангуляция минимальна, тогда выполняется (5), а следовательно и (6) превращается в равенство, что нам и нужно. (в силу неотрицательности целого числа g следует, что $m \equiv s \mod 12$, где $s = 0, 3, 4, 7$) Покажем теперь, что из того, что триангуляция смежностная следует ее минимальность.
Предположим противное. Тогда существует триангуляция с меньшим числом вершин m': $m' < m$. Так как для любой триангуляции

число ребер не превышает числа пар вершин, то и для m' верно: $6(m'-\chi) \leqslant m'(m'-1)$. Как и выше подставив сюда $\chi = 2-2g$, получим $g \leqslant \frac{(m'-3)(m'-4)}{12}$. Так как исходная триангуляция с вершинами смежностная, то для нее справедливо: $g = \frac{(m-3)(m-4)}{12}$. Подставив g в неравенство, получаем: $(m-3)(m-4) \leqslant (m'-3)(m'-4)$, которое при условии $m' < m$ остается верным только при знаке равно. А значит, и $m' = m$, т.е. смежностная триангуляция поверхности M^2 с m вершинами является минимальной и, как показано выше, выполняется $g = \frac{(m-3)(m-4)}{12}$. Аналогично, для случая б), заменяя в рассуждениях χ на $\chi = 2-k$, получаем, что для смежностной минимальной триангуляции с m вершинами неориентированной поверхности M^2 с k вклеенными листами Мёбиуса выполняется $k = \frac{(m-3)(m-4)}{6}$, и, следовательно, $k \equiv s \mod 6$, где $s = 0, 1, 3, 4$.

2.3. Неприводимые триангуляции тора.

Вернемся к триангуляциям тора, и покажем, что все триангуляции тора можно получить из 21 неприводимой триангуляции последовательностями определенных операций, а именно, вершинных расщеплений. Начнем с определений.

Звездой вершины a – обозначение: $St(a)$ – триангуляции многообразия называется объединение всех граней, содержащих a. Отсюда звезда вершины гомеоморфна диску. Цикл из n-ребер триангуляции назовем n-циклом. Опишем операцию вершинного расщепления. Пусть вершины b и c делят границу $\partial St(a)$ звезды $St(a)$ на два пути(ломаные без самопересечений, состоящие из ребер и вершин триангуляции) γ_1 и γ_2, так что $\gamma_1 \cup \gamma_2 = \partial St(a), \gamma_1 \cap \gamma_2 = \{b, c\}$. Операция вершинного расщепления звезды $St(a)$ триангуляции вдоль ребер $[a, b]$, $[a, c]$ – обозначение: $sp\langle b, a, c\rangle$ – определяется как замена диска $St(a)$ диском $St(a') \cup St(a'')$, который состоит из двух новых вершин a', a'' и треугольных граней $a'a''b, a'a''c$, а также из треугольных граней, определяемых a' и ребрами из γ_1, a'' и ребрами из γ_2. Обратная к расщеплению $sp\langle b, a, c\rangle$ операция называется стягиванием ребра.

Неприводимыми будем называть триангуляции, ни к какому ребру которых нельзя применить стягивание, получая при этом снова триангуляцию. Таким образом, ясно, что любая триангуляция тора порождается из некоторой неприводимой триангуляции посредством какой-то последовательности (вообще говоря, не единственной) расщеплений. Всего неприводимых триангуляций тора – 21. Обозначение: $T^i, 1 \leq i \leq 21$. Все они представлены на стандартной развертки тора, в приложении.

Для алгоритма нахождения триангуляций тора по неприводимым, понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. Неприводимыми триангуляциями тора являются те и только те триангуляции, у которых каждое ребро входит в некоторый негомологичный нулю 3-цикл.

Трансверсальное перечение: пусть есть два пересекающихся ровно в одной вершине a 3-цикла. Пусть при некоторой упорядоченной по отношению к $St(a)$ нумерации ребер, смежных с a, номера ребер, принадлежащих первому 3-циклу, суть $n'_1 < n''_2$, второму – $n'_2 < n''_2$. Будем говорить, что эти 3-циклы пересекаются трансверсально, если $n'_1 < n'_2 < n''_1 < n''_2$ (или $n'_2 < n'_1 < n''_2 < n''_1$).

Лемма 2. Если два 3-цикла триангуляции тора пересекаются трансверсально, то они негомологичны. Также из [1] известна следующая лемма:

Лемма 3. Пусть для каждой вершины данного плоского строго выпуклого многоугольника помечена одна диагональ, из нее исходящая. Тогда найдутся, по меньшей мере, две помеченные диагонали, пересекающиеся во внутренней точке данного многоугольника.

Лемма 4. Для каждой вершины a неприводимой триангуляции тора найдется пара 3-циклов, трансверсально пересекающихся в a, которые негомологичны нулю и друг другу.
Докажем лемму 4: По лемме 1 для любой вершины $b \in \partial St(a)$ ребро $[a, b]$ входит в некоторый негомологичный нулю 3-цикл (a, b, c), где $c \in \partial St(a)$. Следовательно, для каждой вершины $b \in \partial St(a)$ существует ребро триангуляции, соединяющее эту вершину с какой–то несоседней с b вершиной на $\partial St(a)$. Пометим для каждой вершины $b \in \partial St(a)$ по одному такому ребру. Непрерывно отображая $\partial St(a)$ вместе с помеченными ребрами в плоский строго выпуклый многоугольник так, чтобы граница $\partial St(a)$ гомеоморфно отобразилась на границу этого многоугольника, а ребра – в отрезки, по лемме 3 получаем два 3-цикла, пересекающихся в a трансверсально. И по лемме 2 эти два трансверсально пересекающихся цикла негомологичны.

Лемма 5. Если сделать разрезы по двух негомологичным нулю и друг другу 3-циклам триангуляции тора, пересекающимся ровно в одной вершине, то получим развертку тора, гомеоморфную диску, с 5 вершинами и 6 ребрами триангуляции на границе.
Из двух последних лемм вытекает:

Следствие 1. Для любых двух вершин неприводимой триангуляции тора a и b будет $St(a) \cap St(b) \neq \oslash$.

По лемме 4 через каждую вершину a неприводимой триангуляции тора проходят два 3-цикла, негомологичных нулю и друг другу и трансверсально пересекающихся в a. Согласно лемме 5, разрезав по этим 3-циклам, получим развертку исходной неприводимой триангуляции в виде квадрата с 5 вершинами триангуляции на границе. Полученную в результате указанных разрезаний развертку назовем стандартной разверткой для вершины a; сама вершина a на такой стандартной развертке изображается четырьмя угловыми точками (вершина 1 на всех развертках из приложения).

На развертке назовем внутренним такое ребро, оба конца которого лежат внутри квадрата. Внутреннее ребро $[a, b]$ назовем выходящим на границу, если на границе квадрата найдется вершина d такая, что есть ребра [d, a] и [d, b], причем 3-цикл (d, a, b) негомологичен нулю.
Из леммы 1 вытекает
Следствие 2. На стандартной развертке любой неприводимой триангуляции тора каждое внутреннее ребро обязано выходить за границу.

Степенью вершины a называется число ребер, содержащих a.

Лемма 6. Степень каждой вершины i любой неприводимой триангуляции тора не превосходит 20.

Лемма 7. Число вершин V у любой неприводимой триангуляции T тора ограничено одной константой, не зависящей от выбора T.
Доказательство. Зафиксируем одну вершину a_0 триангуляции T. Согласно следствию 1, для любой отличной от a_0 вершины i либо существует ребро $[a_0, i]$, либо есть вершина j такая, что существуют ребра $[a_0, j]$ и $[j, i]$. Таким образом, все вершины T это: a_0 вместе с вершинами $\partial St(a_0)$ и $\partial St(i)$ при всех $i \in \partial St(a_0)$. Тогда из леммы 6 следует, что $V \leqslant 1 + 20 + 20^2$.

Построение триангуляций.
Приведем алгоритм нахождения стандартных разверток всех неприводимых триангуляций тора.
Так как по леммам 4, 5 любая неприводимая триангуляция может быть представлена стандартной разверткой, значит, на начальном этапе имеется развертка тора с 5 вершинами и 6 ребрами на границе, а внутри пока нет ни одной вершины и ни одного ребра. Чтобы восстановить из этого фрагмента стандартной развертки развертки всех неприводимых триангуляций, нужно:

1. Зафиксировать некоторое ребро $[a, c]$, к которому примыкает менее двух граней, и (так как по определению в триангуляции к любому ребру примыкает ровно две грани) пристроить к нему топологический треугольник всевозможными допустимыми и комбинаторно различными способами.
2. Если на полученной развертке имеются внутренние ребра, не выходящие на границу, то все они должны быть выведены на границу всевозможными допустимыми и комбинаторно различными способами. Чтобы вывести внутреннее ребро $[a, b]$ на границу, нужно зафиксировать на его границе какую-то вершину c будущей триангуляции и провести (если их не было) ребра $[c, a]$ и $[c, b]$ так, чтобы 3-цикл (c, a, b) не был гомологичен нулю.

Сам алгоритм заключен в следующем.
К фрагменту стандартной развертки применяется шаг 1. В результате, получается набор фрагментов разверток. К каждому такому фрагменту по следствию 2 применяется шаг 2, и получаем уже другие фрагменты. Естественно требуется, чтобы над фрагментами, в которых нет внутренних ребер, не выходящих на границу, никаких изменений не проводилось. Далее, к полученным фрагментам применяется снова шаг 1, к результатам которого применяется шаг 2 и т.д. Причем, в любом фрагменте для каждого 3-цикла (x_1, x_2, x_3), ограничивающего область исходного квадрата, считается, что есть грань $x_1x_2x_3$.

Условие окончания: шаги 1 и 2 не применяются к фрагменту, если

- этот фрагмент не может быть фрагментом неприводимой триангуляции, т.е. в нем есть петли, кратные ребра или какое-нибудь внутреннее ребро нельзя вывести на границу без самопересечений, образования петель и кратных ребер;
- этот фрагмент уже является триангуляцией (если она неприводима, то занести его в отдельный список).

В полученном списке нужно оставить по одному представителю от каждого класса изоморфных триангуляций. (Триангуляции T_1 и T_2 называются изоморфными, если существует взаимно однозначное отображение f множества вершин T_1 на множество вершин T_2 такое, что в T_1 есть ребро $[i, j]$ тогда и только тогда, когда в T_2 есть ребро [f(i),f(j)].) Алгоритм корректен в силу леммы 7.
По этому алгоритму получен полный список стандартных разверток всех, с точностью до изоморфизма, неприводимых триангуляций тора. Таким образом, доказана

Теорема. Существует ровно 21 неприводимая триангуляция тора, а именно: T^i, $1 \leqslant i \leqslant 21$, триангуляции из приложения.

3. Заключение.

В ходе курсовой работы были изучены свойства некоторых триангуляций тора, связь минимальности и смежности триангуляций двумерного многообразия. Были введены и изучены стандартные комбинаторные конструкции для многогранников, которые позволили поставить и рассмотреть классические вопросы о триангуляциях двумерных многообразий. Из соотношений Дена-Соммервилля для многообразий было выведено, что смежностная триангуляция двумерной поверхности является минимальной, и наличие связи между родом поверхности и числом вершин триангуляции. И к тому же был разобран следующий результат: все триангуляции тора могут быть получены из 21 неприводимой триангуляции тора.

Список литературы

[1] Александров А.Д. Выпуклые многогранники. М. ; Л. : Гостехтеориздат, 1950. - 428 с.

[2] Бухштабер В.М., Панов Т.Е. Торические действия в топологии и комбинаторике. М.: МЦНМО, 2004.

[3] Лавренченко С.А. Неприводимые триангуляции тора. Украинский геометрический сборник Вып. 30 , 1987. - 52—62 с.