**Дипломная работа.**

# Гомотопический тип и гомологии пространств петель некоторых момент-угол комплексов.

Автор: Я.А.Верёвкин.
Научный руководитель: Т.Е.Панов.

Механико-математический факультет МГУ

Москва, 2014 год

# ГОМОТОПИЧЕСКИЙ ТИП И ГОМОЛОГИИ ПРОСТРАНСТВ ПЕТЕЛЬ НЕКОТОРЫХ МОМЕНТ-УГОЛ-КОМПЛЕКСОВ.

Я.А.ВЕРЁВКИН.

## 1. Введение.

В работе рассматривается задача вычисления алгебры Понтрягина (гомологий петель) момент-угол-комплексов и многообразий. Момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ представляет собой пространство с действием тора, сопоставляемое симплициальному комплексу $\mathcal{K}$. Момент-угол-комплексы $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ играют важную роль в торической топологии [BP]. В случае, когда $\mathcal{K}$ — триангуляция сферы, $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ представляет собой топологическое многообразие, которое обладает важными и интересными геометрическими структурами.

Образующие алгебры $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ в случае, когда $\mathcal{K}$ — флаговый комплекс, были описаны в работе [GPTW]. Тем самым вопрос заключается в описании соотношений. В данной работе мы описываем эти соотношения в случае, когда $\mathcal{K}$ — граница пятиугольника или шестиугольника. В этом случае известно, что $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ представляет собой связную сумму произведений сфер, по две сферы в каждом произведении (см. Макгавран [M]). Таким образом в алгебре $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ имеется всего одно соотношение, которое мы и находим. Тем самым мы получаем новое доказательсво результата Макгаврана. Интересной особенностью полученных нами соотношений в алгебре Понтрягина является то, что они включают итерированные произведения Уайтхеда, образы которых при гомоморфизме Гуревича нулевые. Поэтому данные соотношения нельзя получить опираясь исключительно на результат Макгаврана.

## 2. Основные понятия и предварительные результаты

Пусть $\mathcal{K}$ — *симплициальный комплекс* на множестве $[m] = \{1, 2, 3, \dots, m\}$, то есть $\mathcal{K}$ — совокупность подмножеств $I \subset [m]$, замкнутая относительно включения. Подмножества $I \in \mathcal{K}$ называются *симплексами*.

Симплициальный комплекс называется *флаговым*, если любой минимальный несимплекс состоит из двух элементов. Другими словами, $\mathcal{K}$ — флаговый комплекс, если любой его набор вершин, попарно соединённых рёбрами, порождает симплекс.

Пусть $k$ — кольцо $\mathbb{Z}$ или поле. *Кольцом граней* симплициального комплекса $\mathcal{K}$ называется градуированное кольцо

$$k[\mathcal{K}] = k[v_1, \dots, v_m]\big/\big(v_{i_1}\dots v_{i_k} \colon \{i_1, \dots, i_k\} \notin \mathcal{K}\big),$$

где $k[v_1, \dots, v_m]$ — кольцо многочленов, $\deg v_i = 2$.

Рассмотрим единичный полидиск в комплексном пространстве:

$$\mathbb{D}^m = \big\{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m \colon |z_i|^2 \leqslant 1, \quad i = 1, \dots, m\big\}.$$

Для каждого подмножества $I \subset [m]$ определим подмножество в полидиске:

$$B_I = \big\{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{D}^m \colon |z_i|^2 = 1, \text{ если } i \notin I\big\}$$

Так же для $I \subset [m]$ имеется полный подкомплекс (ограничение $\mathcal{K}$ на $I$):

$$\mathcal{K}_I = \{J \in \mathcal{K} \colon J \subset I\}.$$

*Момент-угол-комплексом*, соответствующим симплициальному комплексу $\mathcal{K}$, называется пространство
$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} B_I \subset \mathbb{D}^m,$$
где объединение берётся в $\mathbb{D}^m$. Аналогично рассмотрим подмножество:
$$(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} BT^I \subset BT^m$$
где $BT^m = (\mathbb{C}P^\infty)^m$, $BT^I = \big\{(x_1, \dots, x_m) \in BT^m \colon x_i = *, \text{ если } i \notin I\big\}$.

**Теорема 2.1** ([БП]). *Имеют место изоморфизмы колец:*
$$H^*((\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}) \cong \mathbb{Z}[\mathcal{K}],$$
$$H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong H(\Lambda[u_1, \dots, u_n] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d),$$
*где* $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ *— кольцо граней,* $du_i = v_i$, $dv_i = 0$, $\deg u_i = 1$, $\deg v_i = 2$.

**Теорема 2.2** ([БП]). *Момент-угол комплекс* $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ *является гомотопическим слоем вложения* $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}} \to (\mathbb{C}P^\infty)^m$.

Гомотопическое расслоение $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \to (\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}} \to (\mathbb{C}P^\infty)^m$ приводит к точной последовательности алгебр Понтрягина:
$$1 \to H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; k) \to H_*\big(\Omega((\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}); k\big) \to \Lambda[u_1, \dots, u_m] \to 1,$$
где $k$ это $\mathbb{Z}$ или поле, $\Lambda[u_1, \dots, u_m] = H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^m; k) = H_*(T^m; k)$ – внешняя алгебра. Таким образом, $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ представляет собой коммутаторную подалгебру в некоммутативной алгебре $H_*\big(\Omega((\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}); k\big)$. Эта алгебра может быть описана явно в случае когда $\mathcal{K}$ — флаговый комплекс:

**Теорема 2.3** ([GPTW]). *Пусть* $\mathcal{K}$ *— флаговый комплекс. Тогда*
$$H_*(\Omega((\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}); k) \cong T\langle u_1, \dots, u_m\rangle/(u_i^2 = 0, u_iu_j + u_ju_i = 0, \text{ если } \{i, j\} \in \mathcal{K}),$$
*где* $T\langle u_1, \dots, u_m\rangle$ *— свободная (тензорная) алгебра,* $\deg u_i = 1$.

Здесь $u_i \in H_1(\Omega((\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}))$ — каноническая образующая, задаваемая $i$-м координатным отображением $S^1 = \Omega(\mathbb{C}P^\infty) \to \Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$.

Далее будем предполагать, что $k$ — поле и не будем явно его указывать в обозначениях гомологий.

Следующий результат описывает мультипликативные образующие коммутаторной алгебры $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$.

**Теорема 2.4** ([GPTW]). *Пусть* $\mathcal{K}$ *— флаговый комплекс. Тогда подалгебра* $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \subset H_*\big(\Omega((\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}})\big)$ *мультипликативно порождается итерированными коммутаторами следующего вида:*
$$[u_i, u_j], \quad [u_{k_1}, [u_j, u_i]], \quad \dots, \quad [u_{k_1}, [u_{k_2}, [u_{k_3}, \dots, [u_{k_{m-2}}, [u_j, u_i]] \dots]]],$$
*где* $k_1 < k_2 < \dots < k_p < j > i$, $k_s \neq i$ *для всех* $s$, *и* $i$ *есть минимальная вершина в связной компоненте полного подкомплекса* $\mathcal{K}_{\{k_1, \dots, k_p, j, i\}} \subset \mathcal{K}$, *которая не содержит* $j$.

## 3. Гомологии пространства петель момент-угол комплекса пятиугольника

В этом разделе $\mathcal{K}$ — граница пятиугольника.

Сначала посчитаем числа Бетти с помощью [Mac2], они такие:

Таблица 1. Числа Бетти.

| . | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| . | 1 | 0 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 1 |

Отсюда следует, что в $H^3$ и $H^4$ будет по 5 образующих.

Опишем кольцо когомологий $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. Возьмём фундаментальный класс $t = [u_1u_2u_3v_4v_5]$ и вычислим произведение в кольце когомологий. Для этого воспользуемся следующим:

$$[d(u_1u_2u_3u_4v_5)] = [d(u_1u_2u_3u_5v_4)] = [d(u_1u_2u_4u_5v_3)] = [d(u_1u_3u_4u_5v_2)] = [d(u_2u_3u_4u_5v_1)] = 0,$$

отсюда:

$$[u_2u_3u_4v_1v_5]-[u_1u_2u_3v_4v_5] = [u_1u_2u_5v_3v_4]-[u_1u_2u_3v_4v_5] = -[u_1u_4u_5v_2v_3]+[u_1u_2u_5v_3v_4] =$$
$$= [u_3u_4u_5v_1v_2] - [u_1u_4u_5v_2v_3] = [u_3u_4u_5v_1v_2] - [u_2u_3u_4v_1v_5] = 0.$$

Из этих равенств получаем таблицу произведений когомологий:

Таблица 2. Классы когомологий и их произведение.

| $H^3$ | $H^4$ | Произведение |
|---|---|---|
| $[u_1v_3]$ | $[u_4u_5v_2]$ | $t$ |
| $[u_2v_4]$ | $-[u_1u_5v_3]$ | $t$ |
| $[u_3v_5]$ | $[u_1u_2v_4]$ | $t$ |
| $[u_4v_1]$ | $[u_2u_3v_5]$ | $t$ |
| $[u_5v_2]$ | $[u_3u_4v_1]$ | $t$ |

Так как все произведения элементов из 1-го столбца на элементы из 2-го столбца, стоящие на разных строчках, равны нулю, а на одинаковых строчках равны фундаментальному классу, то это канонический базис в когомологиях. Выпишем двойственный ему базис в гомологиях.

Обозначения:

$$S_i \text{ - окружность на } i\text{-м месте,}$$

$$D_j \text{ - диск на } j\text{-м месте.}$$

Будем выписывать цепи в гомологиях. Например, коцепи $[u_1v_3]$ соответствует цепь $S_1D_3 + D_1S_3$.

Получаем следующий канонический базис в гомологиях (дадим каждой строке номер особым образом):

Таблица 3. Базис в гомологиях.

| $H_3$ | $H_4$ | Номер |
|---|---|---|
| $S_1D_3 + D_1S_3$ | $-D_2S_4S_5 + S_2S_4D_5$ | 1 |
| $S_2D_4 + D_2S_4$ | $S_1S_3D_5 + S_1D_3S_5$ | 3 |
| $S_3D_5 + D_3S_5$ | $D_1S_2S_4 - S_1S_2D_4$ | 5 |
| $S_4D_1 + D_4S_1$ | $D_2S_3S_5 - S_2S_3D_5$ | 2 |
| $S_5D_2 + D_5S_2$ | $-D_1S_3S_4 + S_1S_3D_4$ | 4 |

Теперь напишем коммутаторы, соответствующие базисным элементам, по следующему правилу:

$$S_iD_j + D_iS_j \leftrightarrow [u_i, u_j]$$
$$S_iS_jD_k + S_iD_jS_k \leftrightarrow [u_i, [u_j, u_k]]$$

Если $S$ и $D$ находятся не рядом, то переставим их так, что они встанут рядом (в конце слагаемого). $D$ коммутирует со всеми элементами, $S$ коммутирует с $D$ и антикоммутирует с $S$. Получим следующее:

Таблица 4. Коммутаторы.

| $\deg = 2$ | $\deg = 3$ | Номер |
|---|---|---|
| $[u_3, u_1]$ | $-[u_4, [u_5, u_2]]$ | 1 |
| $[u_4, u_2]$ | $[u_1, [u_5, u_3]]$ | 3 |
| $[u_5, u_3]$ | $[u_1, [u_4, u_1]]$ | 5 |
| $[u_4, u_1]$ | $[u_3, [u_5, u_2]]$ | 2 |
| $[u_5, u_2]$ | $-[u_3, [u_4, u_1]]$ | 4 |

**Теорема 3.1.** *Алгебра $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ представляет собой алгебру с 10 образующими:*

$$a_1 = [u_3, u_1], a_2 = [u_4, u_1], a_3 = [u_4, u_2], a_4 = [u_5, u_2], a_5 = [u_5, u_3],$$
$$b_1 = [u_4, [u_5, u_2]], b_2 = [u_3, [u_5, u_2]], b_3 = [u_1, [u_5, u_3]], b_4 = [u_3, [u_4, u_1]],$$
$$b_5 = [u_2, [u_4, u_1]],$$

*которые удовлетворяют единственному соотношению:*

$$-[a_1, b_1] + [a_2, b_2] + [a_3, b_3] - [a_4, b_4] + [a_5, b_5] = 0, \tag{3.1}$$

*где* $\deg u_i = 1, \deg a_i = 2, \deg b_i = 3$, $[a, b] = ab - (-1)^{deg\ a \cdot deg\ b} ba$.
*При этом, если мы возьмём коммутаторы построчно из таблицы 4 (первый столбец коммутируем со вторым), то на $i$-м номере строки (номере из 3-го столбца) будет стоять $[a_i, b_i]$ из нашего соотношения (с учётом знака).*

*Доказательство.* Данные 10 образующих $a_1, \dots, a_5, b_1, \dots, b_5$ суть в точности образующие, описанные в теореме 2.4, в случае, когда $\mathcal{K}$ — граница пятиугольника. Геометрически образующая $a_1 \in H_2(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ задаётся верхней строкой в диаграмме:

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r] & \Omega S^3 \arrow[r] \arrow[dr] & \Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K} \arrow[d] \\ & & \Omega((\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}) \end{tikzcd}$$

где $\Omega S^3 \to \Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ — поднятие отображения $\Omega S^3 \to \Omega((\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K})$, задаваемого произведением Уайтхеда (Самельсона) $[u_3, u_1]$.

Аналогично, образующая $b_1 \in H_3(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ задаётся верхней строкой в диаграмме:

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r] & \Omega S^4 \arrow[r] \arrow[dr] & \Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K} \arrow[d] \\ & & \Omega((\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}) \end{tikzcd}$$

где $\Omega S^4 \to \Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ — поднятие отображения $\Omega S^4 \to \Omega((\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K})$, задаваемого произведением Уайтхеда (Самельсона) $[u_4, [u_5, u_2]]$.

Раскроем коммутаторы по правилу раскрытия коммутатора выше с помощью [WM]:

$$\begin{aligned}
[a_1,b_1] = \quad & -u_1u_3u_2u_5u_4 + u_1u_3u_4u_2u_5 + u_1u_3u_4u_5u_2 - u_1u_3u_5u_2u_4- \\
& -u_3u_1u_2u_5u_4 + u_3u_1u_4u_2u_5 + u_3u_1u_4u_5u_2 - u_3u_1u_5u_2u_4+ \\
& +u_2u_5u_4u_1u_3 - u_4u_2u_5u_1u_3 - u_4u_5u_2u_1u_3 + u_5u_2u_4u_1u_3+ \\
& +u_2u_5u_4u_3u_1 - u_4u_2u_5u_3u_1 - u_4u_5u_2u_3u_1 + u_5u_2u_4u_3u_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[a_2,b_2] = \quad & -u_1u_4u_2u_5u_3 + u_1u_4u_3u_2u_5 + u_1u_4u_3u_5u_2 - u_1u_4u_5u_2u_3- \\
& -u_4u_1u_2u_5u_3 + u_4u_1u_3u_2u_5 + u_4u_1u_3u_5u_2 - u_4u_1u_5u_2u_3+ \\
& +u_2u_5u_3u_1u_4 - u_3u_2u_5u_1u_4 - u_3u_5u_2u_1u_4 + u_5u_2u_3u_1u_4+ \\
& +u_2u_5u_3u_4u_1 - u_3u_2u_5u_4u_1 - u_3u_5u_2u_4u_1 + u_5u_2u_3u_4u_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[a_3,b_3] = \quad & +u_2u_4u_1u_3u_5 + u_2u_4u_1u_5u_3 - u_2u_4u_3u_5u_1 - u_2u_4u_5u_3u_1+ \\
& +u_4u_2u_1u_3u_5 + u_4u_2u_1u_5u_3 - u_4u_2u_3u_5u_1 - u_4u_2u_5u_3u_1- \\
& -u_1u_3u_5u_2u_4 - u_1u_5u_3u_2u_4 + u_3u_5u_1u_2u_4 + u_5u_3u_1u_2u_4- \\
& -u_1u_3u_5u_4u_2 - u_1u_5u_3u_4u_2 + u_3u_5u_1u_4u_2 + u_5u_3u_1u_4u_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[a_4,b_4] = \quad & -u_2u_5u_1u_4u_3 + u_2u_5u_3u_1u_4 + u_2u_5u_3u_4u_1 - u_2u_5u_4u_1u_3- \\
& -u_5u_2u_1u_4u_3 + u_5u_2u_3u_1u_4 + u_5u_2u_3u_4u_1 - u_5u_2u_4u_1u_3+ \\
& +u_1u_4u_3u_2u_5 - u_3u_1u_4u_2u_5 - u_3u_4u_1u_2u_5 + u_4u_1u_3u_2u_5+ \\
& +u_1u_4u_3u_5u_2 - u_3u_1u_4u_5u_2 - u_3u_4u_1u_5u_2 + u_4u_1u_3u_5u_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[a_5,b_5] = \quad & -u_3u_5u_1u_4u_2 + u_3u_5u_2u_1u_4 + u_3u_5u_2u_4u_1 - u_3u_5u_4u_1u_2- \\
& -u_5u_3u_1u_4u_2 + u_5u_3u_2u_1u_4 + u_5u_3u_2u_4u_1 - u_5u_3u_4u_1u_2+ \\
& +u_1u_4u_2u_3u_5 - u_2u_1u_4u_3u_5 - u_2u_4u_1u_3u_5 + u_4u_1u_2u_3u_5+ \\
& +u_1u_4u_2u_5u_3 - u_2u_1u_4u_5u_3 - u_2u_4u_1u_5u_3 + u_4u_1u_2u_5u_3.
\end{aligned}$$

Используя коммутационные соотношения $u_1u_2 = -u_2u_1$, $u_2u_3 = -u_3u_2$, $u_3u_4 = -u_4u_3$, $u_4u_5 = -u_5u_4$, $u_1u_5 = -u_5u_1$ в алгебре $H_*(\Omega((\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}))$ (см. теорему 2.3) приведём каждое слагаемое в правой части к следующему каноническому виду: берём $u_j$ с минимальным номером $j$ (в нашем случае $u_1$) и сдвигаем его максимально влево, используя всевозможные коммутационные соотношения. Далее берём $u_2$ и сдвигаем его максимально влево, не используя коммутационные соотношения с $u_1$. И так далее, пока не дойдём до $u_5$. Например, каноническим видом монома $u_4u_2u_3u_5u_1$ будет $u_3u_4u_1u_2u_5$. В результате получим следующую запись коммутаторов через мономы канонического вида:

$$\begin{aligned}
[a_1,b_1] = \quad & -u_1u_2u_3u_4u_5 + u_1u_4u_2u_3u_5 + u_1u_3u_4u_5u_2 - u_1u_3u_5u_2u_4+ \\
& +u_3u_1u_2u_4u_5 + u_3u_1u_4u_2u_5 + u_3u_1u_4u_5u_2 - u_3u_1u_5u_2u_4+ \\
& +u_2u_4u_1u_5u_3 - u_4u_1u_2u_5u_3 - u_4u_1u_5u_2u_3 + u_5u_2u_4u_1u_3- \\
& -u_2u_5u_3u_4u_1 - u_4u_2u_5u_3u_1 - u_5u_3u_4u_1u_2 - u_5u_2u_3u_4u_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[a_2,b_2] = \quad & -u_1u_4u_2u_5u_3 - u_1u_4u_2u_3u_5 - u_1u_3u_4u_5u_2 - u_1u_4u_5u_2u_3- \\
& -u_4u_1u_2u_5u_3 - u_4u_1u_2u_3u_5 + u_4u_1u_3u_5u_2 - u_4u_1u_5u_2u_3+ \\
& +u_2u_5u_3u_1u_4 + u_3u_1u_2u_4u_5 - u_3u_1u_5u_2u_4 + u_5u_3u_1u_2u_4+ \\
& +u_2u_5u_3u_4u_1 + u_2u_3u_4u_1u_5 - u_3u_5u_2u_4u_1 + u_5u_2u_3u_4u_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[a_3,b_3] = \quad & +u_2u_4u_1u_3u_5 + u_2u_4u_1u_5u_3 - u_2u_3u_4u_1u_5 - u_2u_5u_3u_4u_1- \\
& -u_4u_1u_2u_3u_5 - u_4u_1u_2u_5u_3 - u_3u_4u_1u_2u_5 - u_4u_2u_5u_3u_1- \\
& -u_1u_3u_5u_2u_4 + u_1u_5u_2u_3u_4 - u_3u_1u_5u_2u_4 + u_5u_3u_1u_2u_4+ \\
& +u_1u_3u_4u_5u_2 + u_1u_4u_5u_2u_3 + u_3u_1u_4u_5u_2 + u_5u_3u_1u_4u_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[a_4,b_4] = \quad & +u_1u_2u_5u_3u_4 + u_2u_5u_3u_1u_4 + u_2u_5u_3u_4u_1 - u_2u_4u_1u_5u_3+ \\
& +u_1u_5u_2u_3u_4 + u_5u_3u_1u_2u_4 + u_5u_2u_3u_4u_1 - u_5u_2u_4u_1u_3- \\
& -u_1u_4u_2u_3u_5 - u_3u_1u_4u_2u_5 - u_3u_4u_1u_2u_5 - u_4u_1u_2u_3u_5- \\
& -u_1u_3u_4u_5u_2 - u_3u_1u_4u_5u_2 - u_3u_4u_1u_5u_2 + u_4u_1u_3u_5u_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[a_5,b_5]= \quad & -u_3u_1u_4u_5u_2+u_3u_1u_5u_2u_4+u_3u_5u_2u_4u_1-u_3u_4u_1u_5u_2-\\ & -u_5u_3u_1u_4u_2-u_5u_3u_1u_2u_4-u_5u_2u_3u_4u_1-u_5u_3u_4u_1u_2+\\ & +u_1u_4u_2u_3u_5-u_1u_2u_3u_4u_5-u_2u_4u_1u_3u_5+u_4u_1u_2u_3u_5+\\ & +u_1u_4u_2u_5u_3+u_1u_2u_5u_3u_4-u_2u_4u_1u_5u_3+u_4u_1u_2u_5u_3.\end{aligned}$$

Суммируя со знаками, получаем требуемое соотношение. □

**Теорема 3.2.** *Существует гомотопическая эквивалентность:*
$\mathcal{Z}_\mathcal{K}\simeq(S^3\times S^4)^{\#5}$, *где* $(S^3\times S^4)^{\#5}$ *— связная сумма 5-ти экземпляров* $S^3\times S^4$.

*Доказательство.* Рассмотрим отображение $f\colon (S^3\vee S^4)^{\vee 5}\to\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, задаваемое как букет отображений, соответствующих образующим $a_1,\dots,a_5$, $b_1,\dots,b_5$ как описано в начале доказательства теоремы 3.1. Ввиду наличия соотношения (3.1) это отображение продолжается до отображения из связной суммы (которая отличается от букета одной клеткой), как показано на диаграмме ниже.

$$\begin{tikzcd}(S^3\vee S^4)^{\vee 5} \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & (S^3\times S^4)^{\#5} \arrow[d, dashed, "\widetilde{f}"] \\ & \mathcal{Z}_\mathcal{K}\end{tikzcd}$$

$\widetilde{f}$ индуцирует изоморфизм в гомологиях, а значит $\widetilde{f}$ — гомотопическая эквивалентность, так как отображение $\widetilde{f}: X\to Y$ односвязных $CW$-комплексов является гомотопической эквивалентностью, если $\widetilde{f}$ индуцирует измоморфизм в гомологиях. □

**Теорема 3.3.** *Соотношение в алгебре Понтрягина единственно.*

*Доказательство.* Мы построили гомотопическую эквивалентность $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ и связной суммы произведений сфер $X=(S^3\times S^4)^{\#5}$. Для связной суммы произведений сфер соотношение в алгебре Понтрягина $H_*(\Omega X)$ единственно, так как соотношение на коммутаторы в $H_*(\Omega X)$ происходит из соотношения на произведения Самельсона в алгебре Ли $\pi_*(\Omega X)$, которое происходит из соотношения на произведения Уайтхеда в $\pi_*(X)$. По последнему соотношению мы приклеиваем клетку к букету сфер, получая $X$. Значит соотношение единственно и для $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$. Иначе изоморфизм не существовал бы. □

## 4. Гомологии пространства петель момент-угол комплекса шестиугольника

Пусть $\mathcal{K}$ - граница шестиугольника.

Опишем кольцо когомологий $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$. Сначала посчитаем числа Бетти с помощью [Mac2], они такие:

Таблица 5. Числа Бетти.

| . | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| . | 1 | 0 | 0 | 9 | 16 | 9 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 9 | 12 | 9 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Из этого следует, что в $H^3$ и $H^5$ будет 9 образующих, а в $H^4$ их будет 16.
Возьмём фундаментальный класс $t=[u_1u_2u_3u_4v_5v_6]$. Теперь запишем канонический базис в когомологиях. Для этого воспользуемся следующим:

$[d(u_1u_2u_3u_4u_5v_6)]=[d(u_1u_2u_3u_4u_6v_5)]=[d(u_1u_2u_3u_5u_6v_4)]=[d(u_1u_2u_4u_5u_6v_3)]=$

$$= [d(u_1u_3u_4u_5u_6v_2)] = [d(u_2u_3u_4u_5u_6v_1)] = 0,$$

отсюда:

$$[u_2u_3u_4u_5v_1v_6] + [u_1u_2u_3u_4v_5v_6] = [u_1u_2u_3u_4v_5v_6] - [u_1u_2u_3u_6v_4v_5] =$$
$$= [u_1u_2u_5u_6v_3v_4] - [u_1u_2u_3u_6v_4v_5] = [u_1u_2u_5u_6v_3v_4] - [u_1u_4u_5u_6v_2v_3] =$$
$$= [u_3u_4u_5u_6v_1v_2] - [u_1u_4u_5u_6v_2v_3] = [u_2u_3u_4u_5v_1v_6] + [u_3u_4u_5u_6v_1v_2] = 0.$$

Из этих равенств получаем две таблицы произведений в когомологиях (3-х на 5-ти мерные и 4-х на 4-х мерные):

Таблица 6. Классы когомологий и их произведение.

| $H^3$ | $H^5$ | Произведение |
|---|---|---|
| $[u_1v_3]$ | $[u_4u_5u_6v_2]$ | $t$ |
| $[u_1v_4]$ | $-[u_2u_3u_5v_6] + [u_2u_3u_6v_5]$ | $t$ |
| $[u_1v_5]$ | $[u_2u_3u_4v_6]$ | $t$ |
| $[u_2v_4]$ | $-[u_1u_5u_6v_3]$ | $t$ |
| $[u_2v_5]$ | $-[u_1u_3u_6v_4] + [u_1u_4u_6v_3]$ | $t$ |
| $[u_2v_6]$ | $-[u_3u_4u_5v_1]$ | $t$ |
| $[u_3v_5]$ | $[u_1u_2u_6v_4]$ | $t$ |
| $[u_3v_6]$ | $[u_1u_2u_4v_5] - [u_1u_2u_5v_4]$ | $t$ |
| $[u_4v_6]$ | $-[u_1u_2u_3v_5]$ | $t$ |

Таблица 7. Классы когомологий и их произведение.

| $H^4$ | $H^4$ | Произведение |
|---|---|---|
| $[u_1u_5v_3]$ | $-[u_2u_6v_4]$ | $t$ |
| $[u_3u_5v_1]$ | $-[u_4u_6v_2] + [u_2u_6v_4]$ | $t$ |
| $[u_2u_3v_6]$ | $-[u_4u_5v_1]$ | $t$ |
| $[u_5u_6v_2]$ | $[u_3u_4v_1]$ | $t$ |
| $[u_1u_6v_3]$ | $[u_4u_5v_2]$ | $t$ |
| $[u_3u_4v_6]$ | $-[u_2u_5v_1] + [u_1u_5v_2]$ | $t$ |
| $[u_5u_6v_3]$ | $-[u_2u_4v_1] + [u_1u_4v_2]$ | $t$ |
| $[u_1u_6v_4]$ | $-[u_3u_5v_2] + [u_2u_5v_3]$ | $t$ |

Так как все произведения элементов из 1-го столбца на элементы из 2-го столбца, стоящие на разных строчках, равны нулю, а на одинаковых строчках равны фундаментальному классу, то это канонический базис в когомологиях. Выпишем двойственный ему базис в гомологиях. Все обозначения из прошлого параграфа. Получаем следующий канонический базис в гомологиях:

Таблица 8. Базис в гомологиях.

| $H_3$ | $H_5$ |
|---|---|
| $S_1D_3 + D_1S_3$ | $-D_2S_4S_5S_6 - S_2S_4S_5D_6$ |
| $S_1D_4 + D_1S_4$ | $S_2S_3S_5D_6 + D_2S_3S_5S_6$ |
| $S_1D_5 + D_1S_5$ | $-D_2S_3S_4S_6 - S_2S_3S_4D_6$ |
| $S_2D_4 + D_2S_4$ | $-S_1S_3S_5D_6 + S_1D_3S_5S_6$ |
| $S_2D_5 + D_2S_5$ | $-S_1D_3S_4S_6 + S_1S_3S_4D_6$ |
| $S_2D_6 + D_2S_6$ | $D_1S_3S_4S_5 + S_1S_3S_4D_5$ |
| $S_3D_5 + D_3S_5$ | $-S_1S_2D_4S_6 - S_1S_2S_4D_6$ |
| $S_3D_6 + D_3S_6$ | $-D_1S_2S_4S_5 - S_1S_2S_4D_5$ |
| $S_4D_6 + D_4S_6$ | $S_1S_2S_3D_5 + D_1S_2S_3S_5$ |

Таблица 9. Базис в гомологиях.

| $H_4$ | $H_4$ |
|---|---|
| $-S_1S_3D_5 - S_1D_3S_5$ | $D_2S_4S_6 + S_2D_4S_6$ |
| $S_1S_3D_5 - D_1S_3S_5$ | $-S_2S_4D_6 + D_2S_4S_6$ |
| $-S_2S_3D_6 + D_2S_3S_6$ | $-S_1S_4D_5 + D_1S_4S_5$ |
| $-D_2S_5S_6 + S_2S_5D_6$ | $S_1S_3D_4 - D_1S_3S_4$ |
| $-S_1D_3S_6 - S_1S_3D_6$ | $S_2S_4D_5 - D_2S_4S_5$ |
| $-S_3S_4D_6 + D_3S_4S_6$ | $-S_1S_2D_5 + D_1S_2S_5$ |
| $S_3S_5D_6 - D_3S_5S_6$ | $-D_1S_2S_4 + S_1S_2D_4$ |
| $-S_1S_4D_6 - S_1D_4S_6$ | $-D_2S_3S_5 + S_2S_3D_5$ |

А теперь запишем две таблицы с коммутаторами, которые соответствуют цепям в таблицах выше (по правилу из прошлого параграфа). В первой таблице первым двум столбцам соответствует цепи в 1-й таблице выше, а в столбце "Дополнительные коммутаторы" будут записаны коммутаторы, которые, возможно, появятся в соотношении с неизвестным коэффициентом, так как им соответствуют нулевые цепи. Коммутаторы из столбца "дополнительные коммутаторы" являются итерированными коммутаторами каких-то $a_i$ и $a_j$, поэтому могут участвовать в соотношении. Получаем следующее:

Таблица 10. Коммутаторы.

| 1 | 2 | Дополнительные коммутаторы |
|---|---|---|
| $[u_3, u_1]$ | $-[u_4, [u_5, [u_6, u_2]]]$ | $k_1 \cdot [[u_2, u_5], [u_4, u_6]]$ |
| $[u_4, u_1]$ | $[u_3, [u_5, [u_6, u_2]]]$ | $k_2 \cdot [[u_5, u_3], [u_6, u_2]] + k_3 \cdot [[u_6, u_3], [u_5, u_2]]$ |
| $[u_5, u_1]$ | $-[u_3, [u_4, [u_6, u_2]]]$ | $k_4 \cdot [[u_4, u_2], [u_6, u_3]]$ |
| $[u_4, u_2]$ | $[u_1, [u_5, [u_6, u_3]]]$ | $k_5 \cdot [[u_6, u_3], [u_5, u_1]]$ |
| $[u_5, u_2]$ | $-[u_1, [u_4, [u_6, u_3]]]$ | $k_6 \cdot [[u_4, u_1], [u_6, u_3]] + k_7 \cdot [[u_6, u_4], [u_3, u_1]]$ |
| $[u_6, u_2]$ | $[u_3, [u_4, [u_5, u_1]]]$ | $k_8 \cdot [[u_5, u_3], [u_4, u_1]]$ |
| $[u_5, u_3]$ | $-[u_1, [u_2, [u_6, u_4]]]$ | $k_9 \cdot [[u_4, u_1], [u_6, u_2]]$ |
| $[u_6, u_3]$ | $-[u_2, [u_4, [u_5, u_1]]]$ | $k_{10} \cdot [[u_4, u_2], [u_5, u_1]] + k_{11} \cdot [[u_4, u_1], [u_5, u_2]]$ |
| $[u_6, u_4]$ | $[u_2, [u_3, [u_5, u_1]]]$ | $k_{12} \cdot [[u_5, u_2], [u_3, u_1]]$ |

Таблица 11. Коммутаторы.

| 1 | 2 |
|---|---|
| $-[u_1,[u_5,u_3]]$ | $-[u_6,[u_4,u_2]]$ |
| $-[u_3,[u_5,u_1]]$ | $[u_4,[u_6,u_2]]$ |
| $[u_3,[u_6,u_2]]$ | $[u_4,[u_5,u_1]]$ |
| $-[u_5,[u_6,u_2]]$ | $-[u_3,[u_4,u_1]]$ |
| $-[u_1,[u_6,u_3]]$ | $-[u_4,[u_5,u_2]]$ |
| $[u_4,[u_6,u_3]]$ | $[u_2,[u_5,u_1]]$ |
| $-[u_5,[u_6,u_3]]$ | $[u_2,[u_4,u_1]]$ |
| $-[u_1,[u_6,u_4]]$ | $[u_3,[u_5,u_2]]$ |

Будем коммутировать элементы из первого столбца с соответствующими элементами из второго столбца, а также из первой таблицы дополнительно добавим коммутирование элементов из её первого столбца со столбцом "Дополнительные коммутаторы". Не обращая внимания на знаки, поставим около каждого полученного коммутатора какой-то неизвестный коэффициент. Применим метод неопределённых коээфициентов, предварительно раскрыв коммутаторы и приведя каждое слагаемое к каноническому виду [WM]. Получим систему линейных уравнений, которую решим с помощью [WM]. Получим ровно одну серию решений (с точностью до умножения на число). Коэффициенты у всех коммутаторов будут $\pm 1$, причём у коммутаторов, полученных коммутированием 1-го и 2-го столбцов обеих таблиц они совпадут с теми, которые получаются при взятии их из таблицы "как есть". А у "дополнительных коммутаторов" возьмём их из решения системы линейных уравнений выше. В итоге, получаем такие значения коэффициентов у дополнительных коммутаторов:

$$k_1=1,k_2=1,k_3=-1,k_4=1,k_5=-1,k_6=1,k_7=-1,k_8=-1,k_9=0,$$
$$k_{10}=0,k_{11}=0,k_{12}=0.$$

Теперь если мы будем брать коммутаторы элементов из первого столбца со вторым, а так же первого с "дополнительными коммутаторами" с указанными выше значениями коэффициентов, то получим соотношение для алгебры Понтрягина границы шестиугольника.
Выпишем соотношение:

$$-[[u_3,u_1],[u_4,[u_5,[u_6,u_2]]]]+[[u_3,u_1],[[u_2,u_5],[u_4,u_6]]]+[[u_4,u_1],[u_3,[u_5,[u_6,u_2]]]]+$$
$$+[[u_4,u_1],[[u_5,u_3],[u_6,u_2]]]-[[u_4,u_1],[[u_6,u_3],[u_5,u_2]]]-[[u_5,u_1],[u_3,[u_4,[u_6,u_2]]]]+$$
$$+[[u_5,u_1],[[u_4,u_2],[u_6,u_3]]]+[[u_4,u_2],[u_1,[u_5,[u_6,u_3]]]]-[[u_4,u_2],[[u_6,u_3],[u_5,u_1]]]-$$
$$-[[u_5,u_2],[u_1,[u_4,[u_6,u_3]]]]+[[u_5,u_2],[[u_4,u_1],[u_6,u_3]]]-[[u_5,u_2],[[u_6,u_4],[u_3,u_1]]]+$$
$$+[[u_6,u_2],[u_3,[u_4,[u_5,u_1]]]]-[[u_6,u_2],[[u_5,u_3],[u_4,u_1]]]-[[u_5,u_3],[u_1,[u_2,[u_6,u_4]]]]-$$
$$-[[u_6,u_3],[u_2,[u_4,[u_5,u_1]]]]+[[u_6,u_4],[u_2,[u_3,[u_5,u_1]]]]+[[u_1,[u_5,u_3]],[u_6,[u_4,u_2]]]-$$
$$-[[u_3,[u_5,u_1]],[u_4,[u_6,u_2]]]+[[u_3,[u_6,u_2]],[u_4,[u_5,u_1]]]+[[u_5,[u_6,u_2]],[u_3,[u_4,u_1]]]+$$
$$+[[u_1,[u_6,u_3]],[u_4,[u_5,u_2]]]+[[u_4,[u_6,u_3]],[u_2,[u_5,u_1]]]-[[u_5,[u_6,u_3]],[u_2,[u_4,u_1]]]-$$
$$-[[u_1,[u_6,u_4]],[u_3,[u_5,u_2]]]=0.$$

**Теорема 4.1.** *Алгебра $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ представляет собой алгебру с 34 образующими:*

$$a_1=[u_3,u_1],a_2=[u_4,u_1],a_3=[u_5,u_1],a_4=[u_4,u_5],a_5=[u_5,u_2],$$
$$a_6=[u_6,u_2],a_7=[u_5,u_3],a_8=[u_6,u_3],a_9=[u_6,u_4],$$
$$b_1=[u_1,[u_5,u_3]],b_2=[u_3,[u_5,u_1]],b_3=[u_3,[u_6,u_2]],b_4=[u_5,[u_6,u_2]],$$

$$b_5 = [u_1,[u_6,u_3]], b_6 = [u_4,[u_6,u_3]], b_7 = [u_5,[u_6,u_3]], b_8 = [u_1,[u_6,u_4]],$$
$$d_1 = [u_6,[u_4,u_2]], d_2 = [u_4,[u_6,u_2]], d_3 = [u_4,[u_5,u_1]], d_4 = [u_3,[u_4,u_1]],$$
$$d_5 = [u_4,[u_5,u_2]], d_6 = [u_2,[u_5,u_1]], d_7 = [u_2,[u_4,u_1]], d_8 = [u_3,[u_5,u_2]],$$
$$c_1 = [u_4,[u_5,[u_6,u_2]]], c_2 = [u_3,[u_5,[u_6,u_2]]], c_3 = [u_3,[u_4,[u_6,u_2]]],$$
$$c_4 = [u_1,[u_5,[u_6,u_3]]], c_5 = [u_1,[u_4,[u_6,u_3]]], c_6 = [u_3,[u_4,[u_5,u_1]]],$$
$$c_7 = [u_1,[u_2,[u_6,u_4]]], c_8 = [u_2,[u_4,[u_5,u_1]]], c_9 = [u_2,[u_3,[u_5,u_1]]].$$

*которые удовлетворяют единственному соотношению:*

$$\sum_{i=1}^{9}[a_i,c_i'] + \sum_{j=1}^{8}\sigma_j \cdot [b_j,d_j] = 0,$$

*где* $\deg u_i = 1, \deg a_i = 2, \deg b_i = \deg d_i = 3, \deg c_i = 4,$
$c_1' = -c_1 + [a_5,a_9], c_2' = c_2 + [a_7,a_6] - [a_8,a_5], c_3' = -c_3 + [a_4,a_8],$
$c_4' = c_4 - [a_8,a_3], c_5' = -c_5 + [a_2,a_8] - [a_9,a_1], c_6' = c_6 - [a_7,a_2],$
$c_7' = -c_7 + 0 \cdot [a_2,a_6], c_8' = -c_8 + 0 \cdot [a_4,a_3] + 0 \cdot [a_2,a_5], c_9' = c_9 + 0 \cdot [a_5,a_1],$

$$\sigma_j \quad = \quad \begin{cases} -1, & \text{если } j \in \{2,7,8\} \\ 1, & \text{если } j \in \{1,3,4,5,6\} \end{cases}.$$

*Доказательство.* Раскроем все коммутаторы по правилу выше, приведём все слагаемые к каноническому виду и приведём подобные члены. Тем самым получим ноль, что доказывает теорему. □

## Список литературы


[БП] В.М.Бухштабер, Т.Е.Панов. *Торические действия в топологии и комбинаторике.* Москва, издательство МЦНМО (2004).

[ХАТ] А. Хатчер *Алгебраическая топология* Москва, издательство МЦНМО (2011).

[BP] V. M. Buchstaber, T. E. Panov. *Toric Topology.* A book project. arXiv: 1210.2368.

[GPTW] Jelena Grbic, Taras Panov, Stephen Theriault, Jie Wu. *Homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes.* Preprint (2012), arXiv: 1211.0873.

[M] D. McGavran. *Adjacent connected sums and torus actions.* Trans. Amer. Math. Soc. 251 (1979), 235–254.

[WM] A software system devoted to supporting research in mathematica. Avaliable at http://www.wolframalpha.com/

[Mac2] A software system devoted to supporting research in algebraic geometry and commutative algebra. Avaliable at http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/



Механико-математический факультет МГУ
*E-mail address*: verevkin_j.a@mail.ru