

Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова

Механико - математический факультет, 5 курс.
Кафедра Высшей Геометрии и Топологии

Каргапольцева Анастасия Игоревна
КУРСОВАЯ РАБОТА

Описание кольца эквивариантных когомологий
гиперповерхности Милнора.

Научный руководитель - Тарас Евгеньевич Панов

Москва
2019 г.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе рассматриваются гиперповерхности Милнора H_{ij} и осуществляется вычисление кольца эквивариантных когомологий относительно действия тора T^2 для H_{22} и T^j для H_{1j} , где $j \geq 1$.

Определим гиперповерхность Милнора H_{ij} . Пусть $[z_0 : \dots : z_i]$ – однородные координаты на пространстве $\mathbb{C}P^i$, $[w_0 : \dots : w_j]$ – однородные координаты на $\mathbb{C}P^j$. Тогда положим

$$H_{ij} = \{[z_0 : \dots : z_i] \times [w_0 : \dots : w_j] \in \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j : \sum_{k=0}^{\min(i,j)} z_k w_k = 0\}.$$

На протяжении всей работы мы будем считать, что $i \leq j$ и рассматривать эквивариантные когомологии H_{ij} относительно действия тора T^j , определенного следующим образом:

$$(t_1, \dots, t_j)([z_0 : \dots : z_i], [w_0 : \dots : w_j]) = ([z_0 : t_1 z_1 : \dots : t_i z_i], [w_0 : t_1^{-1} w_1 : \dots : t_j^{-1} w_j]).$$

Подробное описание данного действия, соответствующего отображения моментов, а также его образа, можно найти в [2].

2. ОПИСАНИЕ ОБРАЗУЮЩИХ КОЛЬЦА ЭКВИВАРИАНТНЫХ КОГОМОЛОГИЙ

Рассмотрим универсальное расслоение для $T = T^j$:

$$ET \xrightarrow{T} BT = (ET/T).$$

Напомним, что ET – стягиваемое пространство со свободным действием тора T , а $BT = (\mathbb{C}P^\infty)^j$ есть классифицирующее пространство для T . Тогда имеется расслоение

$$\begin{array}{c} H_{ij} \times_T ET \\ \downarrow H_{ij} \\ BT, \end{array}$$

где тотальное пространство есть пространство со свободным диагональным действием тора T и $H_{ij} \times_T ET = (H_{ij} \times ET)/T$. Тогда кольцо эквивариантных когомологий $H_T^*(H_{ij}) = H^*(H_{ij} \times_T ET)$.

Рассмотрим второй лист E_2 спектральной последовательности, соответствующей данному расслоению. В силу того, что нечетномерные группы когомологий H_{ij} и $(\mathbb{C}P^\infty)^j$ равны нулю, спектральная последовательность вырождается в члене E^2 , то есть $E^2 = E^\infty$ (напомним, что это свойство называется эквивариантной формальностью). Значит $H_T^*(H_{ij})$ есть свободный модуль над $H^*(BT) = H_T^*(pt) = \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_j]$.

Пусть H_{ij}^T есть множество неподвижных точек относительно действия тора T . Так как их число конечно, то существует естественное вложение H_{ij}^T в H_{ij} , которое индуцирует отображение $H_T^*(H_{ij}) \rightarrow \bigoplus_{p \in H_{ij}^T} H_T^*(p)$. Кроме того, так как H_{ij} эквивариантно формально, то по теореме Горески-Котвица-Макферсона (см. [1]) это отображение инъективно. Таким образом, чтобы вычислить кольцо эквивариантных когомологий H_{ij} , нам необходимо найти образ данного отображения. Это можно сделать с помощью следующей теоремы также доказанной в [1]:

Теорема 1. Пусть X – алгебраическое многообразие с действием тора T , относительно которого X эквивариантно формально и имеет конечное число неподвижных точек и одномерных орбит. Обозначим одномерные орбиты O_1, \dots, O_m . Для каждой орбиты O_i обозначим через t_i ее стабилизатор (T_{t_i} – касательное пространство к нему), через S_i и N_i две неподвижные точки, являющиеся полюсами этой орбиты. Тогда

$$H_T^*(X) \cong \{(f_{p_1}, \dots, f_{p_m}) \in \bigoplus_{p \in X^T} H_T^*(p) : f_{N_i}|_{T_i} = f_{S_i}|_{T_i} \forall i = 1, \dots, m\}.$$

Заметим, что изоморфизм в этой теореме кольцевой.

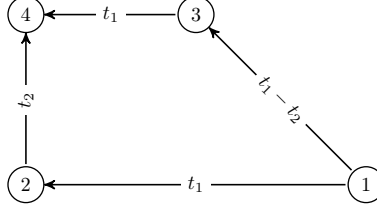


Рис. 1

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБРАЗУЮЩИХ ДЛЯ H_{1n}

Пользуясь предыдущей теоремой, найдем образующие для H_{1n} . Но прежде рассмотрим несколько примеров.

Пример 2 (Образующие кольца эквивариантных когомологий для H_{11}). Как видно из определения, H_{11} это комплексная проективная прямая $\mathbb{C}P^1$. Относительно действия тора $T = \mathbb{C}^*$ имеются две неподвижные точки $[1 : 0]$ и $[0 : 1]$ и только одна одномерная орбита $[\ast, \ast]$. Понятно, что стабилизатор этой орбиты – единица. Тогда получаем

$$H_{\mathbb{C}^*}^*(\mathbb{C}P^1) = \{(p_N, p_S) \in H_{\mathbb{C}^*}^*(pt) \oplus H_{\mathbb{C}^*}^*(pt) : p_N(0) = p_S(0)\}.$$

То есть, если p_N выбирается произвольно в $H_{\mathbb{C}^*}^*(pt)$, то $p_S = p_N + tp$, где p выбирается произвольно в $H_{\mathbb{C}^*}^*(pt)$. Таким образом, кольцо эквивариантных когомологий $\mathbb{C}P^1$ аддитивно порождается классами (p_N, p_N) и $(0, tp)$, где p и p_N пробегает $H_{\mathbb{C}^*}^*(pt)$. Иными словами, $H_{\mathbb{C}^*}^*(\mathbb{C}P^1)$ есть свободный $\mathbb{Z}[t]$ модуль с образующими $(1, 1)$ и $(0, t)$.

Пример 3 (Образующие кольца эквивариантных когомологий для H_{12}). Рассматриваем действие T^2 на H_{12} . Занумеруем неподвижные точки этого действия $([1 : 0], [0 : 1 : 0]) \rightarrow 1, ([1 : 0], [0 : 0 : 1]) \rightarrow 3, ([0 : 1], [1 : 0 : 0]) \rightarrow 2, ([0 : 1], [0 : 0 : 1]) \rightarrow 4$. Имеем четыре одномерные орбиты: $([1 : 0], [0 : w_1 : w_2])$ содержит точки 1 и 3, $([0 : 1], [w_0 : 0 : w_2])$ содержит точки 2 и 4, $([z_0 : z_1], [0 : 0 : 1])$ содержит точки 3 и 4, $([z_0 : z_1], [w_0 : w_1 : 0])$ содержит точки 1 и 2. Граф, соответствующий одномерным орбитам и неподвижным точкам с указанием стабилизаторов, приведен на рисунке 1.

Согласно теореме, любой элемент образа будет иметь вид (q_1, q_2, q_3, q_4) , где $q_i \in H_T^*(pt)$ и q_i удовлетворяют соотношениям:

$$q_2 - q_1 \in \langle t_1 \rangle, q_3 - q_1 \in \langle t_1 - t_2 \rangle, q_4 - q_2 \in \langle t_2 \rangle, q_4 - q_3 \in \langle t_1 \rangle.$$

Откуда следует, что q_i будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} q_1 &= p_1, \\ q_2 &= p_1 + t_1 p_2, \\ q_3 &= p_1 + (t_1 - t_2) p_3, \\ q_4 &= p_1 + t_1 p_2 - t_2 p_3 + t_1 t_2 p_4. \end{aligned}$$

Таким образом, $H_{T^2}^*(H_{12})$ есть свободный $\mathbb{Z}[t_1, t_2]$ модуль с образующими $(1, 1, 1, 1)$, $(0, t_1, 0, t_1)$, $(0, 0, t_1 - t_2, -t_2)$ и $(0, 0, 0, t_1 t_2)$.

Перейдем к общему случаю: вычислим кольцо эквивариантных когомологий для H_{1n} относительно действия тора T^n . В этом случае имеется $2n$ образующих $(q_1, q_2, \dots, q_{2n-1}, q_{2n})$, соответствующих неподвижным точкам действия. Покажем, что первые две образующие будут иметь вид $(1, 1, \dots, 1, 1)$ и $(0, t_1, 0, t_1, \dots, 0, t_1)$. Далее, при $1 \leq k \leq n - 1$, $(2k + 1)$ -я образующая будет иметь вид $(0, \dots, 0, \underbrace{t_1 - t_2}_{2k}, \dots, t_1 - t_n) \dots (t_k - t_{k+1}), -t_{k+1}(t_2 - t_{k+1}) \dots (t_k - t_{k+1}), \dots, (t_1 - t_n) \dots (t_k - t_n), -t_n(t_2 - t_n) \dots (t_k - t_n)$; $(2k + 1)$ -я образующая будет иметь вид $(0, \dots, 0, \underbrace{t_1 t_{k+1}(t_2 - t_{k+1}) \dots (t_k - t_{k+1})}_{2k+1}, 0, \dots, 0, t_1 t_n(t_2 - t_n) \dots (t_k - t_n))$.

Доказательство проведем индукцией по n . База индукции проверена в примере 3. Пусть для H_{1n} все доказано, докажем для $H_{1, n+1}$. Так как мы умеем выписывать образующие для H_{1n} , то мы можем указать явный вид для $q_1, q_2, \dots, q_{2n-1}, q_{2n}$. Для завершения доказательства необходимо выписать явный вид для многочленов q_{2n+1}, q_{2n+2} . При переходе от H_{1n} к $H_{1, n+1}$ добавляются две неподвижные

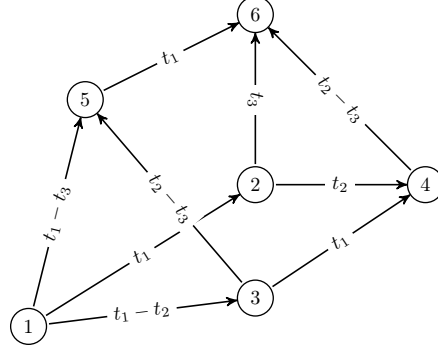


Рис. 2

точки действия $([1 : 0], \underbrace{[0 : \dots : 0 : 1]}_{n+1})$ и $([0 : 1], \underbrace{[0 : \dots : 0 : 1]}_{n+1})$. Занумеруем неподвижные точки $H_{1,n+1}$ относительно действия T^{n+1} следующим образом: для $1 \leq k \leq n+1$ положим

$$\begin{aligned} 2k-1 &\rightarrow ([1 : 0], \underbrace{[0 : \dots : 0 : 1 : 0 : \dots : 0]}_{2k-1}), \\ 2k &\rightarrow ([0 : 1], \underbrace{[0 : \dots : 0 : 1 : 0 : \dots : 0]}_{2k-2}). \end{aligned}$$

Тогда при переходе от H_{1n} к $H_{1,n+1}$ в графе, соответствующем H_{1n} , помимо двух точек происходит добавление $2n+1$ ребер, соответствующих одномерным орбитам, содержащим пары точек $(1, 2n+1), \dots, (2n-1, 2n+1)$ и $(2, 2n+2), \dots, (2n, 2n+2), (2n+1, 2n+2)$. Стабилизаторы указанных орбит равны соответственно $(t_1 - t_{n+1}), \dots, (t_n - t_{n+1})$ и $t_{n+1}, (t_2 - t_{n+1}), \dots, (t_n - t_{n+1}), t_1$.

Найдем q_{2n+1} . Рассуждения для q_{2n+2} будут абсолютно аналогичны. q_{2n+1} должен удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} q_{2n+1} - q_1 &\in \langle t_1 - t_{n+1} \rangle, \\ q_{2n+1} - q_3 &\in \langle t_2 - t_{n+1} \rangle, \\ &\dots \\ q_{2n+1} - q_{2n-1} &\in \langle t_n - t_{n+1} \rangle. \end{aligned}$$

Индукцией по количеству выполненных условий нетрудно показать, что после выполнения первых k из них q_{2n+1} будет иметь вид: $q_{2n+1} = p_1 + (t_1 - t_{n+1})p_3 + \dots + (t_1 - t_{n+1}) \dots (t_{k-1} - t_{n+1})p_{2k-1} + (t_1 - t_{n+1}) \dots (t_k - t_{n+1})q$. Таким образом, $q_{2n+1} = p_1 + (t_1 - t_{n+1})p_3 + \dots + (t_1 - t_{n+1}) \dots (t_n - t_{n+1})p_{2n+1}$. Это завершает доказательство. Значит $H_{T^n}^*(H_{1n})$ есть свободный $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$ модуль с $2n$ образующими, указанными выше.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ H_{1n} И ОПИСАНИЕ КОЛЬЦА ЭКВИВАРИАНТНЫХ КОГОМОЛОГИЙ

Для образующих, вычисленных в предыдущем пункте, введем обозначения: $e = (1, 1, \dots, 1, 1), u = (0, t_1, 0, t_1, \dots, 0, t_1)$. Далее, для $1 \leq k \leq n-1$, обозначим $(2k+1)$ -ю образующую через v_k , $(2k+2)$ -ю образующую через w_k . Исходя из явного вида образующих, можно заключить, что $w_k = -uv_k$. Получим выражения для v_k , при $k = 2, \dots, n-1$, через u и v_1 и соотношения на u и v_1 .

Пример 4 (Соотношения для H_{11}). В этом случае имеем следующий набор образующих: $\{e = (1, 1), u = (0, t)\}$. Нетрудно заметить, что единственным соотношением будет $u^2 = tu$. Таким образом, $H_{T^1}^*(\mathbb{C}P^1) \cong \mathbb{Z}[t][u]/u(u-t) = 0$.

Пример 5 (Соотношения для H_{12}). Имеем следующий набор образующих: $\{e = (1, 1, 1, 1), u = (0, t_1, 0, t_1), v_1 = (0, 0, t_1 - t_2, -t_2), w_1 = (0, 0, 0, t_1 t_2)\}$. Как уже было сказано, $w_1 = -uv_1$. Получаем соотношения: $u^2 = tu, v_1^2 = v_1((t_1 - t_2) - u)$ Таким образом, $H_{T^2}^*(H_{12}) \cong \mathbb{Z}[t_1, t_2][u, v_1]/(u(u-t) = 0, v_1^2 = v_1((t_1 - t_2) - u))$.

Пример 6 (Соотношения для H_{13}). Граф, соответствующий одномерным орбитам и неподвижным точкам с указанием стабилизаторов, приведен на рисунке 2. Укажем набор образующих: $\{e = (1, 1, 1, 1, 1, 1),$

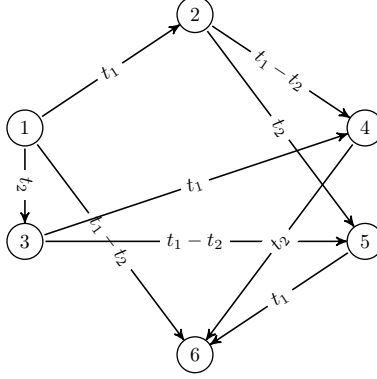


Рис. 3

$u = (0, t_1, 0, t_1, 0, t_1), v_1 = (0, 0, t_1 - t_2, -t_2, t_1 - t_3, -t_3), w_1 = (0, 0, 0, t_1 t_2, 0, t_1 t_3), v_2 = (0, 0, 0, 0, (t_1 - t_3)(t_2 - t_3), -t_3(t_2 - t_3)), w_2 = (0, 0, 0, 0, 0, t_1 t_3(t_2 - t_3))$. Как и выше, $w_1 = -uv_1, w_2 = -uv_2$. Поскольку первые 4 координаты v_2 равны 0, то $v_2 = v_1^2 - v_1((t_1 - t_2) - u)$ (так как это было единственным соотношением на v_1). Получаем соотношения: $u^2 = tu, v_3^2 = v_1^2((t_1 - t_2) - u) + v_2((t_1 - t_3) - u)$. Второе соотношение можно привести к виду: $v_2((t_1 - t_3) - (u + v_1)) = 0$. Таким образом, $H_{T^3}^*(H_{13}) \cong \mathbb{Z}[t_1, t_2, t_3][u, v_1]/(u(u - t) = 0, v_2((t_1 - t_3) - (u + v_1)) = 0)$.

В общем случае имеем набор образующих $\{e, u, v_1, -uv_1, \dots, v_{n-1}, -uv_{n-1}\}$. Из предыдущих рассуждений вытекает, что v_2, \dots, v_{n-1} определяются индуктивно: $v_k = v_1^k - (v_1(v_1^{k-1} - v_{k-1}) + v_{k-1}((t_1 - t_k) - u)) = v_{k-1}((u + v_1) - (t_1 - t_k))$. Ясно, что соотношение $u^2 = t_1 u$ будет присутствовать для любого n . Индукцией по n покажем, что второе соотношение будет иметь вид: $v_{n-1}((t_1 - t_n) - (u + v_1)) = 0$. База индукции проверена в примерах 5 и 6. Докажем, что для $H_{1, n+1}$ выполнено соотношение $v_n((t_1 - t_{n+1}) - (u + v_1)) = 0$. $v_n((t_1 - t_{n+1}) - (u + v_1)) = -v_{n-1}((t_1 - t_n) - (u + v_1))((t_1 - t_{n+1}) - (u + v_1))$. Произведение первых двух членов зануляет первые $2n$ координат. Рассмотрим последний член произведения: $u + v_1 = (0, t_1, t_1 - t_2, t_1 - t_2, \dots, t_1 - t_{n+1}, t_1 - t_{n+1})$. Значит $(t_1 - t_{n+1}) - (u + v_1) = (\underbrace{*, \dots, *}_{2n}, 0, 0)$. Это означает, что нужное соотношение выполнено. Таким образом, $H_{T^n}^*(H_{1n}) \cong \mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_n][u, v_1]/(u(u - t) = 0, v_{n-1}((t_1 - t_n) - (u + v_1)) = 0)$.

5. ОПИСАНИЕ КОЛЬЦА ЭКВИВАРИАНТНЫХ КОГОМОЛОГИЙ H_{22}

Действие тора T^2 на H_{22} имеет 6 неподвижных точек. Занумеруем их следующим образом:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow ([0 : 1 : 0], [1 : 0 : 0]), \\ 2 &\rightarrow ([1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0]), \\ 3 &\rightarrow ([0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]), \\ 4 &\rightarrow ([1 : 0 : 0], [0 : 0 : 1]), \\ 5 &\rightarrow ([0 : 0 : 1], [0 : 1 : 0]), \\ 6 &\rightarrow ([0 : 0 : 1], [1 : 0 : 0]). \end{aligned}$$

Граф, соответствующий одномерным орбитам и неподвижным точкам с указанием стабилизаторов, приведен на рисунке 3. Таким образом, q_i должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} q_2 - q_1 &\in \langle t_1 \rangle, q_3 - q_1 \in \langle t_2 \rangle, \\ q_4 - q_2 &\in \langle t_1 - t_2 \rangle, q_4 - q_3 \in \langle t_1 \rangle, \\ q_5 - q_2 &\in \langle t_2 \rangle, q_5 - q_3 \in \langle t_1 - t_2 \rangle, \\ q_6 - q_1 &\in \langle t_1 - t_2 \rangle, q_6 - q_4 \in \langle t_2 \rangle, q_6 - q_5 \in \langle t_1 \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что q_i будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} q_1 &= p_1, q_2 = p_1 + t_1 p_2, q_3 = p_1 + t_2 p_3, \\ q_4 &= p_1 + t_1 p_2 - (t_1 - t_2) p_3 + t_1(t_1 - t_2) p_4, \\ q_5 &= p_1 + (t_1 - t_2) p_2 + t_2 p_3 + t_2(t_1 - t_2) p_5, \end{aligned}$$

$$q_6 = p_1 + (t_1 - t_2)p_2 - (t_1 - t_2)p_3 + t_1(t_1 - t_2)p_4 + t_2(t_1 - t_2)p_5 + t_1t_2(t_1 - t_2)p_6.$$

Получаем набор образующих $\{e = (1, 1, 1, 1, 1, 1), u = (0, t_1, 0, t_1, t_1 - t_2, t_1 - t_2), v = (0, 0, t_2, -(t_1 - t_2), t_2, -(t_1 - t_2)), w_1 = (0, 0, 0, t_1(t_1 - t_2), 0, t_1(t_1 - t_2)), w_2 = (0, 0, 0, 0, t_2(t_1 - t_2), t_2(t_1 - t_2)), w_3 = (0, 0, 0, 0, 0, t_1t_2(t_1 - t_2))\}$. Явным вычислением проверяется, что $w_1 = v^2 - t_2v$, $w_2 = t_1u - u^2$, $w_3 = (u^2 - t_1u)(v - t_2)$, и находятся соотношения для u и v вида: $u(u - t_1)(u - (t_1 - t_2)) = 0$, $v(v - t_2)(v + (t_1 - t_2)) = 0$. В итоге получаем, что $H_{T^2}^*(H_{22}) \cong \mathbb{Z}[t_1, t_2][u, v]/(u(u - t_1)(u - (t_1 - t_2)) = 0, v(v - t_2)(v + (t_1 - t_2)) = 0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Goresky M., Kottwitz R., MacPherson R. *Equivariant cohomology, Koszul duality and the localization theorem*. Invent. Math. 131 (25-83), 1998.
- [2] Каргапольцева А.И. *Эффективные действия тора на гиперповерхностях Милнора*. 2018.