ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ В КОММУТАНТАХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ГРУПП КОКСЕТЕРА И ГРАФ-АЛГЕБР

Выполнил студент
603 группы
Ильясова Марина Фаридовна

____
подпись студента

Научный руководитель:
профессор Панов Тарас Евгеньевич

____
подпись научного руководителя

Москва
2020 г.

Содержание

Введение

Прямоугольная группа Коксетера, соответствующая графу $\mathcal{K}^1$ (или флаговому симплициальному комплексу $\mathcal{K}$), определяется как группа $RC_{\mathcal{K}}$ с образующими $g_1, \ldots, g_m$ и соотношениями $g_i^2 = 1$, $g_i g_j = g_j g_i$ при $\{i, j\} \in \mathcal{K}^1$. Прямоугольные группы Коксетера представляют интерес с геометрической точки зрения, так как они возникают из отражений в гипергранях прямоугольных многогранников, в том числе неограниченных, в пространстве Лобачевского.

Коммутант $RC'_{\mathcal{K}}$ прямоугольной группы Коксетера является фундаментальной группой конечномерного асферического пространства — *вещественного момент-угол комплекса* $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}}$, часто оказывающегося многообразием. В работе [12] был получен критерий, показывающий, в каких случаях коммутант $RC'_{\mathcal{K}}$ является свободной группой. А именно, $RC'_{\mathcal{K}} = \pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ — свободная группа, тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}'$ — хордовый граф.

Интересно отметить связь свойства коммутанта $RC'_{\mathcal{K}}$ быть свободной группой со свойством *минимальной неголодовости* симплициального комплекса $\mathcal{K}$, см. [9]. Как отмечено в [5, Theorem 4.8] для флаговых комплексов $\mathcal{K}$ свойство минимальной неголодовости эквивалентно тому, что *момент-угол-комплекс* $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}}$ гомеоморфен связной сумме произведений сфер. Естественным аналогом условия свободности $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ является условие свободности алгебры Понтрягина (гомологий петель) $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$. В [5] было показано, что алгебра Понтрягина $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ является градуированной свободной ассоциативной алгеброй тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}'$ — хордовый граф.

В этой работе получен критерий единственности соотношения в коммутанте $RC'_{\mathcal{K}}$. А именно, главным результатом является доказательство эквивалентности следующих условий для флагового симплициального комплекса $\mathcal{K}$ (теорема 2.3):

а) $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = RC'_{\mathcal{K}}$ — группа с одним соотношением;
б) $H_2(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$;
в) либо $\mathcal{K}$ есть p-цикл (граница p-угольника) с $p \geqslant 4$, либо $\mathcal{K}$ имеет вид (p-цикл)$*\Delta^q$ для некоторых $p \geqslant 4$ и $q \geqslant 0$, где Δ^q — q-симплекс.

При выполнении этих условий $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ гомеоморфен произведению $S_g \times D^{q+1}$, где S_g — замкнутая ориентируемая поверхность рода $g = (p-4)2^{p-3} + 1$, а D^{q+1} — $(q+1)$-мерный диск.

Эквивалентность свойств а) и б) вытекает из теоремы Линдона о тождестве [10] (см. [7, Theorem 2.1]), так как группа $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = RC'_{\mathcal{K}}$ не имеет кручения.

Также, в этой работе приводится аналогичный результат — критерий единственности соотношения в алгебре $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ (теорема 4.4). А именно, для флагового симплициального комплекса $\mathcal{K}$ следующие условия эквивалентны:

а) $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ — алгебра с одним соотношением;

б) $H_{2-j,2j}(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если j=p для некоторого p, } 4 \leqslant p \leqslant m; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$

в) либо $\mathscr{K}$ является p-циклом для $p \geqslant 4$, либо $\mathscr{K}$ имеет вид (p-цикл)$*\Delta^q$ для некоторых $p \geqslant 4$ и $q \geqslant 0$, где Δ^q — q-симплекс.

При выполнении этих условий комплекс $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}$ гомеоморфен связной сумме произведений сфер.

Как можно заметить, $\pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}})$ и $H_*(\Omega\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})$ имеют ровно одно соотношение при одинаковом условии на комплекс $\mathscr{K}$.

1. Предварительные сведения

Пусть $\mathscr{K}$ — *симплициальный комплекс* на множестве $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$, то есть такой набор подмножеств $I \subset [m]$, что для любого $I \in \mathscr{K}$ все подмножества в I также содержатся в $\mathscr{K}$. Считаем, что всегда $\varnothing \in \mathscr{K}$.

Конструкция 1.1 (полиэдральное произведение)**.** Пусть $\mathscr{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m]$ и

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A}) = \{(X_1, A_1), \ldots, (X_m, A_m)\}$$

— набор из m пар топологических пространств с отмеченными точками $pt \in A_i \subset X_i$. Для каждого подмножества $I \subset [m]$ положим

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A})^I = \Big\{(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{k=1}^{m} X_k : x_k \in A_k \text{ при } k \notin I\Big\}$$

и определим *полиэдральное произведение* набора $(\mathbf{X}, \mathbf{A})$, соответствующее комплексу $\mathscr{K}$, как

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A})^{\mathscr{K}} = \bigcup_{I \in \mathscr{K}} (\mathbf{X}, \mathbf{A})^I = \bigcup_{I \in \mathscr{K}} \left(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \notin I} A_i \right) \subset \prod_{k=1}^{m} X_k.$$

Если $X_i = X$ и $A_i = A$ для всех i, то будем использовать обозначение $(X, A)^{\mathscr{K}}$ вместо $(\mathbf{X}, \mathbf{A})^{\mathscr{K}}$.

Пример 1.2.

1. Пусть $(X, A)^{\mathscr{K}} = (D^1, S^0)$, где D^1 — отрезок $[-1, 1]$, а S^0 — его граница {-1,1}. Полиэдральное произведение $(D^1, S^0)^{\mathscr{K}}$ называется *вещественным момент-угол-комплексом* и обозначается $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$:

$$\mathscr{R}_{\mathscr{K}} = (D^1, S^0)^{\mathscr{K}} = \bigcup_{I \in \mathscr{K}} (D^1, S^0)^I.$$

Заметим, что $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ является кубическим подкомплексом в кубе $(D^1)^m = [-1, 1]^m$.

2. Пусть $(X, A)^{\mathscr{K}} = (D^2, S^1)$, где D^2 — замкнутый единичный круг, а S^1 — его граница. Полиэдральное произведение $(D^2, S^1)^{\mathscr{K}}$ называется *момент-угол-комплексом* и обозначается $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}$:

$$\mathscr{Z}_{\mathscr{K}} = (D^2, S^1)^{\mathscr{K}} = \bigcup_{I \in \mathscr{K}} (D^2, S^1)^I.$$

3. Пусть $(X, A) = (\mathbb{C}P^\infty, pt)$. Полиэдральное произведение $(\mathbb{C}P^\infty, pt)^{\mathscr{K}}$ называется *пространством Дэвиса-Янушкевича* и обозначается $DJ_{\mathscr{K}}$.

Конструкция 1.3 (прямоугольная группа Коксетера)**.** Пусть Γ — граф с m вершинами. Будем писать $\{i,j\} \in \Gamma$, если вершины i и j соединены ребром. Тогда *прямоугольная группа Коксетера* RC_Γ определяется как

$$RC_\Gamma = F(g_1,\dots,g_m)/(g_i^2 = 1,\ g_ig_j = g_jg_i \text{ при } \{i,j\} \in \Gamma),$$

где $F(g_1,\dots,g_m)$ — свободная группа с m образующими.

Прямоугольную группу Коксетера, соответствующую одномерному остову симплициального комплекса $\mathcal{K}$, будем обозначать через $RC_{\mathcal{K}}$.

Недостающая грань симплициального комплекса $\mathcal{K}$ — такое подмножество $I \subset [m]$, которое само не является симплексом в $\mathcal{K}$, но любое собственное подмножество которого является симплексом в $\mathcal{K}$. Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ называется *флаговым*, если у него нет недостающих граней размерности больше один (т. е. любой набор его вершин, попарно соединенных ребрами, является набором вершин некоторого симплекса). *Кликой* в графе Γ называется называется подмножество I его вершин, попарно соединенных ребрами. Для графа Γ можно определить *кликовый комлекс* этого графа — симплициальный комплекс, получающийся заполнением каждой клики в Γ симплексом. Каждый флаговый комплекс $\mathcal{K}$ является кликовым комлексом своего одномерного остова $\Gamma = \mathcal{K}^1$.

Линейно связное пространство X называется *асферическим*, если $\pi_i(X) = 0$ для любого $i \geqslant 2$. Асферическое пространство X является пространством Эйленберга–Маклейна $K(\pi,1)$, где $\pi = \pi_1(X)$.

Коммутант группы G будем обозначать через G'.

Предложение 1.4 (см. [12, следствие 3.4])**.** *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на m вершинах. Тогда*

а) *Группа $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ изоморфна коммутанту $RC'_{\mathcal{K}}$;*

б) *$\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ имеет гомотопический тип $K(\pi,1)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ — флаговый комплекс.*

Граф Γ называется *хордовым*, если каждый его цикл с четырьмя и более вершинами содержит хорду (ребро, соединяющее две вершины, не являющиеся соседними в цикле). Назовем граф *p-циклом*, если он является границей p-угольника.

В [12] получен следующий критерий свободности коммутанта $RC'_{\mathcal{K}}$.

Теорема 1.5 ([12, следствие 4.4])**.** *Коммутант $RC'_{\mathcal{K}}$ является свободной группой тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}^1$ является хордовым графом.*

Пусть $(g,h) = g^{-1}h^{-1}gh$ — групповой коммутатор элементов g, h. Для каждого подмножества $J \subset [m]$ мы можем определить *полный подкомплекс* в комплексе $\mathcal{K}$ как

$$\mathcal{K}_J = \{I \in \mathcal{K} : I \subset J\}.$$

Следующая теорема из [12] дает явный вид минимального набора образующих коммутанта $RC'_{\mathcal{K}}$.

Теорема 1.6 ([12, теорема 4.5])**.** *Пусть $RC_{\mathcal{K}}$ — прямоугольная группа Коксетера, соответствующая симплициальному комплексу $\mathcal{K}$ на m вершинах. Тогда коммутант $RC'_{\mathcal{K}}$ имеет конечный минимальный набор образующих, состоящий из $\sum_{J\subset[m]} \operatorname{rank} \widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$ вложенных коммутаторов вида*

$$(g_j,g_i),\quad (g_{k_1},(g_j,g_i)),\ \dots,\ (g_{k_1},(g_{k_2},\dots(g_{k_{m-2}}(g_j,g_i))\dots)),$$

где $k_1 < k_2 < \dots < k_l < j > i$, $k_s \neq i$ для всех s и i — наименьшая вершина в некоторой связной компоненте подкомплекса $\mathcal{K}_{\{k_1,\dots,k_l,j,i\}}$, не содержащей j.

Рассмотрим короткую точную последовательность алгебр Хопфа

$$1 \longrightarrow H_*(\Omega \mathscr{Z}_{\mathscr{K}}) \longrightarrow H_*(\Omega DJ_{\mathscr{K}}) \xrightarrow{\mathrm{Ab}} H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^m) \longrightarrow 0,$$

порожденную гомотопическим расслоением $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}} \to DJ_{\mathscr{K}} \to (\mathbb{C}P^\infty)^m$. Здесь Ab — гомоморфизм абелианизации, $H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^m) = \Lambda[u_1, \dots, u_m]$ — градуированная коммутативная алгебра с $\deg u_i = 1$. Алгебра $H_*(\Omega \mathscr{Z}_{\mathscr{K}})$ является коммутантом алгебры $H_*(\Omega DJ_{\mathscr{K}})$.

Пусть $[a, b] = ab + (-1)^{\deg a \deg b + 1} ba$ — градуированный коммутатор элементов a и b.

Теорема 1.7 ([13, Theorem 9.3]). *Пусть $\mathscr{K}$ — флаговый симплициальный комплекс. Тогда имеется следующий изоморфизм*

$$H_*(\Omega DJ_K) \cong T(u_1, \dots, u_m)/\langle u_i^2 = 0,\ [u_i, u_j] = 0 \text{ при } \{i, j\} \in \mathscr{K}\rangle,$$

где $T(u_1, \dots, u_m)$ — градуированная свободная ассоциативная алгебра с $\deg u_i = 1$.

Следующий результат, аналогичный теореме 1.6, дает явный вид минимального набора образующих алгебры $H_*(\Omega \mathscr{Z}_{\mathscr{K}})$.

Теорема 1.8 ([5, теорема 4.3]). *Пусть $\mathscr{K}$ — флаговый симплициальный комплекс на m вершинах. $H_*(\Omega \mathscr{Z}_{\mathscr{K}})$ имеет конечный минимальный набор образующих, состоящий из $\sum_{J \subset [m]} \operatorname{rank} \widetilde{H}_0(\mathscr{K}_J)$ коммутаторов вида*

$$[u_j, u_i], \quad [u_{k_1}, [u_j, u_i]], \ \dots, \ [u_{k_1}, [u_{k_2}, \dots [u_{k_{m-2}}[u_j, u_i]] \dots]],$$

где $k_1 < k_2 < \dots < k_l < j > i$, $k_s \neq i$ для всех s и i — наименьшая вершина в некоторой связной компоненте подкомплекса $\mathscr{K}_{\{k_1, \dots, k_l, j, i\}}$, не содержащей j.

В [5] получен следующий критерий свободности алгебры $H_*(\Omega \mathscr{Z}_{\mathscr{K}})$.

Теорема 1.9 ([5, следствие 4.5]). *Алгебра $H_*(\Omega \mathscr{Z}_{\mathscr{K}})$ является свободной ассоциативной алгеброй тогда и только тогда, когда $\mathscr{K}^1$ является хордовым графом.*

Гомологии комплексов $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}$ и $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ описываются следующими результатами.

Для групп гомологий комплекса $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}$ имеется естественная биградуировка, порожденная биградуировкой на CW-структуре $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}$ (см. [3, п. 4.4])

$$H_k(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}) \cong \bigoplus_{-i+2j=k} H_{-i,2j}(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}).$$

Теорема 1.10 (см. [3, п. 4.5]). *Имеется изоморфизм*

$$H_{-i,2j}(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}) \cong \bigoplus_{J \subset [m], |J| = j} \widetilde{H}_{j-i-1}(\mathscr{K}_J).$$

Теорема 1.11 (см. [3, п. 4.5]). *Для любого $k \geqslant 0$ имеется изоморфизм*

$$H_k(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \widetilde{H}_{k-1}(\mathscr{K}_J).$$

2. Критерий единственности соотношения в коммутанте прямоугольной группы Коксетера

Напомним, что *группой с одним соотношением* называется группа, не являющаяся свободной, и для которой существует система образующих, в которых соотношение единственно.

Пусть G — группа с одним соотношением, т. е. $G = F/R$, где $F = F(x_1, \dots, x_l)$ — свободная группа, R — наименьшая нормальная подгруппа в F, содержащая соотношение r. Рассмотрим пространство

$$Y(G) = \Big(\bigvee_{i=1}^{l} S_i^1\Big) \cup_r e^2, \tag{1}$$

полученное приклеиванием двумерной клетки к букету окружностей по слову r. По построению его гомологии описываются следующим образом.

Предложение 2.1. *Имеем* $H_k(Y(G);\mathbb{Z}) = 0$ *при* $k \geqslant 3$ *и*

$$H_2(Y(G);\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } r \in F'; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следующее утверждение является одной из эквивалентных формулировок теоремы Линдона о тождестве [10].

Теорема 2.2 (см. [7, Theorem 2.1])**.** *Если* G *— группа с одним соотношением* r*, которое не является степенью, т. е.* $r \neq u^n$ *для* $n > 1$*, то пространство* $Y(G)$ *имеет гомотопический тип* $K(G, 1)$.

В условиях теоремы 2.2 мы имеем $H_k(G;\mathbb{Z}) = H_k(Y(G);\mathbb{Z})$, т. е. гомологическая размерность группы G не превосходит 2.

Теорема 2.3. *Пусть* $\mathscr{K}$ *— флаговый симплициальный комплекс на множестве* $[m]$*. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) $\pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) = RC'_{\mathscr{K}}$ *— группа с одним соотношением;*

б) $H_2(\mathscr{R}_{\mathscr{K}};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$*;*

в) *либо* $\mathscr{K}$ *является* p*-циклом для* $p \geqslant 4$*, либо* $\mathscr{K}$ *имеет вид (*p*-цикл)*$*\Delta^q$ *для некоторых* $p \geqslant 4$ *и* $q \geqslant 0$*, где* Δ^q *—* q*-симплекс.*

При выполнении любого из этих трех условий имеем $H_k(\mathscr{R}_{\mathscr{K}};\mathbb{Z}) = 0$ *при* $k \geqslant 3$.

Доказательство. В доказательстве теоремы все группы гомологий рассматриваются с коэффициэнтами в $\mathbb{Z}$.

в) $\Rightarrow$ б). (Эта импликация вытекает из импликаций, доказанных ниже, но мы приводим доказательство для иллюстрации.) Пусть $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ — множество вершин комплекса $\mathscr{K}$, образующих p-цикл, $p \geqslant 4$. Согласно теореме 1.11

$$H_2(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \widetilde{H}_1(\mathscr{K}_J). \tag{2}$$

Так как $\mathscr{K}_I$ — p-цикл, имеем $\widetilde{H}_1(\mathscr{K}_I) = \mathbb{Z}$ и $\widetilde{H}_1(\mathscr{K}_J) = 0$ при $J \neq I$, так как подкомплекс $\mathscr{K}_J$ с $J \neq I$ является стягиваемым пространством. Отсюда следует, что $H_2(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) = \mathbb{Z}$.

б) $\Rightarrow$ в). Пусть $H_2(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) = \mathbb{Z}$. Тогда в разложении (2) ровно одно из слагаемых в правой части равно $\mathbb{Z}$, а остальные равны 0. Это значит, что существует множество вершин $I = \{i_1, \dots, i_p\}$, образующих p-цикл для некоторого $p \geqslant 4$ (так как $\mathscr{K}$ — флаговый). Поскольку для любого подмножества $J \subset I$ имеем $\widetilde{H}_1(\mathscr{K}_J) = 0$, то никакие две вершины, не являющиеся соседними в p-цикле, не соединены ребром. Если в комплексе $\mathscr{K}$ существует вершина $j \notin I$, то из того, что $\widetilde{H}_1(\mathscr{K}_{I\cup\{j\}}) = 0$, следует, что вершина j соединена с каждой вершиной p-цикла. Если предположить, что в комплексе $\mathscr{K}$ существует вершины $j_1, j_2 \notin I$, не соединенные ребром, то подкомплекс $\mathscr{K}_{\{i_1,i_3\}\cup\{j_1,j_2\}}$ является 4-циклом, и, значит, $\widetilde{H}_1(\mathscr{K}_{\{i_1,i_3\}\cup\{j_1,j_2\}}) = \mathbb{Z}$, а это противоречит предположению. Следовательно, все вершины комплекса $\mathscr{K}$, не входящие в множество I, соединены с каждой вершиной множества I и попарно между собой ребрами. Так как комплекс $\mathscr{K}$ — флаговый, получаем, что $\mathscr{K} = (p\text{-цикл})*\Delta^q$ для некоторых $p \geqslant 4$ и $q \geqslant 0$.

в) $\Rightarrow$ а). Пусть сначала $\mathscr{K}$ является p-циклом. Тогда комплекс $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ гомеоморфен замкнутой ориентируемой поверхности рода $(p-4)2^{p-3}+1$ (см. [3, Proposition 4.1.8]). С другой стороны $\pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) \cong RC'_{\mathscr{K}}$ согласно предложению 1.4. Поэтому $RC'_{\mathscr{K}}$ — группа с одним соотношением.

Пусть теперь $\widetilde{\mathscr{K}} = \mathscr{K} * \Delta^q$, где $\mathscr{K}$ — p-цикл. Тогда $\mathscr{R}_{\widetilde{\mathscr{K}}} = \mathscr{R}_{\mathscr{K}} \times D^{q+1}$ и $RC'_{\widetilde{\mathscr{K}}} = \pi_1(\mathscr{R}_{\widetilde{\mathscr{K}}}) = \pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) = RC'_{\mathscr{K}}$ — также группа с одним соотношением.

а) $\Rightarrow$ б). Так как $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ — асферическое конечное клеточное пространство, то группа $\pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}})$ свободна от кручения (например, см. [8, предложение 2.45]). Поэтому, если $\pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) = F/R$ — группа с одним соотношением r, то r не может являться степенью u^n для $n > 1$, иначе элемент u был бы конечного порядка.

Рассмотрим пространство $Y(RC'_{\mathscr{K}})$, см. (1). Согласно теореме 2.2 оно имеет гомотопичекий тип $K(RC'_{\mathscr{K}}, 1)$, а значит его группы гомологий совпадают с группами гомологий пространства $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$. Из предложения 2.1 следует, что группа $H_2(\mathscr{R}_{\mathscr{K}})$ равна либо $\mathbb{Z}$, либо 0. Группа $RC'_{\mathscr{K}}$ — не свободная, значит, граф $\mathscr{K}^1$ — не хордовый, то есть в нем существует бесхордовый цикл I длины $p \geqslant 4$. Поэтому в правой части разложения (2) одно из слагаемых равно $\mathbb{Z} = \widetilde{H}_1(\mathscr{K}_I)$. Следовательно, имеем $H_2(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) = \mathbb{Z}$.

Докажем теперь, что при выполнении условия пункта в) группы гомологий $H_k(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) = 0$ при $k \geqslant 3$. Согласно теореме 1.11

$$H_k(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}_{k-1}(\mathscr{K}_J).$$

Покажем, что все слагаемые в правой части равны 0 при $k \geqslant 3$. Если $I = \{i_1, \dots, i_p\}$, $p \geqslant 4$ — множество вершин комплекса $\mathscr{K}$, образующие p-цикл, то $\widetilde{H}_{k-1}(\mathscr{K}_I) = 0$ при $k \geqslant 3$. Так как для любого $J \neq I$ полный подкомплекс $\mathscr{K}_J$ является стягиваемым пространством, то $\widetilde{H}_{k-1}(\mathscr{K}_J) = 0$. Таким образом, получаем, что $H_k(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) = 0$ для любого $k \geqslant 3$. □

3. Связные суммы произведений сфер

В данном разделе мы найдем алгебру Понтрягина для пространств, являющихся связной суммой произведений сфер.

Пусть $M = \#_{i=1}^k \left(S^{d_i} \times S^{d-d_i}\right)$, $d_i \geqslant 2$, $d \geqslant 4$, — связная сумма многообразий. Топологически такая связная сумма получается приклеиванием одной клетки к букету сфер, т.е. имеется последовательность корасслоения

$$S^{d-1} \xrightarrow{\mathrm{w}} \bigvee_{i=1}^k S^{d_i} \vee S^{d-d_i} \xrightarrow{\mathrm{i}} \#_{i=1}^k \left(S^{d_i} \times S^{d-d_i}\right), \tag{3}$$

где w — сумма произведений Уайтхеда $w_i\colon S^{d-1} \to S^{d_i} \vee S^{d-d_i}$.

Предложение 3.1. *Для $d_i \geqslant 2$ и $d \geqslant 4$ имеется изоморфизм алгебр Хопфа*

$$H_*\left(\Omega\left(\#_{i=1}^k S^{d_i} \times S^{d-d_i}\right); \mathbb{Z}\right) \cong \frac{T(a_1, b_1, \dots, a_k, b_k)}{\langle [a_1, b_1] + \dots + [a_k, b_k] \rangle},$$

где $\deg a_i = d_i - 1$, $\deg b_i = d - d_i - 1$, *и* $[a_i, b_i] = a_i \otimes b_i + (-1)^{\deg a_i \deg b_i + 1} b_i \otimes a_i$ *— градуированный коммутатор.*

Доказательство. Гомологии алгебры $H_*(\Omega M; \mathbb{Z})$ для односвязного CW-комплекса M могут быть вычислены как гомологии модели Адамса-Хилтона (подробнее см. [1] и [2]). Поэтому мы будем рассматривать модель Адамса-Хилтона пространства $M = \#_{i=1}^k S^{d_i} \times S^{d-d_i}$. Посследовательность корасслоения (3) дает CW-структуру на M, состоящую из клеток $e^0, e_i^{d_i}, e_i^{d-d_i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, каждая из которых приклеивается тривиальным образом, и единственной клетки e^d приклеивающейся по w — сумме произведений Уайтхеда $w_i\colon S^{d-1} \to S^{d_i} \vee S^{d-d_i}$. Модель Адамса-Хилтона для данного M

$$AH_*(M) = \big(T(a_1, b_1, \dots, a_k, b_k, z), d\big)$$

— дифференциальная градуированная алгебра, где $a_i = (-1)^{d_i} s^{-1} e_i^{d_i}$, $b_i = s^{-1} e_i^{d-d_i}$, $z = s^{-1} e^d$, $\deg a_i = d_i - 1$, $\deg b_i = d - d_i - 1$ и $\deg z = d - 1$. $d(a_i) = d(b_i) = 0$ и

$$\begin{aligned} d(z) &= \sum_{i=1}^k \big((-1)^{d_i} s^{-1} e_i^{d_i} \otimes s^{-1} e_i^{d-d_i} + (-1)^{d-d_i}(-1)^{d_i(d-d_i)} s^{-1} e_i^{d-d_i} \otimes s^{-1} e_i^{d_i}\big) \\ &= \sum_{i=1}^k \big(a_i \otimes b_i + (-1)^{(d_i+1)(d-d_i)+d_i} b_i \otimes a_i\big) = \sum_{i=1}^k [a_i, b_i]. \end{aligned}$$

Ненулевой $x \in AH_*(M)$ является циклом тогда и только тогда, когда x не лежит в двустороннем идеале $\langle z\rangle$, и x является границей тогда и только тогда, когда $x \in \langle d(z)\rangle$. Таким образом, утверждение доказано. □

4. Критерий единственности соотношения в алгебре Понтрягина

Напомним, что *алгеброй с одним соотношением* называется алгебра, не являющаяся свободной, и которую можно представить как фактор свободной ассоциативной алгебры по двустороннему идеалу, порожденному единственным элементом.

Предложение 4.1. *Пусть $\mathscr{K}$ — симплициальный комплекс, и пусть $\mathscr{K}_I$ и $\mathscr{K}_J$ — различные полные подкомплексы $\mathscr{K}$, такие что алгебры $H_*(\Omega\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_I})$ и $H_*(\Omega\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_J})$ имеют хотя бы по одному соотношению. Тогда $H_*(\Omega\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})$ не является алгеброй с одним соотношением.*

Доказательство. Так как $\mathscr{K}_I$ и $\mathscr{K}_J$ — полные подкомплексы of $\mathscr{K}$, то пространства $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_I}$ и $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_J}$ являются ретрактами пространтства $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}$. Следовательно, пространства $\Omega\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_I}$ и $\Omega\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_J}$ являются ретрактами пространтства $\Omega\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}$, а значит, каждое из соотношений алгебр $H_*(\Omega\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_I})$ и $H_*(\Omega\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_J})$ является соотношением алгебры $H_*(\Omega\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})$. Т.к. подкомплексы $\mathscr{K}_I$ и $\mathscr{K}_J$ не совпадают, то и эти соотношения тоже. □

Пусть $\mathscr{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m]$, и пусть $j \in \mathscr{K}$ — вершина. Линк и звезда вершины j определяются как

$$link_{\mathscr{K}}(j) = \{I \in \mathscr{K} \mid j \cup I \in \mathscr{K},\, j \notin I\}$$

и

$$star_{\mathscr{K}}(j) = \{I \in \mathscr{K} \mid j \cup I \in \mathscr{K}\} = link_{\mathscr{K}}(j) * j.$$

Т.к. $\mathscr{K} = star_{\mathscr{K}}(j) \cup_{link_{\mathscr{K}}(j)} \mathscr{K}_{[m]\setminus j}$, то имеется следующий кодекартов квадрат

(4)
$$\begin{tikzcd} \mathscr{Z}_{link_{\mathscr{K}}(j)} \times T^{m-l} \arrow[r, "i\times\pi"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times\pi"] & \mathscr{Z}_{\mathscr{K}_{[m]\setminus j}} \times S^1 \arrow[d] \\ \mathscr{Z}_{link_{\mathscr{K}}(j)} \times T^{m-l-1} \arrow[r] & \mathscr{Z}_{\mathscr{K}}. \end{tikzcd}$$

Предложение 4.2 (см. [6, Lemma 3.3]). *Если отображение $i_2\colon \mathscr{Z}_{link_{\mathscr{K}}(j)} \to \mathscr{Z}_{\mathscr{K}_{[m]\setminus j}}$ гомотопно нулю, то имеется гомотопическая эквивалентность*

$$\mathscr{Z}_{\mathscr{K}} \simeq \Sigma^2(\mathscr{Z}_{link_{\mathscr{K}}(j)} \times T^{m-l-1}) \vee (\mathscr{Z}_{[m]\setminus j} \rtimes S^1),$$

где правое смэш-произведение топологических пространств с отмеченными точками $X \rtimes Y$ определяется как $X \times Y/(pt \times Y)$.

Предложение 4.3. *Предположим, что $M = \#_{i=1}^{k} \left(S^{d_i} \times S^{d-d_i}\right)$, где $d_i \geqslant 2$ и $d \geqslant 4$. Тогда $H_*(\Omega(M \rtimes S^1))$ не является алгеброй с одним соотношением.*

Доказательство. Так же, как в предложении 3.1, воспользуемся моделью Адамса-Хилтона. Отображение факторизации $M \times S^1 \to M \rtimes S^1$ задает клеточную структуру на $M \rtimes S^1$, которая состоит из клеток e^0, $e_i^{d_i}, e_i^{d-d_i}, e_i^{d_i+1}, e_i^{d-d_i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, а также e^d и e^{d+1}. Модель Адамса-Хилтона для этого пространства имеет следующий вид

$$AH_*(M \rtimes S^1) = \big(T(a_1, b_1, x_1, y_1, \dots, a_k, b_k, x_k, y_k, z, w), d\big),$$

где $a_i = (-1)^{d_i} s^{-1} e_i^{d_i}$, $b_i = s^{-1} e_i^{d-d_i}$, $x_i = (-1)^{d+1} s^{-1} e_i^{d_i+1}$, $y_i = s^{-1} e_i^{d-d_i+1}$, $z = s^{-1} e^d$, $w = s^{-1} e^{d+1}$, $\deg a_i = d_i - 1$, $\deg b_i = d - d_i - 1$, $\deg x_i = d_i$, $\deg y_i = d - d_i$, $\deg z = d - 1$, $\deg w = d$. $d(a_i) = d(b_i) = d(x_i) = d(y_i) = 0$,

$$d(z) = \sum_{i=1}^{k} [a_i, b_i]$$

и

$$\begin{aligned} d(w) = \sum_{i=1}^{k} \big((-1)^{d_i} s^{-1} e_i^{d_i} \otimes s^{-1} e_i^{d-d_i+1} + (-1)^{d-d_i+1} (-1)^{d_i(d-d_i+1)} s^{-1} e_i^{d-d_i+1} \otimes s^{-1} e_i^{d_i} \\ + (-1)^{d_i+1} (-1)^{d-d_i} s^{-1} e_i^{d_i+1} \otimes s^{-1} e_i^{d-d_i} + (-1)^{d-d_i} (-1)^{d_i(d-d_i)} s^{-1} e_i^{d-d_i} \otimes s^{-1} e_i^{d_i+1}\big) \\ = \sum_{i=1}^{k} \big(a_i \otimes y_i + (-1)^{(d_i+1)(d-d_i+1)+d_i} y_i \otimes a_i + x_i \otimes b_i + (-1)^{d_i(d-d_i+1)+1} b_i \otimes x_i\big) \\ = \sum_{i=1}^{k} \big([a_i, y_i] + [x_i, b_i]\big). \end{aligned}$$

Каждый элемент в $\langle d(z) \rangle$ и $\langle d(w) \rangle$ тривиален в гомологиях, т.к. является границей. Таким образом, в алгебре $H_*(\Omega(M \rtimes S^1))$ есть два соотношения, и значит, она не является алгеброй с одним соотношением. $\square$

Теорема 4.4. *Пусть $\mathcal{K}$ — флаговый симплициальный комплекс на множестве $[m]$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *$H_*(\Omega \mathscr{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Z})$ — алгебра с одним соотношением;*

б) $H_{2-j,2j}(\mathscr{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } j{=}p \text{ для некоторого } p,\ 4 \leqslant p \leqslant m \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$

в) *либо $\mathcal{K}$ является p-циклом для $p \geqslant 4$, либо $\mathcal{K}$ имеет вид (p-цикл)$*\Delta^q$ для некоторых $p \geqslant 4$ и $q \geqslant 0$, где Δ^q — q-симплекс.*

При выполнении любого из этих трех условий $H_{-i,2j}(\mathscr{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Z}) = 0$ при $j - i \geqslant 3$.

Доказательство. в) $\Rightarrow$ а). Пусть $\mathcal{K}$ является p-циклом либо имеет вид (p-цикл)$*\Delta^q$, $p \geqslant 4$, $q \geqslant 0$. В этом случае комплекс $\mathscr{Z}_{\mathcal{K}}$ гомеоморфен связной сумме произведений сфер (см. [11])

$$\mathscr{Z}_{\mathcal{K}} \cong \#_{k=3}^{p-1} (S^k \times S^{p+2-k})^{\#(k-2)\binom{p-2}{k-1}}.$$

По предложению 3.1 получаем, что $H_*(\Omega \mathscr{Z}_{\mathcal{K}})$ — алгебра с одним соотношением.

а) $\Rightarrow$ в). Пусть $H_*(\Omega \mathscr{Z}_{\mathcal{K}})$ — алгебра с одним соотношением. K^1 не может быть хордовым графом, т.к. в этом случае алгебра $H_*(\Omega \mathscr{Z}_{\mathcal{K}})$ была бы свободной (теорема 1.9). Т.е. существует набор вершин $I = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$, $p \geqslant 4$, такой, что $\mathcal{K}_I$ является p-циклом. Если $I = [m]$, то $\mathcal{K}$ — p-цикл.

Пусть $[m] \setminus I \neq \emptyset$. Покажем, что каждая вершина $j \in [m] \setminus I$ соединена с каждой вершиной в I. Рассмотрим полный подкомплекс $\mathscr{K}_{I\cup j}$. Заметим, что

$$\mathscr{K}_{I\cup j} = \mathscr{K}_I \cup_{link_{I\cup j}(j)} star_{I\cup j}(j).$$

Предположим, что $\mathscr{K}_{I\cup j} \neq \mathscr{K}_I * j$. Т.к. $\mathscr{K}$ — флаговый, существует вершина $b_l \in I$, не соединенная ребром с j. Сформируем цепочку, состоящую из смежных вершин $b_{l+1}, b_{l+2}, \ldots, b_{l+n_1}$ (считаем, что $b_{p+1} = b_1$), где $n_1 \geqslant 1$ — наименьший номер, такой, что j соединена ребром с b_{l+n_1}. Аналогично, сформируем цепочку $b_{l-1}, b_{l-2}, \ldots, b_{l-n_2}$, где $n_2 \geqslant 1$ — также наименьший номер, такой, что j соединена ребром с b_{l-n_2}. Рассмотрим четыре случая.

(1) Предположим, что таких n_1 и n_2, как описано выше, нет. В этом случае j не соединена ребром ни с одной вершиной из I и $link_{I\cup j}(j) = \emptyset$. Поэтому кодекартово произведение (4) принимает вид

$$\begin{tikzcd}
T^{p+1} \arrow[r, "i\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\pi"] & \mathscr{Z}_{\mathscr{K}_I} \times S^1 \arrow[d] \\
T^p \arrow[r] & \mathscr{Z}_{\mathscr{K}_{I\cup j}}
\end{tikzcd}$$

где отображение $i\colon T^p \to \mathscr{Z}_{\mathscr{K}_I}$ гомотопно нулю. Поэтому $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_{I\cup j}} \simeq \Sigma^2 T^p \vee (\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_I} \rtimes S^1)$ по предложению 4.2. Т.к. $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_I}$ гомеоморфен связной сумме произведений сфер, из предложения 4.3 получаем, что $H_*(\Omega(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_I} \rtimes S^1))$ — не алгебра с одним соотношением, а, значит, $H_*(\Omega\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_{I\cup j}})$ также не является алгеброй с одним соотношением.

(2) Если $b_{l+n_1} = b_{l-n_2}$, то $link_{I\cup j}(j) = b_{l+n_1}$. Тогда по предложению 4.2 $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_{I\cup j}} \simeq \Sigma^2 T^{p-1} \vee (\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_I} \rtimes S^1)$, и получаем, что $H_*(\Omega\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_{I\cup j}})$ — не алгебра с одним соотношением.

(3) Если b_{l+n_1} и b_{l-n_2} соединены ребром цикле в $\mathscr{K}_I$, то $link_{I\cup j}(j) = \{(b_{l+n_1}, b_{l-n_2})\}$. Тогда по предложению 4.2 $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_{I\cup j}} \simeq \Sigma^2 T^{p-2} \vee (\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_I} \rtimes S^1)$, и получаем, что $H_*(\Omega\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_{I\cup j}})$ — не алгебра с одним соотношением.

(4) Если b_{l+n_1} и b_{l-n_2} — различные и не соединены ребром в $\mathscr{K}_I$, тогда полный подкомплекс $\mathscr{K}_{\{j, b_{l-n_2}, \ldots, b_{l-1}, b_l, b_{l+1}, \ldots, b_{l+n_1}\}}$ в $\mathscr{K}$ является (n_1+n_2+2)-циклом, не совпадающим с $\mathscr{K}_I$. Тогда по предложению 4.1 $H_*(\Omega\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_{I\cup j}})$ — не алгебра с одним соотношением.

В каждом из этих случаев подкомплекс $\mathscr{K}_{I\cup j}$ является ретрактом комплекса $\mathscr{K}$, и поэтому, из того, что $H_*(\Omega\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_{I\cup j}})$ не является алгеброй с одним соотношением, следует, что и $H_*(\Omega\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})$ — не алгебра с одним соотношением. Получаем противоречие. Значит, j соединена ребрами с каждой вершиной I, и $K_{I\cup j} = K_I * j$.

Покажем теперь, что если существуют вершины $j_1, j_2 \in [m] \setminus I$, то они соединены ребром. Предположим, что это не так. Тогда, т.к. и j_1, и j_2 соединены ребрами со всеми вершинами в I, то подкомплекс $\mathscr{K}_{\{j_1, b_{i_1}, j_2, b_{i_3}\}}$ — 4-цикл, отличный от $\mathscr{K}_I$. Поэтому по предложению 4.1 получаем, что $H_*(\Omega\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_{I\cup\{j_1,j_2\}}})$ — не алгебра с одним соотношением, а, значит, и $H_*(\Omega\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})$ — не алгебра с одним соотношением. Противоречие.

Таким образом, получаем, что любая вершина в $[m]\setminus I$ соединена ребрами с каждой вершиной в I и со всеми остальными вершинами в $[m] \setminus I$. Т.к. комплекс $\mathscr{K}$ — флаговый, получаем, что $\mathscr{K} = \mathscr{K}_I * \Delta^q$ для некоторого $q \geqslant 0$.

в) $\Rightarrow$ б). Пусть $\mathscr{K}$ является p-циклом либо имеет вид (p-цикл)$*\Delta^q$, $p \geqslant 4$, $q \geqslant 0$. Пусть $I = \{b_1, \ldots, b_p\}$ — набор вершин, образующий p-цикл. Тогда по теореме 1.10

$$H_{2-j,2j}(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}) \cong \bigoplus_{J\subset[m], |J|=j} \widetilde{H}_1(\mathscr{K}_J).$$

Т.к. $\mathscr{K}_I$ — p-цикл, то $\widetilde{H}_1(\mathscr{K}_I)=\mathbb{Z}$, и $\widetilde{H}_1(\mathscr{K}_J)=0$ при $J\neq I$, т.к. подкомплекс $\mathscr{K}_J$ с $J\neq I$ является стягиваемым пространством. Отсюда следует, что $H_{2-p,2p}(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})=\mathbb{Z}$ и $H_{2-j,2j}(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})=0$ при $j\neq p$.

б) $\Rightarrow$ в). Пусть выполнено условие пункта б). Тогда в разложении

$$H_{2-j,2j}(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})\cong\bigoplus_{J\subset[m],|J|=j}\widetilde{H}_1(\mathscr{K}_J).$$

только одно слагаемое в правой части равно $\mathbb{Z}$, а остальные равны нулю. Применяя то же рассуждение, что и в доказательстве импликации б) $\Rightarrow$ в) в теореме 2.3, получаем, что $\mathscr{K}$ —p-цикл либо имеет вид (p-цикл)$*\Delta^q$, $p\geqslant 4$, $q\geqslant 0$.

Докажем теперь, что при выполнении пункта в) гомологии $H_{-i,2j}(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})=0$ для $j-i\geqslant 3$. По теореме 1.10

$$H_{-i,2j}(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})\cong\bigoplus_{J\subset[m],|J|=j}\widetilde{H}_{j-i-1}(\mathscr{K}_J).$$

Пусть $I=\{b_1,\dots,b_p\}$ — набор вершин, образующий p-цикл, $p\geqslant 4$. Тогда $\widetilde{H}_{j-i-1}(\mathscr{K}_I)=0$ для $j-i\geqslant 3$. Т.к. подкомплекс $\mathscr{K}_J$ с $J\neq I$ является стягиваемым пространством, $\widetilde{H}_{j-i-1}(\mathscr{K}_J)=0$. Следовательно, $H_{-i,2j}(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})=0$ для $j-i\geqslant 3$. $\square$

5. Примеры

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих теоремы 2.3 и 4.4.

Пример 5.1.
1. Пусть $\mathscr{K}$ — цикл из $m\geqslant 4$ звеньев. В доказательстве теоремы 2.3 мы показали, что коммутант $RC'_{\mathscr{K}}$ является группой с одним соотношением, а в доказательстве теоремы 4.4 — что $H_*(\Omega\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})$ является алгеброй с одним соотношением. Используя теоремы 1.11 и 1.10, получаем, что $H_2(\mathscr{R}_{\mathscr{K}};\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ и $H_{2-m,2m}(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}};\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$.

2. Пусть $\mathscr{K}$ — кликовый комплекс графа на рис. 1 а).

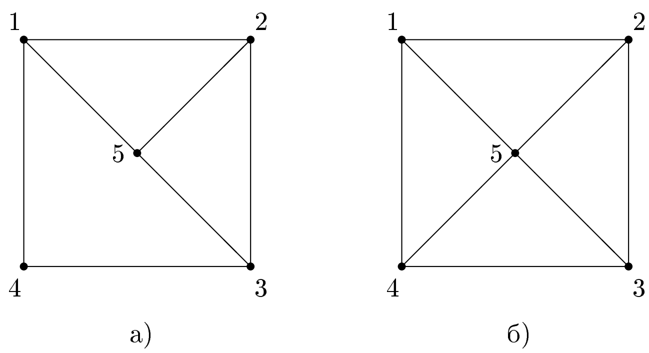

Рис. 1

Теорема 1.6 дает для коммутанта $RC'_{\mathscr{K}}$ следующую систему порождающих:

$$(g_3,g_1),\ (g_4,g_2),\ (g_5,g_4),\ (g_2,(g_5,g_4)),$$

которые связаны соотношениями

$$(g_3,g_1)^{-1}(g_4,g_2)^{-1}(g_3,g_1)(g_4,g_2)=1,\quad (g_3,g_1)^{-1}(g_5,g_4)^{-1}(g_3,g_1)(g_5,g_4)=1.$$

Это легко доказать следующим образом. Так как каждый из элементов g_1 и g_3 коммутирует с элементами g_2 и g_4, то значит коммутируют и коммутаторы $(g_4,g_2)^{-1}$ и (g_3,g_1). Поэтому получаем

$$(g_3,g_1)^{-1}(g_4,g_2)^{-1}(g_3,g_1)(g_4,g_2)=(g_3,g_1)^{-1}(g_3,g_1)(g_4,g_2)^{-1}(g_4,g_2)=1.$$

Аналогично доказывается и второе соотношение. Используя теорему 1.11, получаем, что $H_2(\mathscr{R}_{\mathscr{K}};\mathbb{Z})=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$.

Теорема 1.8 дает для алгебры $H_*(\Omega\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})$ следующую систему порождающих:

$$[u_3,u_1],\ [u_4,u_2],\ [u_5,u_4],\ [u_2,[u_5,u_4]],$$

связанных соотношениями

$$[u_3,u_1][u_4,u_2]-[u_4,u_2][u_3,u_1]=0,\quad [u_3,u_1][u_5,u_4]-[u_5,u_4][u_3,u_1]=0$$

и

$$[u_3,u_1][u_2,[u_5,u_4]-[u_2,[u_5,u_4]][u_3,u_1]=0.$$

Также по теореме 1.10 получаем $H_{-2,8}(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ и $H_{-3,10}(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})=\mathbb{Z}$.

3. Пусть $\mathscr{K}$ — кликовый комплекс графа на рис. 1 б). Теорема 1.6 дает для коммутанта $RC'_{\mathscr{K}}$ следующую систему порождающих:

$$(g_3,g_1),\ (g_4,g_2),$$

связанных соотношением $(g_3,g_1)^{-1}(g_4,g_2)^{-1}(g_3,g_1)(g_4,g_2)=1$. В данном примере коммутант $RC'_{\mathscr{K}}$ — группа с одним соотношением. Из теоремы 1.11 следует, что $H_2(\mathscr{R}_{\mathscr{K}};\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$.

Теорема 1.8 дает для алгебры $H_*(\Omega\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})$ следующую систему порождающих:

$$[u_3,u_1],\ [u_4,u_2],$$

связанных соотношением $[u_3,u_1][u_4,u_2]-[u_3,u_1][u_4,u_2]=0$. Получаем, что $H_*(\Omega\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})$ — алгебра с одним соотношением. Также по теореме 1.10 получаем $H_{-2,8}(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})=\mathbb{Z}$.

Список литературы

[1] J.F. Adams. *On the cobar construction.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA 42 (1956), 409–412.

[2] J.F. Adams, P.J. Hilton. *On the chain algebra of a loop space.* Comment. Math. Helv. 30 (1956), 305–330.

[3] V.M. Buchstaber, T.E. Panov. *Toric Topology.* Mathematical Surveys and Monographs, vol. 204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[4] J. Grbic, M. Ilyasova, T. Panov, G. Simmons. *One-relator groups and algebras related to polyhedral products*; arXiv:2002.11476.

[5] J. Grbic, T. Panov, S. Theriault, J. Wu. *The homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes.* Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016), no. 9, 6663–6682.

[6] J. Grbic, S. Theriault. *The homotopy type of the complement of a coordinate subspace arrangment.* Topology 46 (2007), no. 4, 357–396.

[7] E. Dyer, A.T. Vasquez. *Some small aspherical spaces.* J. Austral. Math. Soc. 16 (1973), 332–352.

[8] А. Хатчер. *Алгебраическая топология.* Издательство МЦНМО, Москва, 2011.

[9] И.Ю. Лимонченко. “Семейства минимально неголодовских комплексов и полиэдральные произведения”, Дальневост. матем. журн., 15:2 (2015), 222–237

[10] R.C. Lyndon. *Cohomology theory of groups with a single defining relation.* Ann. of Math. (2) 52 (1950), 650–665.

[11] D. McGavran. *Adjacent connected sums and torus actions.* Trans. Amer. Math. Soc. 251 (1979), 235–254.

[12] Т.Е. Панов, Я.А. Верёвкин. *Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Кокстера.* Мат. сборник 207 (2016), вып. 11, стр. 105–126.

[13] T. Panov, N. Ray. *Categorical aspects of toric topology.* Toric topology, Contemp. Math. 460, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 293–322.