

ТРОПИЧЕСКИЕ ПРЕДЕЛЫ НЕКОТОРЫХ КОМПЛЕКСНЫХ ПРОСТРАНСТВ.

А. Н. ГОЛОВКО

1. ГРАФЫ КАК СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ГОЛОМОРФНЫХ КРИВЫХ.

Конструкция 1.1. Пусть $P(z, w) = \sum p_{kl} z^k w^l$ — какой-нибудь многочлен на \mathbb{C}^2 . Выкинем координатные прямые, ограничим функцию на \mathbb{C}^{*2} . Тогда можно сделать подстановку $z = e^{z_T/\hbar}$, $w = e^{w_T/\hbar}$; z_T и w_T определены с точностью до $2\pi i\hbar$. Рассмотрим $Q(z_T, w_T) = P(z, w) = \sum p_{kl} e^{kz_T/\hbar} e^{lw_T/\hbar}$, это голоморфная $2\pi i\hbar$ -инвариантная по каждому аргументу функция на \mathbb{C}^2 . Изучим её гиперповерхность её нулей $\sum p_{kl} e^{kz_T/\hbar} e^{lw_T/\hbar} = 0$.

Заметим, что для точки \mathbb{C}^{*2} общего положения среди всех мономов найдётся только один, у которого показатель экспоненты $(\Re k z_T + l w_T)/\hbar$ будет максимален. Тогда при $\hbar \rightarrow 0$ этот моном будет бесконечно велик по сравнению с остальными, так что значение многочлена всегда будет отлично от нуля, и точка не будет лежать на предельной гиперповерхности.

Для точки гиперповерхности общего положения мономов с максимальной вещественной частью показателя будет два. Поделим многочлен на один из них, тогда условие обращения в ноль запишется как

$$1 + a e^{(kz_T + lw_T)/\hbar} + \dots = 0,$$

где многоточием обозначены слагаемые, бесконечно малые по сравнению с первыми двумя. Как видно, с точностью до $o(\hbar)$ должно быть выполнено $\Re k z_T + l w_T = 0$ для точек гиперповерхности в окрестности рассматриваемой. Следовательно, вблизи общего нуля предельная гиперповерхность будет проектироваться на плоскость \mathbb{R}^2 с координатами z_T , w_T в отрезок прямой, ортогональной вектору (k, l) . Более точно, следует рассматривать более широкий класс пределов: $z = e^{\Re z_T/\hbar + i\phi}$, $w = e^{\Re w_T/\hbar + i\psi}$, $p_{kl} = e^{\Re \ln p_{kl}/\hbar + i\phi_{kl}}$, тогда локально проекция предельной гиперповерхности будет задаваться условиями

$$\Re k z_T + l w_T = \text{const}, \phi + \psi = \text{const}.$$

Второе условие выделяет окружность в висящем над каждой точкой плоскости двумерном торе, её направляющий вектор целочислен и ортогонален направляющему вектору ребра, а их ориентация выбирается согласованно с ориентацией на гиперповерхности, унаследованной от голоморфной кривой.

Наконец, если мономов с максимальным показателем в данной точке больше двух, то сколь угодно близко найдутся нули общего положения, которые будут лежать на нескольких отрезках, входящих в эту точку.

Предложение 1.2. В «вершинах», в которых сходится несколько рёбер, есть следующее условие на окружности в слое над рёбрами (ориентированными

от точки):

$$\sum_{\hat{n}=\text{направление окружности над ребром}} \hat{n} = 0.$$

Доказательство. Изменим направление одного ребра, тогда проекция гиперповерхности на тор задаёт деформацию цикла над ним в сумму всех циклов над другими рёбрами, класс в гомологиях измениться не может. \square

Это же тождество одновременно накладывает ограничение на угловые коэффициенты входящих в вершину рёбер.

2. МАКС-ПЛЮС-АЛГЕБРА.

Определение 2.1. Макс-плюс-алгебра — это $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ с операциями $\max(a, b)$ вместо сложения $a + b$ и вместо умножения — сложение $a + b$.

Нетрудно проверить коммутативность и ассоциативность обеих операций и дистрибутивность: $\max(a, b) + c = \max(a + c, b + c)$. Нулём служит $-\infty$, а единицей 0. Её можно рассматривать в качестве «тропикализации» поля \mathbb{C} (равно как и \mathbb{R}): если рассмотреть $e^{a/\hbar} + e^{b/\hbar}$, то главной частью этого выражения будет $e^{\max(a,b)/\hbar}$. Многочлены — это $P(z_T, w_T) = \max(kz_T + lw_T + c)$.

По такому выражению можно построить множество его нулей на \mathbb{R}^2 , дополнить его «усами» — лучами, выходящими из вершин в таком направлении, чтобы выполнялось правило 1.2. Затем над каждой внутренней точкой ребра повесим окружность, касательный вектор к которой получается поворотом на $\pi/2$ из направляющего вектора ребра.

По тропическому полиному строится комплексный, зависящий от \hbar как от параметра; множество нулей последнего стремится к построенной нами поверхности над графом.

3. ТРОПИКАЛИЗАЦИЯ СТАНДАРТНЫХ ОБЪЕКТОВ.

Тропикализация \mathbb{C}^* — это прямая \mathbb{R} ($-\infty$ соответствует 0, $+\infty$ — $+\infty$), соответственно, для \mathbb{C}^{*n} будет \mathbb{R}^n . Более интересно, как устроены компактные пространства (например, проективные), поскольку для них пространство голоморфных отображений данного гомотопического класса часто конечномерно. Для $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ понятно, что тропикализацией будет $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ (возможны и другие варианты, например, для прямой в $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, как будет показано, граф состоит из трёх вершин, соединённых с 4-ой). Для $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ предлагается такой вариант (рис. 1): к \mathbb{R}^2 добавим бесконечно удалённые прямые $\{\pm\infty\} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \{\pm\infty\}$, при этом две из них ($\mathbb{R} \times \{-\infty\}$, $\{-\infty\} \times \mathbb{R}$) соответствуют двум прямым, вложенным туда, а две другие — одной (!).

Вспомним, что над каждой точкой плоскости висит (вещественно-) двумерный тор; разумно считать, что над границами стягиваются некоторые окружности, так что над первыми двумя дивизорами вырождаются направления $(1, 0)$, $(0, 1)$, а над последним — $(-1, 1)$.

Можно привести и другие примеры поверхностей. Например, стандартный тор \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2 изображается как фактор вещественной окружности по \mathbb{Z} (рис. 2), кривая рода 2 — как рис. 3 и т.д.

Понятно также, как можно компактифицировать $\mathbb{R}^n =$ тропикализацию \mathbb{C}^{*n} до тропического $\mathbb{C}P^n$; полученное множество будет гомеоморфно n -мерному шару, но на его внутренности есть линейная структура, приходящая из \mathbb{R}^n , а в конечном счёте — из умножения в \mathbb{C}^* , кажется, это общая ситуация для торических многообразий (но я не знаю универсального способа тропикализовать произвольное торическое многообразие).

Тропикализацией произведения комплексных многообразий можно считать произведение их тропикализаций — это даёт сразу семейство примеров. Более интересно рассматривать тропические подмногообразия, видим, например, что у $\mathbb{C}P^1$ есть ещё одна тропикализация (граф с одной трёхвалентной вершиной и бесконечными рёбрами).

4. ПОДМНОГООБРАЗИЯ.

Для всякого тропического пространства можно рассматривать его тропические подпространства: для \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^{*n}) это делается так же, как и в разобранном двумерном случае. Тропическим подмногообразием коразмерности 1 будет склеенный из стандартных кусков (тропикализаций $\mathbb{C}^{*m} \times \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}P^l$, где $m+k+l \leq n-1$) полиэдральный комплекс с клетками старшей размерности, «раскрашенными» n -мерными целочисленными ненулевыми векторами, определяющими вложение в слой-тор. При этом выполнены условия:

- (1) нормаль к грани старшей размерности пропорциональна раскраске
- (2) сумма раскрасок всех граней, прилегающих к одному ребру на единицу меньшей размерности, равна нулю
- (3) ?? похожие условия для граней больше коразмерности

Гипотеза 4.1. Любое тропическое подмногообразие может быть получено как предел некоторого семейства голоморфных кривых.

Как понимать предел здесь, не вызывает вопросов для простейших подпространств — тропических $\mathbb{C}P^n$, \mathbb{C}^{*n} — но требует уточнения для произвольных тропикализаций.

5. ГРАФИКИ ТРОПИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ.

Рассмотрим произведение компактных тропических многообразий $X \times Y$ и подпространство в нём $\Gamma \subset X \times Y$. Допустим, на каждую точку $x \in X$, кроме нескольких, Γ проектируется однозначно, а прообраз остальных состоит из замыкания одной грани той же размерности, что и X . Назовём тогда Γ графиком отображения $f: X \rightarrow Y$.

Гипотеза 5.1. В этом случае Γ действительно можно получить как предел графиков голоморфных отображений.

?? Также интересно было бы дать определение тропического морфизма в каких-то иных терминах, например, на алгебро-геометрическом языке пучка тропических рациональных функций со значениями в макс-плюс-алгебре, и сравнить его с приведённым выше.

Заметим, что при малом изменении тропический график по-прежнему однозначно проектируется на область определения.

Особо следует отметить, что два графика, отличающихся лишь домножением всех раскрасок на целое число, следует понимать как одно отображение, таким образом, у каждой компоненты графика должны быть равны единице те координат раскраски, которые отличны от нуля у X , вложенного в прямое произведение.

6. СЧЁТ РАЗМЕРНОСТИ. ПЕРЕЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.

Тропикализация сводит комплексные кривые и отображения к комбинаторике, в частности, легко считать размерность пространства отображений данного гомотопического класса. Поэтому интересно знать, как связаны размерности пространств голоморфных отображений и тропических (последние понимаются как графики отображений). В идеале хотелось бы иметь утверждение следующего вида.

Гипотеза 6.1. Вещественная размерность тропических отображений равна комплексной — голоморфных.

Но, во-первых, не следует ожидать интересного для некомпактного случая (хотя бесконечномерность пространства целых функций со счётным числом полюсов и улавливается тропической картиной (рис. 4), но непонятно, чему соответствуют существенные особенности и можно ли их сохранить при переходе к пределу тем образом, как мы это делали для рациональных функций), а во-вторых, даже для компактного случая ситуация сложнее и, вероятно, стоит рассчитывать на равенство только в общем положении.

В любом случае, даже в таком случае возможность вычислять размерности пространств отображений, модулей комплексных структур весьма ценна (см. примеры).

7. ПРИМЕРЫ.

Пример 7.1. Рассмотрим пример: кривые степени 1 в \mathbb{C}^2 . Голоморфные — задаются уравнениями вида $az + bw + c = 0$, тропические — $\max(z + a, w + b) = 0$, не считая «усов» (рис. 5). Кривая общего положения — граф с одной вершиной степени 3 и тремя вершинами степени 1 на каждой «бесконечно удалённой» прямой. К двум из прямых рёбра графа подходят перпендикулярно: на этих границах вырождаются окружности $(1, 0)$, $(0, 1)$, к третьей, на которой схлопывается окружность $(1, -1)$, под углом $\frac{\pi}{4}$. Видно, что тропическая прямая однозначно определяется положением вершины степени 3. Нетрудно описать деформацию этих прямых, когда вершина приближается к границе (рис. 6—10; закон сохранения для них выполнен в каждой вершине, в том числе на границе, потому, что на границе одна из окружностей вырождается). Таким образом, соответствие между прямыми и точками тропической проективной плоскости биективно.

На каждое ребро, выходящее на границу, проектируется поверхность, гомеоморфная диску (цилиндр со стянутым основанием). Над вершиной висит сфера с таким количеством вырезанных дисков, сколько в неё входит рёбер. Следовательно, в данном случае поверхность над тропической прямой гомеоморфна сфере, как и комплексная проективная прямая.

(В общем случае, очевидно, циклы в графе соответствуют ручкам у поверхности.)

Пример 7.2. Кривые бистепени $(1, 1)$ в $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ имеют один идущий вверх «ус» и один идущий вниз, вершины, от которых они отходят, с необходимостью соединены ребром с наклоном $\frac{\pi}{4}$, два горизонтальных ребра выходят на границу (рис. 11) Размерность их пространства равна 3, все они (за исключением случаев ухода на ∞) — графики отображений $\mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ степени 1.

Поскольку в голоморфном случае число прообразов любой точки с учётом кратности постоянно, то это верно и для тропических отображений, так что всякая горизонтальная прямая пересекает график по не зависящему от уровня прямой числу точек, в частности, количества полюсов и нулей совпадают (и равны степени отображения). (См. рис. 12.)

Здесь, как и в предыдущем случае, размерность получается удовлетворяющей сделанному предположению.

Пример 7.3. Отображения $\mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ степени 2, то есть кривые $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ бистепени $(1, 2)$.

Общее положение изображено на рис. 13 и рис. 14, это кривая с двумя полюсами и нулями. Понятно (рис. 15, 16), как она вырождается в отображение с кратными полюсами или нулями и как происходят перестройки с изменением порядка полюсов и нулей.

Размерность 5, как и требует принцип.

Пример 7.4. Отображения тора в тор. Сам тор (фактор \mathbb{C}^*/\mathbb{Z}) тропикализуется до отрезка с отождествлёнными концами.

Видимо, длину следует считать аналогом модуля комплексной структуры: между тропическими торами с непропорциональными (над \mathbb{Z}) длинами не существует никаких отображений.

В случае совпадения модулей предположение о соответствии размерностей тоже выполнено.

Пример 7.5. Отображения тора в проективную прямую степени один.

Очевидно, тропических отображений таких нет (две вершины степени три должны быть соединены двумя рёбрами, наклонным и горизонтальным, одновременно; поэтому наклонное ребро вырождается, полюс и нуль «аннигилируют» ??, получается константа), как и голоморфных.

Пример 7.6. Отображения тора в проективную прямую степени два.

См. рис. 17. Размерность 4 (4 вершины с двумя степенями свободами и 4 соотношения на них), в согласии с предположением.

Московский Государственный Университет, механико-математический факультет, 3 курс

и

Независимый Московский Университет, 3 курс, Москва

E-mail address: algo1@mccme.ru



рис. 1



рис. 2



рис. 3

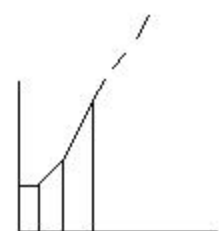


рис. 4

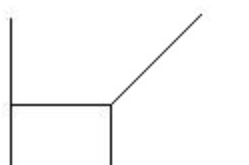


рис. 5

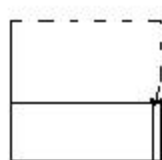


рис. 6

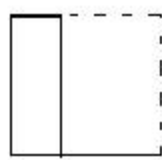


рис. 7

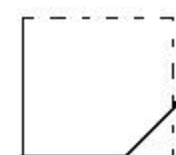


рис. 8

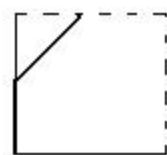


рис. 9

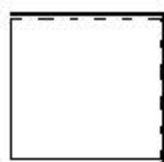


рис. 9

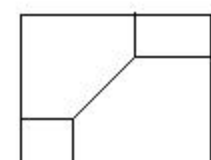


рис. 10

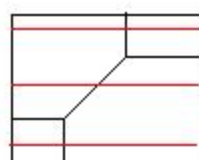


рис. 11

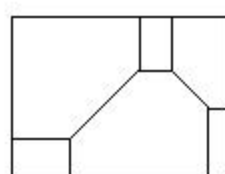


рис. 12

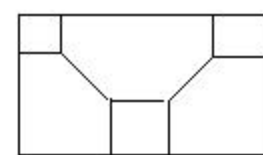


рис. 13

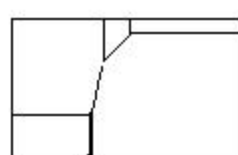


рис. 14

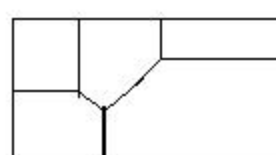


рис. 15

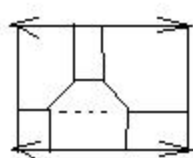


рис. 16