Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра Высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

Копредставления Ext-алгебр для колец Стэнли–Райснера

Выполнил студент 503 группы
Вылегжанин Федор Евгеньевич.
Научный руководитель:
профессор Панов Тарас Евгеньевич.

Москва, 2023 г.

1. Введение

Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]=\{1,\ldots,m\}$, не имеющий призрачных вершин, а $\mathbf{k}$ – коммутативное кольцо с единицей. В алгебраической комбинаторике [Stanley96] комплексу $\mathcal{K}$ сопоставляется *кольцо Стэнли–Райснера*

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}] := \mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]/\Big(\prod_{j\in J} v_j = 0,\ \forall J\subset[m]:\ J\notin\mathcal{K}\Big).$$

Это коммутативная $\mathbf{k}$-алгебра с градуировкой $\deg(v_i) := 2e_i = (0,\ldots,0,2,0,\ldots,0)\in\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$. Соответствующая ей *Ext-алгебра*

$$\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) := \mathrm{Ext}^*_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k}) = \bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k})$$

наделяется $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуировкой: если $x\in\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k})_{2\alpha}$, то $\deg(x) := (-n,2\alpha)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$. Биградуированный $\mathbf{k}$-модуль $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ – связная градуированная ассоциативная $\mathbf{k}$-алгебра относительно *умножения Йонеды*. Более общо, для любой связной градуированной коммутативной $\mathbf{k}$-алгебры A её Ext-алгебра $\mathrm{E}(A)$ является кокоммутативной $\mathbf{k}$-алгеброй Хопфа,а в случае коэффициентов в поле – универсальной обёртывающей алгеброй некоторой $\mathbf{k}$-алгебры Ли $\pi(A)$, см. [Avramov98, §10].

Алгебра $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ играет важную роль в торической топологии и теории гомотопий: она изоморфна гомологиям пространства петель на *пространстве Дэвиса–Янушкевича* $\mathrm{DJ}(\mathcal{K}) := \bigcup_{I\in\mathcal{K}}(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^I\subset(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^m$, которое возникает как конструкция Бореля для квазиторических многообразий и момент-угол комплексов [Buchstaber–Panov15]. Более точно, имеем изоморфизм алгебр

$$H_n(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k}) = \bigoplus_{n=-i+2|\alpha|} H_{-i,2\alpha}(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k}),\quad H_{-i,2\alpha}(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})\cong\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-i,2\alpha}. \tag{1.1}$$

(Гомологии любого пространства петель ΩX – ассоциативная алгебра относительно *умножения Понтрягина*. Изоморфизм (1.1) доказан Пановым и Рэем [Panov–Ray08] в случае $\mathbf{k}=\mathbb{Q}$, но верен и в случае произвольного кольца коэффициентов, см. [Buchstaber–Panov15, Proposition 8.4.10] и [Vylegzhanin22, Theorem 1.1].) В этом контексте большой интерес вызывает задача описания *высших операций* в $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])\cong H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$, соответствующих высшим произведениям Уайтхеда в гомотопических группах пространства Дэвиса–Янушкевича. Отметим, что Берглунд [Berglund06, Berglund05] на основе результатов Бакелина [Backelin82] вычислил $\mathbf{k}$-модуль $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ в терминах когомологий вспомогательных симплициальных комплексов и предъявил L_∞-модель для алгебры Ли $\pi(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$. К сожалению, описание Берглунда косвенное и не позволяет эффективно исследовать мультипликативную структуру.

Мы изучаем копредставления ассоциативной алгебры $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ в случае, когда $\mathbf{k}$ – поле. Используются следующие методы:

- Интерпретация модулей $\mathrm{Tor}^A_1(\mathbf{k},\mathbf{k})$ и $\mathrm{Tor}^A_2(\mathbf{k},\mathbf{k})$ как модулей минимальных образующих и соотношений, задающих связную градуированную $\mathbf{k}$-алгебру A [Wall60, §7]; аналогичное утверждение для градуированных алгебр Ли [Lemaire74, §1.3];
- Свойства кошулевых алгебр [Fröberg97, Priddy70, Polischuk–Positselski05];
- Результаты Бакелина–Рооса [Backelin–Roos83, Theorem 5] о "повторной Ext-алгебре" $\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))$.

Перечислим известные результаты. Если симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ *флаговый*, то соответствующая Ext-алгебра квадратично двойственна к $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ (это следует из кошулевости комплекса $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$, см. [Fröberg97]). Таким образом, она имеет минимальное копредставление

$$\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) = T(u_1,\ldots,u_m)/(u_i^2=0,\ i=1,\ldots,m;\ u_iu_j+u_ju_i=0,\ \{i,j\}\in\mathcal{K})$$

(копредставление минимально [Wall60, §7], если множества образующих и соотношений минимальны по включению).

Для произвольного комплекса $\mathcal{K}$ алгебра $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ содержит нетривиальные неразложимые элементы $u_i\in\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-1,2e_i}$ для всех $i=1,\ldots,m$ и $w_J\in\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-2,2J}$ для всех *недостающих граней* $J\in\mathrm{MF}_{\geq 3}(\mathcal{K})$, причём верны тождества (см. предложение 3.9):

$$u_i^2=0,\ i=1,\ldots,m;\quad u_iu_j+u_ju_i=0,\ \{i,j\}\in\mathcal{K};$$

$$u_iw_J - w_Ju_i = 0,\ i \in J \in \mathrm{MF}_{\geq 3}(\mathcal{K});\qquad \sum_{j\in J: J\setminus\{j\}\notin\mathcal{K}} (u_jw_{J\setminus\{j\}} - w_{J\setminus\{j\}}u_j) = 0,\ J\subset[m] : \partial^2\Delta_J \subset \mathcal{K}.$$

Известны примеры, когда этого набора образующих и соотношений недостаточно. Добринская [Dobrinskaya09] анонсировала следующий результат: перечисленные выше образующие и соотношения задают алгебру $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$, если комплекс $\mathcal{K}$ двойственен по Александеру к секвенциально коэн-маколеевому комплексу. К сожалению, полное доказательство приведено не было. Независимо, Коннер и Шелтон [Conner–Shelton12] доказали для того же класса симплициальных комплексов более слабый результат: алгебра $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ порождается элементами $\{u_1,\ldots,u_m\}\cup\{w_J :\ J\in\mathrm{MF}_{\geq 3}(\mathcal{K})\}$. В случае *направленных MF-комплексов* копредставление алгебры $\mathrm{E}(\mathbb{Q}[\mathcal{K}])$ вычислили Грбич и Терио [Grbić–Theriault16, Теорема 8.6].

Первый основной результат данной работы сводит изучение алгебры $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ к случаю, когда вершины симплициального комплекса $\mathcal{K}$ попарно соединены рёбрами (такие комплексы называют 1-*смежностными*). Рассмотрим *флагизацию* $\mathcal{K}^f = \{I\subset[m] :\ \{i,j\}\in\mathcal{K},\ \forall i,j\in I\}$ комплекса $\mathcal{K}$. Ясно, что $I\in\mathcal{K}^f$ тогда и только тогда, когда подкомплекс $\mathcal{K}_I = \{J\subset I : J\in\mathcal{K}\}$ является 1-смежностным.

Предложение 1.1. *Пусть* $\mathbf{k}$ *– поле,* $\mathcal{K}$ *– симплициальный комплекс на множестве вершин* $[m]$*, не имеющий призрачных вершин. Тогда имеем изоморфизм алгебр*

$$\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) \cong \mathrm{colim}_{I\in\mathcal{K}^f}\,\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_I]),$$

где отображения $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_I]) \to \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_J])$ *и* $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_I]) \to \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ *индуцированы вложениями симплициальных комплексов* $\mathcal{K}_I \hookrightarrow \mathcal{K}_J$, $\mathcal{K}_I \hookrightarrow \mathcal{K}$.

Далее, мы накладываем ограничения на степени образующих алгебры $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ и соотношений между ними, а также частично описываем эти образующие и соотношения.

Теорема 1.2. *Пусть* $\mathbf{k}$ *– поле,* $\mathcal{K}$ *– симплициальный комплекс на множестве вершин* $[m]$ *без призрачных вершин. Тогда существует минимальное копредставление алгебры* $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) = \mathrm{Ext}^*_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k})$ *со следующими свойствами.*

1. *Образующие и соотношения –* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$*-однородные элементы, их конечное число. Соотношения являются лиевскими многочленами от образующих, то есть получаются конечным применением операций суммы, умножения на скаляр, коммутирования* $[a,b] := ab - (-1)^{|a|\cdot|b|}ba$*. Если* $\mathrm{char}\,\mathbf{k} = 2$*, то также разрешается возведение в квадрат элементов нечётной степени.*
2. *Множество образующих состоит из элементов трёх типов:*
   - *Элементы* $u_i \in \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-1,2e_i}$ *для всех* $i = 1,\ldots,m$*;*
   - *Элементы* $w_J \in \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-2,2J}$ *для всех* $J\in\mathrm{MF}_{\geq 3}(\mathcal{K})$*;*
   - *Некоторые элементы степеней вида* $(-n,2J)$*, где* $3\leq n<|J|$, $J\in\mathcal{K}^f\setminus\mathcal{K}$*.*
3. *Множество соотношений состоит из элементов четырёх типов:*
   - *Соотношения* $u_i^2 = 0$ *для всех* $i=1,\ldots,m$ *и* $[u_i,u_j]=0$ *для всех* $\{i,j\}\in\mathcal{K}$, $i<j$*;*
   - *Соотношения* $[u_i,w_J]=0$ *для всех* $J\in\mathrm{MF}_{\geq 3}(\mathcal{K})$, $i\in J$*;*
   - *Некоторые соотношения степеней вида* $(-n,2J)$*, где* $3\leq n<|J|$, $J\in\mathcal{K}^f\setminus\mathcal{K}$*;*
   - *Некоторые соотношения степеней вида* $(-(n+1),2(J+e_i))$*, где* $3\leq n<|J|$, $J\in\mathcal{K}^f\setminus\mathcal{K}$, $i\in J$*.*
4. *Соотношения четвёртого типа описываются следующим образом. Зафиксируем параметры* $3\leq n<|J|$, $J\in\mathcal{K}^f\setminus\mathcal{K}$, $i\in J$*. Пусть* $x_1,\ldots,x_M$ *– множество образующих степени* $(-n,2J)$*. Тогда множество соотношений степени* $(-(n+1),2(J+e_i))$ *состоит из тождеств*

   $$[u_i,x_t] + R_{t,j} = 0,\quad t=1,\ldots,M,$$

   где $R_{t,j}$ *– некоторые лиевские многочлены от образующих, не зависящие от* $x_1,\ldots,x_M$*.*

Для произвольного комплекса $\mathcal{K}$ теорема 1.2 не описывает Ext-алгебру $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ полностью. Тем не менее, удаётся предъявить явное копредставление алгебры $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ в случае *почти флаговых* комплексов (теорема 3.6) и распространить на более широкий класс симплициальных комплексов результаты Коннера и Шелтона (теорема 3.11).

Структура статьи. В разделе 2 вводятся основные обозначения. В разделе 3 мы формулируем следствия из теоремы 1.2, которые характеризуют алгебру $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ для некоторых классов симплициальных комплексов. Раздел 4 содержит необходимые сведения из гомологической алгебры. Мы получаем следствия из результатов Уолла и Лемэра о копредставлениях градуированных алгебр над полем (видимо, эти результаты фольклорные, но не зафиксированы в литературе). В разделе 5 исследуются градуированные компоненты алгебр $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ и $\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ и доказываются основные технические результаты данной работы. В разделе 6 доказаны теоремы, сформулированные в разделе 3. В разделе 7 приведены примеры образующих и соотношений, которые не удаётся исследовать нашими методами. Наконец, раздел 8 посвящён открытым вопросам.

2. Симплициальные комплексы

2.1. **Обозначения.** *Симплициальный комплекс* $\mathcal{K}$ на множестве вершин V – это непустое семейство подмножеств $J \subset V$, замкнутое относительно включения: если $I \subset J$ и $J \in \mathcal{K}$, то $I \in \mathcal{K}$. Например, для каждого V определены симплициальные комплексы

$$\Delta_V := \{I : I \subset V\}, \quad \partial^n \Delta_V := \{I \subset V : |I| \leq |V| - n\},\ 0 \leq n \leq |V|$$

на множестве вершин V. Элементы $I \in \mathcal{K}$ называются гранями, или симплексами, комплекса $\mathcal{K}$. Пишем $\dim(I) := |I| - 1$, $\dim(\mathcal{K}) := \max_{I \in \mathcal{K}} \dim(I)$. По умолчанию, мы рассматриваем только комплексы *без призрачных вершин*, то есть предполагаем, что $\{v\} \in \mathcal{K}$ для всех $v \in V$. Как правило, $V \subset [m] = \{1, \ldots, m\}$.

При $n \geq 0$ определим *n-остов* симплициального комплекса $\mathcal{K}$ как $\mathrm{sk}_n \mathcal{K} := \{I \in \mathcal{K} :\ \dim(I) \leq n\}$. При $W \subset V$ определён *полный подкомплекс* $\mathcal{K}_W := \{J \subset W : J \in \mathcal{K}\}$. Подмножество $W \subset V$ называют *недостающей гранью* комплекса $\mathcal{K}$, если $\mathcal{K}_W = \partial \Delta_W$. Множество всех недостающих граней обозначим как $\mathrm{MF}(\mathcal{K})$: таким образом,

$$\mathrm{MF}(\mathcal{K}) = \{I \subset V \mid I \notin \mathcal{K};\ I \setminus \{i\} \in \mathcal{K},\ \forall i \in I\}.$$

Также обозначим $\mathrm{MF}_{\geq 3}(\mathcal{K}) := \{I \in \mathrm{MF}(\mathcal{K}) :\ |I| \geq 3\}$.

Пусть $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ – симплициальные комплексы на непересекающихся множествах вершин V, W. Их *джойн* определяется как $\mathcal{K} * \mathcal{L} := \{I \sqcup J :\ I \in \mathcal{K},\ J \in \mathcal{L}\}$; это симплициальный комплекс на множестве вершин $V \sqcup W$.

Линк симплекса $I \in \mathcal{K}$ – это симплициальный комплекс

$$\mathrm{lk}_{\mathcal{K}}(I) := \{J \subset V \setminus I : I \cup V \in \mathcal{K}\}$$

на множестве вершин $V \setminus I$. Заметим, что $\mathrm{lk}_{\mathcal{K}}(\varnothing) = \mathcal{K}$.

При $\mathcal{K} \neq \Delta_V$ *двойственный по Александеру* комплекс $\mathcal{K}^\vee$ определяется формулой

$$\mathcal{K}^\vee := \{J \subset V : V \setminus J \notin \mathcal{K}\}.$$

(Этот комплекс может иметь призрачные вершины.) Из определения следует, что $(\mathcal{K}^\vee)^\vee = \mathcal{K}$ и $(\mathrm{lk}_{\mathcal{K}}\, I)^\vee = (\mathcal{K}^\vee)_{V \setminus I}$. Хорошо известно [Buchstaber–Panov15, Theorem 2.4.5], что $\widetilde{H}^*(\mathcal{K}; \mathbf{k}) \cong \widetilde{H}_{|V|-3-*}(\mathcal{K}^\vee; \mathbf{k})$ для любой группы коэффициентов $\mathbf{k}$. Следовательно,

$$\widetilde{H}_*(\mathrm{lk}_{\mathcal{K}}(I); \mathbf{k}) \cong \widetilde{H}^{|V|-|I|-3-*}((\mathcal{K}^\vee)_{V \setminus I}; \mathbf{k}).$$

(Гомологии симплициального комплекса $\mathcal{K}$ – это сингулярные гомологии его геометрической реализации.)

2.2. **Кольцо Стэнли–Райснера и двойственная коалгебра.** Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на $[m]$. Кольцо Стэнли–Райснера $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ получается факторизацией кольца многочленов $\mathbf{k}[m] := \mathbf{k}[v_1, \ldots, v_m]$ по идеалу Стэнли–Райснера $I_{\mathcal{K}} := (\prod_{i \in I} v_i = 0,\ I \notin \mathcal{K})$. Оба кольца $\mathbf{k}[m]$ и $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ наделяются $\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуировкой: $\deg(v_i) := 2e_i \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$. Элементы полугруппы $\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$ будем обозначать как

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \sum_{j=1}^m \alpha_j e_j,\ \alpha_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Мы пишем $|\alpha| := \sum_{j=1}^m \alpha_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathrm{supp}(\alpha) := \{j \in [m] :\ \alpha_j \neq 0\} \subset [m]$. Мы также отождествляем всякое подмножество $J \subset [m]$ с мультииндексом $\sum_{j \in J} e_j \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$. Обозначим

$v^\alpha := \prod_{i=1}^m v_i^{\alpha_i}$; тогда множество мономов $\{v^\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m\}$ – аддитивный базис для $\mathbf{k}[m]$, а множество $\{v^\alpha : \mathrm{supp}(\alpha) \in \mathcal{K}\}$ – аддитивный базис для $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$. Умножение в $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ удовлетворяет

$$v^\alpha \cdot v^\beta = \begin{cases} v^{\alpha+\beta}, & \mathrm{supp}(\alpha) \cup \mathrm{supp}(\beta) \in \mathcal{K}; \\ 0, & \mathrm{supp}(\alpha) \cup \mathrm{supp}(\beta) \notin \mathcal{K}. \end{cases}$$

Двойственным образом, рассмотрим коалгебру многочленов $\mathbf{k}\langle m\rangle$, которая имеет аддитивный базис $\{\chi_\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m\}$ и коумножение

$$\Delta\chi_\alpha = \sum_{\substack{\alpha=\beta+\gamma,\\ \beta,\gamma\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^m}} \chi_\beta \otimes \chi_\gamma. \tag{2.1}$$

Коалгебра Стэнли–Райснера $\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle$ вложена в неё как под-коалгебра. Она имеет аддитивный базис $\{\chi_\alpha : \mathrm{supp}(\alpha) \in \mathcal{K}\}$ и коумножение, заданное формулой (2.1).

2.3. **Классы симплициальных комплексов.**

Определение 2.1. Комплекс $\mathcal{K}$ *флаговый*, если верно: любой набор вершин, попарно соединённых рёбрами, является симплексом ($I \in \mathcal{K}$, если $\{i, j\} \in \mathcal{K}$, $\forall i, j \in I$).

Любой комплекс $\mathcal{K}$ вкладывается в флаговый комплекс $\mathcal{K}^f := \{I \subset V : \{i, j\} \in \mathcal{K}, \forall i, j \in V\}$ на тех же вершинах. Его называют *флагизацией* комплекса $\mathcal{K}$; это единственный флаговый комплекс с тем же 1-остовом.

Комплекс $\mathcal{K}$ на множестве вершин V называют *k-смежностным*, если $\mathrm{sk}_k\,\Delta_V \subset \mathcal{K}$, то есть $I \in \mathcal{K}$ для всех $I \subset V$, $|I| \leq k + 1$.

Лемма 2.2. *Подкомплекс $\mathcal{K}_J$ 1-смежностный тогда и только тогда, когда $J \in \mathcal{K}^f$.*

Доказательство. Условие 1-смежностности равносильно тому, что $\{i, j\} \in \mathcal{K}_J$ для всех $i, j \in J$. Это и означает, что $J \in \mathcal{K}^f$. □

Следующее условие – одно из эквивалентных определений класса симплициальных комплексов Коэна–Маколея (см. [Buchstaber–Panov15, Lemmata 3.3.11, 3.3.14]).

Определение 2.3. Комплекс $\mathcal{K}$ *коэн-маколеев* над полем $\mathbf{k}$, если верно:

$$\widetilde{H}^i(\mathrm{lk}_\mathcal{K}(I); \mathbf{k}) = 0, \quad \forall I \in \mathcal{K},\ \forall i < \dim(\mathcal{K}) - |I|.$$

При $n \geq 0$ определим *чистый n-остов* $\mathcal{K}^{[n]}$ комплекса $\mathcal{K}$ по формуле

$$\mathcal{K}^{[n]} := \{J \in \mathcal{K} \mid \exists I \in \mathcal{K} : \ |I| = n + 1, J \subset I\} = \bigcup_{I\in\mathcal{K},\ |I|=n+1} \Delta_I.$$

Ясно, что $\dim \mathcal{K}^{[n]} = n$ при $n = 0, \ldots, \dim(\mathcal{K})$ и $\mathcal{K}^{[n]} = \{\varnothing\}$ при $n > \dim(\mathcal{K})$. Комплекс $\{\varnothing\}$ коэн-маколеев по определению, так как $\dim(\{\varnothing\}) = -1$, $\mathrm{lk}_{\{\varnothing\}}(\varnothing) = \varnothing$, $\widetilde{H}^i(\varnothing; \mathbf{k}) = 0$ при $i < -1$.

Определение 2.4. Комплекс $\mathcal{K}$ называют *секвенциально коэн-маколеевым* над полем $\mathbf{k}$, если $\mathcal{K}^{[n]}$ коэн-маколеев над $\mathbf{k}$ при всех $n \geq 0$.

Дюваль [Duval96, Theorem 3.3] доказал, что определение выше эквивалентно исходному определению Стэнли [Stanley96, Definition 2.9].

Определение 2.5. Будем говорить, что комплекс $\mathcal{K}$ двойственно секвенциально коэн-маколеев над $\mathbf{k}$ (обозначение: $\mathcal{K} \in \mathbf{k}SCM^\vee$), если $\mathcal{K}^\vee$ секвенциально коэн-маколеев.

Следуя Добринской [Dobrinskaya09], дадим более явное описание класса $\mathbf{k}SCM^\vee$. При $n \geq 0$ определим комплексы

$$\mathcal{K}^{\langle n\rangle} := \mathrm{sk}_{n-1}(\Delta_V) \cup \{J \subset V : \mathrm{sk}_n\,\Delta_J \subset \mathcal{K}\}.$$

Для краткости обозначим $|V| = m$ и $\mathcal{L} = \mathcal{K}^\vee$. Из определений следует, что $(\mathcal{K}^{\langle n\rangle})^\vee = \mathcal{L}^{[m-n-2]}$ и $(\mathcal{K}^{\langle n\rangle})_J = (\mathcal{K}_J)^{\langle n\rangle}$ (поэтому имеет смысл обозначение $\mathcal{K}_J^{\langle n\rangle}$).

Лемма 2.6. *Следующие условия равносильны:*

(1) *Комплекс $\mathcal{L}^{[n]}$ коэн-маколеев над $\mathbf{k}$.*

(2) $\widetilde{H}_p(\mathcal{K}_J^{\langle m-n-2\rangle};\mathbf{k})=0$ *при всех* $J\subset V$ *и* $p>m-n-3$.

Доказательство. По определению, условие (1) означает
$$\widetilde{H}^i(\mathrm{lk}_{\mathcal{L}^{[n]}}(I);\mathbf{k})=0,\quad \forall I\in\mathcal{L}^{[n]},\ \forall i<n-|I|.$$
Из двойственности Александера и тождества $(\mathcal{L}^{[n]})^\vee=\mathcal{K}^{\langle m-n-2\rangle}$ получаем
$$\widetilde{H}^i(\mathrm{lk}_{\mathcal{L}^{[n]}}(I);\mathbf{k})=\widetilde{H}_{m-|I|-3-i}(\mathcal{K}_{V\setminus I}^{\langle m-n-2\rangle};\mathbf{k}).$$

Итак, условие (1) равносильно
$$\widetilde{H}_{m-|I|-3-i}(\mathcal{K}_{V\setminus I}^{\langle m-n-2\rangle};\mathbf{k})=0,\quad \forall I\in\mathcal{L}^{[n]},\ \forall i<n-|I|,$$
то есть
$$\widetilde{H}_p(\mathcal{K}_J^{\langle m-n-2\rangle};\mathbf{k})=0,\quad \forall J\notin\mathcal{K}^{\langle m-n-2\rangle},\ \forall p>m-n-3.$$
Это эквивалентно (2), так как при $J\in\mathcal{K}^{\langle m-n-2\rangle}$ то же условие выполнено автоматически. □

Предложение 2.7. *Следующие условия равносильны:*

(1) $\mathcal{K}\in\mathbf{k}SCM^\vee$;

(2) *Для каждого непустого* $J\subset V$ *имеем*
$$\widetilde{H}_i(\mathcal{K}_J^{\langle n\rangle};\mathbf{k})=0,\quad \forall i\geq n\geq 0.$$

Доказательство. Условие (1) равносильно тому, что комплекс $\mathcal{L}^{[n]}$ коэн-маколеев над $\mathbf{k}$ при всех $n\geq 0$. По предыдущей лемме, это означает, что
$$\widetilde{H}_p(\mathcal{K}_J^{\langle m-n-2\rangle};\mathbf{k})=0,\quad \forall J\subset V,\ \forall p\geq m-n-2$$
при всех n. С точностью до замены обозначений, это в точности условие (2). □

3. Применения теоремы 1.2

Сформулированные здесь результаты доказаны в разделе 5. По умолчанию, $\mathbf{k}$ – поле, $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на $[m]$ без призрачных вершин.

3.1. **Сведение к 1-смежностному случаю.** По теореме 1.2, все образующие и соотношения алгебры $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ имеют степени вида $(-n,2\alpha)$, $\mathrm{supp}(\alpha)\in\mathcal{K}^f$. Но по лемме 5.2 имеем $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-n,2\alpha}=\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_{\mathrm{supp}(\alpha)}])_{-n,2\alpha}$, поэтому при изучении конкретной образующей (конкретного соотношения) в $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ можно заменить $\mathcal{K}$ на $\mathcal{K}_J$ для некоторого $J\in\mathcal{K}^f$. Это 1-смежностный комплекс по лемме 2.2. Таким образом:

- Задачу вычисления образующих и соотношений алгебры $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ достаточно решать для 1-смежностных комплексов.

Удобно ввести следующее определение.

Определение 3.1. Пусть $\mathfrak{C}$ – произвольный класс симплициальных комплексов, замкнутый относительно перехода к полным подкомплексам. Его ***флаговым замыканием*** будем называть класс
$$\widehat{\mathfrak{C}}:=\{\mathcal{K}:\ \mathcal{K}_J\in\mathfrak{C},\ \forall J\in\mathcal{K}^f\}.$$

То есть комплекс $\mathcal{K}\in\widehat{\mathfrak{C}}$ склеен из симплициальных комплексов класса $\mathfrak{C}$ так же, как флаговые симплициальные комплексы склеены из симплексов. Получаем следующий принцип:

- Если некоторый результат о копредставлениях алгебры $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ доказан для всех симплициальных комплексов $\mathcal{K}\in\mathfrak{C}$, то он обобщается на все комплексы из класса $\widehat{\mathfrak{C}}$.

Его иллюстрируют предложение 1.1, теоремы 3.6 и 3.11.

Замечание 3.2. В работе [Vylegzhanin22] введено число $\nu(\mathcal{K})$, характеризующее степень "нефлаговости" симплициального комплекса $\mathcal{K}$. Рассматривается фильтрация
$$\mathcal{K}_0:=\mathcal{K},\quad \mathcal{K}_{i+1}:=\mathcal{K}_i\cup\mathrm{MF}_{\geq 3}(\mathcal{K}_i),\ i\geq 0;$$
тогда $\nu(\mathcal{K}):=\min\{n\geq 0:\ \mathcal{K}_i=\mathcal{K}^f\}$. Согласно [Vylegzhanin22, Proposition 5.2], $\nu(\mathcal{K})$ – это наименьшее натуральное число n со следующим свойством: для всякого $J\in\mathcal{K}^f$ и всякого $I\subset J$, $|J\setminus I|\geq n$, верно $I\in\mathcal{K}$. Следующая лемма интерпретирует этот инвариант в терминах флаговых замыканий.

Лемма 3.3. *Пусть $\mathfrak{C}_n$ – класс симплициальных комплексов, которые “смежностны в коразмерности n”: $\mathfrak{C}_n := \{\mathcal{K} :\ \partial^n\Delta \subset \mathcal{K}\}$. Тогда*

$$\widehat{\mathfrak{C}_n} = \{\mathcal{K} :\ \nu(\mathcal{K}) \leq n\}.$$

Доказательство. Условие $\nu(\mathcal{K}) \leq n$ означает, что для всякого $J \in \mathcal{K}^f$ и всякого $I \subset J$, $|I| \leq |J| - n$, верно $I \in \mathcal{K}$. Эквивалентно, $\partial^n\Delta_J \subset \mathcal{K}$ для всякого $J \in \mathcal{K}^f$. Это и означает, что $\mathcal{K} \in \widehat{\mathfrak{C}}$. □

По-видимому, инвариант $\nu(\mathcal{K})$ достаточно точно оценивает “сложность” алгебры $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$.

3.2. **Почти флаговый случай.**

Определение 3.4. Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ *почти флаговый*, если для любого $J \in \mathcal{K}^f$ подкомплекс $\mathcal{K}_J$ равен Δ_J, $\partial\Delta_J$ или $\Delta_P * \partial\Delta_Q$ для некоторых $P \sqcup Q = J$.

Другими словами, класс почти флаговых комплексов совпадает с классом $\widehat{\mathfrak{C}}$, где

$$\mathfrak{C} = \{\Delta_J :\ |J| \geq 1\} \sqcup \{\partial\Delta_J :\ |J| \geq 3\} \sqcup \{\Delta_P * \partial\Delta_Q :\ |P| \geq 1,\ |Q| \geq 3\}.$$

По лемме 3.3, любой комплекс $\mathcal{K}$ со свойством $\nu(\mathcal{K}) \leq 1$ будет почти флаговым.

Определение 3.5. Пусть $\mathcal{K}$ – почти флаговый симплициальный комплекс. Для каждой недостающей грани $J \in \mathrm{MF}_{\geq 3}(\mathcal{K})$ обозначим

$$I[J] := \{i \in V :\ \{i\} \sqcup (J \setminus \{j\}) \in \mathcal{K},\ \forall j \in J\}.$$

Ясно, что

$$\mathcal{K}_{I[J]} = \Delta_{I[J]\setminus J} * \partial\Delta_J,$$

причём $I[J]$ – наибольшее множество вершин с этим свойством.

Теорема 3.6. *Пусть $\mathbf{k}$ – поле, $\mathcal{K}$ – почти флаговый симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Тогда алгебра $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ задаётся образующими*

$$u_i \in \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-1,2e_i},\ i = 1,\ldots,m; \quad w_J \in \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-2,2J},\ J \in \mathrm{MF}_{\geq 3}(\mathcal{K})$$

и соотношениями

$$u_i^2 = 0,\ i = 1,\ldots,m; \quad [u_i, u_j] = 0,\ \{i,j\} \in \mathcal{K},\ i < j;$$
$$[u_i, w_J] = 0,\ J \in \mathrm{MF}_{\geq 3}(\mathcal{K}),\ i \in I[J].$$

Это минимальное копредставление.

Эта теорема доказана в разделе 6.2. В предложении 6.4 мы докажем, что класс почти флаговых комплексов содержит *направленные MF-комплексы* в смысле [Grbić–Theriault16, Определение 8.2]. Таким образом, теорема3.6 обобщает результат Грбич и Терио [Grbić–Theriault16, Теорема 8.6].

Замечание 3.7. Пусть P – трёхмерный простой многогранник, а $\mathcal{K}_P = \partial P^*$ – двойственная к нему триангуляция двумерной сферы. При исследовании прямоугольных гиперболических многогранников Ероховец ввёл понятие *почти флагового многогранника*. Почти флаговость многогранника P равносильна любому из следующих эквивалентных условий (см. [Erokhovets19, Proposition 2.18]):

- Симплициальный комплекс $\mathcal{K}_P$ получен из флаговой триангуляции сферы одновременным звёздным подразбиением нескольких треугольников;
- Любые три попарно пересекающиеся грани многогранника имеют общую точку либо окружают треугольную грань (“P не имеет нетривиальных 3-поясов”), причём $P \neq \Delta^3$, $P \neq I \times \Delta^2$;
- 1-остов многогранника является сильно циклически реберно 3-связным графом.

Ясно, что если P – почти флаговый многогранник в смысле [Erokhovets19], то $\mathcal{K}_P$ – почти флаговый комплекс. Обратное неверно: например, склеим две границы октаэдра по двумерному симплексу и затем удалим этот симплекс. Полученный симплициальный комплекс почти флаговый, но двойственный к нему многогранник (связная сумма трёхмерных кубов вдоль вершины) имеет нетривиальный 3-пояс.

3.3. Усиление результатов Коннера и Шелтона.

Определение 3.8. Пусть $\mathbf{k}$ – коммутативное кольцо с единицей, $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на $[m]$ без призрачных вершин. Обозначим как $EQ(\mathcal{K};\mathbf{k})$ связную $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированную $\mathbf{k}$-алгебру, заданную образующими $u_1,\dots,u_m$ и $\{w_J\}_{J\in\mathrm{MF}_{\geq 3}(\mathcal{K})}$ и следующим набором квадратичных соотношений:

- $u_1^2=\dots=u_m^2=0$; $u_iu_j+u_ju_i=0$ для каждого $\{i,j\}\in\mathcal{K}$;
- $[w_J,u_i]=0$ для каждого $J\in\mathrm{MF}_{\geq 3}(\mathcal{K})$ и каждого $i\in J$;
- $$\sum_{j\in L:\ L\setminus\{j\}\notin\mathcal{K}}[w_{L\setminus\{j\}},u_j]=0$$

  для каждого $L\subset[m]$, такого что $\partial^2\Delta_L\subset\mathcal{K}$.

Предложение 3.9. *Корректно определен гомоморфизм $\mathbf{k}$-алгебр $EQ(\mathcal{K};\mathbf{k})\to\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$, $u_i\mapsto u_i$, $w_J\mapsto w_J$.*

Доказательство. Элементы u_i и w_J в алгебре $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])\cong H\Big[\Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)\Big]$ определены по лемме 5.4. Они удовлетворяют описанным соотношениям по предложению 5.5. □

Описанное копредставление алгебры $EQ(\mathcal{K};\mathbf{k})$ минимально. В неопубликованной работе [Dobrinskaya09] Добринская анонсировала следующую теорему:

- Если $\mathcal{K}\in\mathbf{k}SCM^\vee$ для некоторого поля $\mathbf{k}$, то $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])\cong EQ(\mathcal{K};\mathbf{k})$.

К сожалению, препринт Добринской не содержит полного доказательства. Если этот результат верен, то наши методы позволяют распространить изоморфизм $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])\cong EQ(\mathcal{K};\mathbf{k})$ на более широкий класс симплициальных комплексов $\mathbf{k}\widehat{SCM}^\vee$. Опишем этот класс более явно.

Предложение 3.10. *Следующие условия равносильны:*

(1) $\mathcal{K}\in\mathbf{k}\widehat{SCM}^\vee$;
(2) *Для каждого непустого $J\in\mathcal{K}^f$ имеем*
$$\widetilde{H}_i(\mathcal{K}_J^{\langle n\rangle};\mathbf{k})=0,\quad\forall i\geq n\geq 0.$$

Доказательство. По предложению 2.7, условие (1) равносильно
$$\widetilde{H}_i((\mathcal{K}_J)_I^{\langle n\rangle};\mathbf{k})=0,\quad\forall J\in\mathcal{K}^f,\ \forall I\subset J,\ \forall i\geq n\geq 0.$$
Но операция $\mathcal{K}\rightsquigarrow\mathcal{K}^{\langle n\rangle}$ коммутирует с переходом к полным подкомплексам, поэтому $(\mathcal{K}_J)_I^{\langle n\rangle}=\mathcal{K}_I^{\langle n\rangle}$. Получаем условие
$$\widetilde{H}_i(\mathcal{K}_I^{\langle n\rangle};\mathbf{k}),\quad\forall I\subset J\in\mathcal{K}^f,\ \forall i\geq n\geq 0.$$
Это в точности условие (2), так как из $I\subset J\in\mathcal{K}^f$ следует $I\in\mathcal{K}^f$. □

Можно убедиться, что любой комплекс $\mathcal{K}$ со свойством $\partial^2\Delta_V\subset\mathcal{K}\subset\Delta_V$ принадлежит классу $\mathbf{k}SCM^\vee$. Следовательно, класс $\mathbf{k}\widehat{SCM}^\vee$ содержит все комплексы с $\nu(\mathcal{K})\leq 2$.

В работе Коннера и Шелтона [Conner–Shelton12] доказано: если $\mathcal{K}\in\mathbf{k}SCM^\vee$, то алгебра $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ мультипликативно порождена своими градуированными компонентами $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-1,*}$ и $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-2,*}$ (в терминологии [Cassidy–Shelton09], $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ является *K_2-алгеброй*).

Теорема 1.2 позволяет усилить их результат до следующего.

Теорема 3.11. *Пусть $\mathbf{k}$ – поле. Предположим, что $\mathcal{K}\in\mathbf{k}\widehat{SCM}^\vee$, т.е. что для любого $J\in\mathcal{K}^f$ верно*
$$\widetilde{H}_i(\mathcal{K}_J^{\langle n\rangle};\mathbf{k})=0,\quad\forall i\geq n\geq 0.$$
Тогда множество
$$\{u_1,\dots,u_m\}\sqcup\{w_J\}_{J\in\mathrm{MF}_{\geq 3}(\mathcal{K})}$$
минимально порождает алгебру $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$. В частности, отображение $EQ(\mathcal{K};\mathbf{k})\to\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ сюръективно.

Это наиболее широкий класс симплициальных комплексов, для которого наши методы позволяют описать множество минимальных образующих алгебры $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$. Доказательство приведено в разделе 6.1.

4. Гомологическая алгебра

4.1. Мультиградуированные алгебры. Наши соглашения по знакам совпадают с [Priddy70, §1]. Дифференциалы всегда понижают степень по одной из градуировок и сохраняют остальные градуировки. Если (M,d) - цепной комплекс, $d: M_n \to M_{n-1}$, то двойственный комплекс (M^*, d^*) определяется формулами

$$M^*_{-n} := \mathrm{Hom}(M_n, \mathbf{k}), \quad d^*: M^*_{1-n} \to M^*_{-n},\ \langle d^*(f), m\rangle := (-1)^{|f|+1}\langle f, d(m)\rangle.$$

Напомним, что для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$ имеем

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_m, \quad \operatorname{supp}\alpha := \{i \in [m] :\ \alpha_i \neq 0\},$$

а подмножество $J \subset [m]$ отождествляется с мультииндексом $\sum_{j\in J} e_j \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$.

Мы рассматриваем $\mathbf{k}$-модули и ассоциативные $\mathbf{k}$-алгебры с единицей, градуированные полугруппами вида $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$, $k \geq 0$. Любой такой модуль M допускает $\mathbb{Z}$-градуировку тотальной степенью: если $x \in M_{i_1,\dots,i_k,\alpha}$ – однородный элемент, то

$$|x| := i_1 + \dots + i_k + |\alpha| \in \mathbb{Z}$$

– его тотальная степень. Обозначим $\overline{x} := (-1)^{1+|x|}x$. По умолчанию, модули над $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированными алгебрами всегда $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированы.

Мультиградуированная алгебра A *связна*, если относительно тотальной градуировки имеем $A_{<0} = 0$, $A_0 = \mathbf{k}\cdot 1$. Аугментационный идеал $A_{>0} = \mathrm{Ker}(\varepsilon : A \to \mathbf{k})$ обозначим как $I(A)$.

Если $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированные $\mathbf{k}$-модули $M_1, M_2, \dots$ образуют цепной комплекс

$$\dots \to M_i \xrightarrow{d} M_{i-1} \to \dots,$$

то мы рассматриваем весь комплекс $M_\bullet = \bigoplus_i M_i$ как $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^k\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированный $\mathbf{k}$-модуль, $\deg((M_i)_n) = (i, n)$. Следовательно, дифференциал имеет степень $(-1, 0) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}^m_{\geq 0})$. Если M_i – модули над $\mathbf{k}$-алгеброй A, то A-линейность дифференциала равносильна тождеству

$$d(a\cdot m) = (-1)^{|d|\cdot|a|} a \cdot d(m),$$

то есть $d(am) = -\overline{a}\cdot d(m)$.

4.2. Бар- и кобар-конструкции. Пусть A – $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированная алгебра над полем $\mathbf{k}$, L – левый A-модуль, R – правый A-модуль. *Бар-конструкция* $\mathrm{B}(R, A, L)$ – это цепной комплекс

$$\dots \to \mathrm{B}_1(R,A,L) \to \mathrm{B}_0(R,A,L) \to 0,$$

где $\mathrm{B}_n(R,A,L) := R \otimes I(A)^{\otimes n} \otimes L$. Типичный элемент $r\otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes \ell \in \mathrm{B}_n(R,A,L)$ имеет степень $(n, \deg(r) + \sum_{i=1}^n \deg(a_i) + \deg(\ell)) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^k\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$ и традиционно записывается как $r[a_1|\dots|a_n]\ell$. Дифференциалы заданы формулой

$$-d_{\mathrm{B}}(r[a_1|\dots|a_n]\ell) := \overline{r}\cdot a_1[a_2|\dots|a_n]\ell + \sum_{i=1}^{n-1} \overline{r}[\overline{a}_1|\dots|\overline{a}_{i-1}|\overline{a}_i a_{i+1}|\dots|a_n]\ell + \overline{r}[\overline{a}_1|\dots|\overline{a}_{n-1}]a_n\cdot\ell.$$

Хорошо известно, что бар-конструкция $\mathrm{B}(A,A,L)$ является свободной резольвентой левого A-модуля L. Это позволяет вычислить функторы Tor и Ext :

$$\mathrm{Tor}^A_*(R,L) = H_*\Big[R\otimes_A \mathrm{B}(A,A,L)\Big] = H_*\Big[\mathrm{B}(R,A,L)\Big];$$

$$\mathrm{Ext}^A_*(L_1,L_2) = H_*\Big[\mathrm{Hom}_A(\mathrm{B}(A,A,L_1),L_2)\Big] \cong H_*\Big[(\mathrm{B}(L_2^*,A,L_1))^*\Big].$$

Введём обозначение $\overline{\mathrm{B}}(A) := B(\mathbf{k}, A, \mathbf{k})$. Этот комплекс является dg-коалгеброй относительно коумножения

$$\Delta[a_1|\dots|a_n] = \sum_{i=0}^n [a_1|\dots|a_i]\otimes[a_{i+1}|\dots|a_n]. \tag{4.1}$$

Переходя к гомологиям, мы получаем ассоциативное коумножение на $\mathrm{Tor}^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$.

Двойственным образом, для градуированной коалгебры C и левого C-комодуля L^* имеем *кобар-конструкцию*

$$0 \to \Omega_0(\mathbf{k}, C, L^*) \to \Omega_{-1}(\mathbf{k}, C, L^*) \to \dots,$$

$\Omega_{-n}(\mathbf{k}, C, L^*) := I(C)^{\otimes n} \otimes L^*$. Если $\Delta c = \sum_r c'_r \otimes c''_r$ – коумножение, а $\alpha^*(\lambda) = \sum_r c'_r \otimes \lambda''_r$ – отображение кодействия, то дифференциал на кобар-конструкции задаётся формулой

$$d([c_1|\dots|c_n]\lambda) := -\sum_{i=1}^{n}\sum_r [\overline{c}_1|\dots|\overline{c}_{i-1}|\overline{c}'_{i,r}|c''_{i,r}|c_{i+1}|\dots|c_n]\lambda - \sum_r [\overline{c}_1|\dots|\overline{c}_n|\overline{c}'_r]\lambda''_r.$$

Кобар-конструкция $\Omega(C) := \Omega(\mathbf{k}, C, \mathbf{k})$ является dg-алгеброй относительно умножения

$$[c_1|\dots|c_i] \smile [e_1|\dots|e_j] := [c_1|\dots|c_i|e_1|\dots|e_j]. \tag{4.2}$$

Бар-конструкция и кобар-конструкция – двойственные цепные комплексы: $\overline{\mathrm{B}}(A)^* \cong \Omega(A^*)$, где A^* – коалгебра, двойственная к алгебре A. При этой двойственности коумножение (4.1) двойственно к умножению (4.2).Если $\mathbf{k}$ – поле, то по формуле Кюннета двойственность сохраняется при переходе к гомологиям. Следовательно, $\mathrm{E}(A)$ – ассоциативная $\mathbf{k}$-алгебра, двойственная к ассоциативной $\mathbf{k}$-коалгебре $\mathrm{Tor}^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$.

4.3. **Копредставления связных градуированных алгебр.** Пусть A – связная ассоциативная алгебра над полем $\mathbf{k}$. Её *копредставлением* называют изоморфизм

$$T(a_1,\dots,a_M,\dots)/(r_1,\dots,r_N,\dots) \xrightarrow{\cong} A,$$

где $T(a_1,\dots,a_M,\dots)$ – тензорная $\mathbf{k}$-алгебра на образующих $a_1,\dots,a_M,\dots$ а $(r_1,\dots,r_N,\dots)$ – идеал в ней. Если A градуирована, то предполагается, что элементы a_i (*образующие*) и r_j (*соотношения*) однородны. Иногда элементы в $T(a_1,\dots,a_M)$ мы будем отождествлять с их образами в A.

Сначала сопоставим каждому копредставлению начало резольвенты левого A-модуля $\mathbf{k}$.

Лемма 4.1 ([Wall60, §7]). *Пусть связная градуированная алгебра A задана однородными образующими $a_1,\dots,a_M$ и однородными соотношениями $r_1 = \dots = r_N = 0$ в $T(a_1,\dots,a_M)$ положительной степени. Запишем элементы r_j в виде*

$$r_j = \sum_{i=1}^{M} b_{ji}\cdot a_i,\quad b_{ji}\in T(a_1,\dots,a_M).$$

Тогда следующая последовательность свободных левых A-модулей точна:

$$\bigoplus_{j=1}^{N} A\otimes R_j \xrightarrow{d_2} \bigoplus_{i=1}^{M} A\otimes X_i \xrightarrow{d_1} A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{k} \to 0, \tag{4.3}$$

$$d_2(R_j) := \sum_{i=1}^{M} \overline{b_{ji}}\otimes X_i,\quad d_1(X_i) := a_i.$$

□

Однородное копредставление $A = T(a_1,\dots,a_M)/(r_1 = \dots = r_N = 0)$ называют *минимальным*, если оба набора $a_1,\dots,a_M$ и $r_1,\dots,r_N$ минимальны по включению.

Предложение 4.2 ([Wall60, §7]). *Пусть $\mathbf{k}$ – поле, A – связная градуированная $\mathbf{k}$-алгебра. Пусть $A = T(a_1,\dots,a_M)/(r_1 = 0 = \dots = r_N = 0)$ – минимальное копредставление. Тогда точная последовательность (4.3) достраивается до минимальной резольвенты левого A-модуля $\mathbf{k}$ (такой свободной резольвенты $\dots \to F_i \to F_{i-1} \to \dots \to \mathbf{k} \to 0$, что $d(F_i) \subset I(A)\cdot F_{i-1}$.) Следовательно,*

$$\mathrm{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{M}\mathbf{k}\cdot a_i,\quad \mathrm{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k}) \simeq \bigoplus_{j=1}^{N}\mathbf{k}\cdot r_j.\quad \square$$

Следствие 4.3. *Пусть $\mathbf{k}$ – поле, $A = \bigoplus_\lambda A_\lambda$ – связная $\mathbb{Z}^k\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированная $\mathbf{k}$-алгебра. Тогда для каждого $\lambda\in\mathbb{Z}^k\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$ любое минимальное однородное копредставление алгебры A содержит ровно $\dim\mathrm{E}(A)_{-1,\lambda}$ образующих и $\dim\mathrm{E}(A)_{-2,\lambda}$ соотношений мультистепени λ.*

Доказательство. По предыдущему предложению,

$$\mathrm{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_\lambda \simeq \bigoplus_{i:\ \deg a_i=\lambda} \mathbf{k}\cdot a_i, \quad \mathrm{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_\lambda \simeq \bigoplus_{j:\ \deg r_j=N} \mathbf{k}\cdot r_j.$$

Осталось заметить, что $\mathrm{Tor}_i^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_N$ и $\mathrm{E}(A)_{-i,\lambda}$ – двойственные векторные пространства. □

Таким образом, количество однородных образующих и соотношений не зависит от выбора минимального копредставления, так как выражается через размерности градуированных компонент $\mathbf{k}$-модуля $\mathrm{Tor}^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$.

Теперь свяжем точную последовательность (4.3) с бар-резольвентой.

Лемма 4.4. *Пусть $A = T(a_1,\dots,a_M)/(r_1 = \dots = r_N = 0)$ – минимальное копредставление связной градуированной алгебры.*

(1) *В обозначениях леммы 4.1 , имеем коммутативную диаграмму свободных левых A-модулей*

(4.4)
$$\begin{tikzcd}
 & & \bigoplus_{j=1}^N A\otimes R_j \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "f_2"] & \bigoplus_{i=1}^M A\otimes X_i \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbf{k} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\dots \arrow[r] & A\otimes I(A)^{\otimes 3} \arrow[r, "d_{B,3}"] & A\otimes I(A)^{\otimes 2} \arrow[r, "d_{B,2}"] & A\otimes I(A) \arrow[r, "d_{B,1}"] & A \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbf{k} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

с точными строками, где

$$f_2(R_j) := \sum_{i=1}^M \left[\overline{b_{ji}}\middle|a_i\right], \quad f_1(X_i) := [a_i].$$

(2) *Циклы $[a_1],\dots,[a_M] \in \overline{\mathrm{B}}_1(A)$ задают базис $\mathbf{k}$-модуля $H_1(\overline{\mathrm{B}}(A)) \cong \mathrm{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$.*

(3) *Циклы $f_2(R_1),\dots,f_2(R_N) \in \overline{\mathrm{B}}_2(A)$ задают базис $\mathbf{k}$-модуля $H_2(\overline{\mathrm{B}}(A)) \cong \mathrm{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$.*

Доказательство. Проверим коммутативность диаграммы. Для левого квадрата имеем

$$f_1(d_2(R_j)) = f_1\left(\sum_{i=1}^M \overline{b_{ji}}\otimes X_i\right) = \sum_{i=1}^M \overline{b_{ji}}[a_i],$$

$$d_{B,2}(f_2(R_j)) = \sum_{i=1}^M d_{B,2}\left(\left[\overline{b_{ji}}\middle|a_i\right]\right) = \sum_{i=1}^M \overline{b_{ji}}[a_i] + \sum_{i=1}^M \left[b_{ji}a_i\right];$$

последнее слагаемое равно нулю, так как $\sum_{i=1}^M b_{ji}a_i = r_j = 0 \in A$. Для двух других квадратов коммутативность очевидна.

Теперь достроим верхнюю строку до минимальной резольвенты, а отображения f_1, f_2 – до цепного отображения резольвент. Применив функтор $\mathbf{k}\otimes_A(-)$, мы получим цепное отображение комплексов

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "0"] \arrow[d] & M_3 \arrow[r, "0"] \arrow[d] & \bigoplus_{j=1}^N \mathbf{k}\otimes R_j \arrow[r, "0"] \arrow[d, "f_2"] & \bigoplus_{i=1}^M \mathbf{k}\otimes X_i \arrow[r, "0"] \arrow[d, "f_1"] & \mathbf{k} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\dots \arrow[r] & \overline{\mathrm{B}}_3(A) \arrow[r, "d_{\overline{\mathrm{B}},3}"] & \overline{\mathrm{B}}_2(A) \arrow[r, "d_{\overline{\mathrm{B}},2}"] & \overline{A} \arrow[r, "0"] & \mathbf{k} \arrow[r, "\varepsilon"] & 0.
\end{tikzcd}$$

Гомологии каждого из комплексов равны $\mathrm{Tor}^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$, а индуцированное отображение в гомологиях – изоморфизм. Верхний комплекс получен из минимальной резольвенты, поэтому в нём все дифференциалы нулевые. Поэтому циклы $f_2(R_1),\dots,f_2(R_N) \in \overline{\mathrm{B}}_2(A)$ задают те же классы в $\mathrm{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$, что и элементы $R_1,\dots,R_N$, то есть базис в $\mathrm{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$. Аналогично для $f_1(X_1),\dots,f_1(X_M)$ и $X_1,\dots,X_M$. □

Следующее предложение показывает, что квадратичную часть соотношений в A можно восстановить по *коумножению* на биградуированном $\mathbf{k}$-модуле $\mathrm{Tor}^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$.

Предложение 4.5. *Пусть* $A = T(a_1, \ldots, a_M)/(r_1 = \cdots = r_N = 0)$ *– минимальное копредставление. Пусть*

$$x_1, \ldots, x_M \in \operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k}, \mathbf{k}), \quad \rho_1, \ldots, \rho_N \in \operatorname{Tor}_2^A(\mathbf{k}, \mathbf{k})$$

– соответствующие базисы в Tor*-модулях, а*

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_M \in \mathrm{E}(A)_{-1}, \quad \theta_1, \ldots, \theta_N \in \mathrm{E}(A)_{-2}$$

– дуальные базисы в Ext*-модулях.*

Выделим квадратичные части соотношений:

$$r_j(a_1, \ldots, a_M) = \sum_{i'=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} \underbrace{\lambda_{i',i}^{(j)}}_{\in \mathbf{k}} a_{i'} a_i + \Big[\textit{одночлены от } a_1, \ldots, a_M \textit{ степеней } \geq 3\Big] \in T(a_1, \ldots, a_M),\ j = 1, \ldots, N.$$

Тогда:

(1) *Для коумножения* Δ *на* $\operatorname{Tor}^A(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ *имеем*

$$\Delta \rho_j = 1 \otimes \rho_j + \rho_j \otimes 1 + \sum_{i'=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} (-1)^{|x_{i'}|} \lambda_{i',i}^{(j)} x_{i'} \otimes x_i, \quad \forall j = 1, \ldots, N;$$

(2) *Для умножения Йонеды* $\smile$ *на* $\operatorname{Ext}_A(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ *имеем*

$$\alpha_{i'} \smile \alpha_i = (-1)^{|\alpha_{i'}| \cdot (|\alpha_i| + 1)} \sum_{j=1}^{N} \lambda_{i',i}^{(j)} \theta_j, \quad \forall i', i \in \{1, \ldots, M\}.$$

Доказательство. Вычислим коумножение на $\operatorname{Tor}^A(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ с помощью коумножения на $\overline{\mathrm{B}}(A)$. Отображение резольвент (4.4) из леммы 4.4 индуцирует отображение цепных комплексов, вычисляющих функтор $\operatorname{Tor}^A(\mathbf{k}, \mathbf{k})$:

$$\begin{tikzcd}
 & \bigoplus_{j=1}^{N} \mathbf{k} \otimes \rho_j \arrow[r, "0"] \arrow[d, "f_2"] & \bigoplus_{i=1}^{M} \mathbf{k} \otimes x_i \arrow[r, "0"] \arrow[d, "f_1"] & \mathbf{k} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\ldots \arrow[r] \overline{\mathrm{B}}_3(A) \arrow[r, "d_{\overline{\mathrm{B}},3}"] & \overline{\mathrm{B}}_2(A) \arrow[r, "d_{\overline{\mathrm{B}},2}"] & \overline{\mathrm{B}}_1(A) \arrow[r, "d_{\overline{\mathrm{B}},1}"] & \mathbf{k} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Значит, класс $x_i \in \operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ представлен циклом $\widetilde{x}_i := [a_i] \in \overline{\mathrm{B}}_1(A)$, а класс $\rho_j \in \operatorname{Tor}_2^A(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ – циклом

$$\widetilde{\rho}_j := \sum_{i=1}^{M} \left[\overline{b_{ji}} \middle| a_i\right] \in \overline{\mathrm{B}}_2(A).$$

Коумножение в бар-конструкции даёт

$$\Delta \widetilde{\rho}_j - 1 \otimes \widetilde{\rho}_j - \widetilde{\rho}_j \otimes 1 = \sum_{i=1}^{M} \left[\overline{b_{ji}}\right] \otimes [a_i] \in \overline{\mathrm{B}}(A) \otimes \overline{\mathrm{B}}(A).$$

При этом по условию имеем

$$b_{ji} = \sum_{i'=1}^{M} \lambda_{i',i}^{(j)} a_{i'} + \Big[\text{сумма одночленов от } a_1, \ldots, a_M \text{ длины } \geq 2\Big].$$

Следовательно,

$$\overline{b_{ji}} = \sum_{i'=1}^{M} \lambda_{i',i}^{(j)} \overline{a_{i'}} + \sum_s x_s \cdot y_s$$

для некоторых однородных элементов $x_s, y_s \in \overline{A}$. Но $[x_s \cdot y_s] = d_{\mathrm{B}}([\overline{x}_s | y_s])$, поэтому классы $[\overline{b_{ji}}]$ и $\sum_{i'=1}^{M} \lambda_{i,i'}^{(j)} [\overline{a_{i'}}]$ гомологичны в $\overline{\mathrm{B}}_1(A)$. Итак, класс $\Delta \widetilde{\rho}_j - 1 \otimes \widetilde{\rho}_j - \widetilde{\rho}_j \otimes 1$ гомологичен в $\overline{\mathrm{B}}(A) \otimes \overline{\mathrm{B}}(A)$ классу

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{i'=1}^{M} \lambda_{i',i}^{(j)} [\overline{a_{i'}}] \otimes [a_i] = -\sum_{i=1}^{M} \sum_{i'=1}^{M} \lambda_{i',i}^{(j)} \overline{\widetilde{x}_{i'}} \otimes x_i.$$

Это доказывает формулу (1).

Формула (2) получается дуализацией (1), так как умножение в алгебре $\operatorname{Ext}_A(\mathbf{k},\mathbf{k}) = \big(\operatorname{Tor}^A(\mathbf{k},\mathbf{k})\big)^*$ двойственно к коумножению в $\operatorname{Tor}^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$: для $\xi_1,\xi_2\in\operatorname{Ext}_A(\mathbf{k},\mathbf{k})$ и $t\in\operatorname{Tor}^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$ имеем

$$\langle \xi_1\smile\xi_2, t\rangle = \langle \xi_1\otimes\xi_2,\Delta t\rangle = \sum_r (-1)^{|\xi_2|\cdot|t'_r|}\langle\xi_1,t'_r\rangle\cdot\langle\xi_2,t''_r\rangle,$$

если $\Delta t = \sum_r t'_r\otimes t''_r$. □

5. Копредставления алгебр $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$

В этом разделе изучаются градуированные компоненты $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированной алгебры $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ и $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированной алгебры $\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))$. Далее мы доказываем предложение 1.1 и теорему 1.2 на основе теоремы Бакелина–Рооса (теоремы 5.9). Предполагается, что $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на $[m]$ без призрачных вершин, $\mathbf{k}$ – произвольное поле.

5.1. **Применение бар-резольвенты.**

Лемма 5.1. (1) *Если* $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-n,2\alpha}\neq 0$, *то либо* $n=\alpha=0$, *либо* $1\leq n\leq|\alpha|$.
(2) *Если* $\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{-i,-n,2\alpha}\neq 0$, *то либо* $i=n=\alpha=0$, *либо* $1\leq i\leq n\leq|\alpha|$.

Доказательство. Ext-алгебра вычисляется как гомологии комплекса, двойственного к бар-конструкции $\overline{\mathrm{B}}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$. Поэтому достаточно доказать, что бар-конструкция сосредоточена в градуировках

$$\{(0,0)\}\sqcup\{(n,2\alpha):\ \alpha\in\mathbb{Z}^m_{\geq 0},\ 1\leq n\leq|\alpha|\}\subset\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}.$$

Действительно: пусть $\overline{\mathrm{B}}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-n,2\alpha}\neq 0$. Есть два случая:

- При $n=0$ имеем $\overline{\mathrm{B}}(A)_{0,*}=I(A)^{\otimes 0}=\mathbf{k}$, поэтому
$$\overline{\mathrm{B}}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{0,2\alpha}=\begin{cases}\mathbf{k}, & \alpha=0,\\ 0, & \alpha\neq 0.\end{cases}$$
- При $n\geq 1$ имеем
$$\overline{\mathrm{B}}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{n,2\alpha}=(I(\mathbf{k}[\mathcal{K}])^{\otimes n})_{2\alpha}=\bigoplus_{\alpha=\alpha_1+\dots+\alpha_n} I(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{2\alpha_1}\otimes\dots\otimes I(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{2\alpha_n}.$$
Градуированный $\mathbf{k}$-модуль $I(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ сосредоточен в градуировках вида 2β, где $\beta\in\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$, $|\beta|\geq 1$. Значит, если $\overline{\mathrm{B}}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{n,2\alpha}\neq 0$, то α представимо в виде $\alpha_1+\dots+\alpha_n$, где $|\alpha_i|\geq 1$. Получаем искомое неравенство $|\alpha|\geq n$.

Пункт (2) доказывается аналогично. □

Лемма 5.2. *Пусть* $\alpha\in\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$ *и* $\operatorname{supp}(\alpha)\subset J\subset[m]$. *Тогда естественные отображения*

$$\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_J])_{-n,2\alpha}\to\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-n,2\alpha}\ \text{и}\ \mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{-i,-n,2\alpha}\to\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_J]))_{-i,-n,2\alpha},$$

индуцированные вложением $\mathcal{K}_J\hookrightarrow\mathcal{K}$, *являются изоморфизмами* $\mathbf{k}$-*модулей. В частности,* $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_J])\to\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ – *вложение подалгебры прямым слагаемым, а* $\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))\to\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_J]))$ – *проекция на прямое слагаемое:*

$$\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_J])\xrightarrow{\cong}\bigoplus_{\operatorname{supp}(\alpha)\subset J}\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-*,2\alpha}\hookrightarrow\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]),$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))\twoheadrightarrow\bigoplus_{\operatorname{supp}(\alpha)\subset J}\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{-*,-*,2\alpha}\xrightarrow{\cong}\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_J])).$$

Доказательство. Ясно, что $\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{2\alpha}=\mathbf{k}\langle\mathcal{K}_J\rangle_{2\alpha}$ при всех $\alpha\in\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$, таких что $\operatorname{supp}(\alpha)\subset J$. Следовательно, при тех же условиях цепные комплексы $(\Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)_{-*,2\alpha},d_\Omega)$ и $(\Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}_J\rangle)_{-*,2\alpha},d_\Omega)$ совпадают. Переходя к когомологиям, получаем

$$\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-*,2\alpha}=\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_J]))_{-*,2\alpha}.$$

Утверждение про повторные Ext-алгебры доказывается аналогично. □

5.2. **Следствия из свойств кошулевых алгебр.** Пусть связная градуированная $\mathbf{k}$-алгебра A порождена однородными элементами $v_1,\dots,v_m\in A$. Коциклы в кобар-конструкции, двойственные к циклам $[v_i]\in\overline{\mathrm{B}}_1(A)$, задают элементы $u_1,\dots,u_m\in\mathrm{Ext}^1_A(\mathbf{k},\mathbf{k})=\mathrm{E}(A)_{-1,*}$. Повторяя эту операцию, получаем элементы $V_1,\dots,V_m\in\mathrm{E}(\mathrm{E}(A))_{-1,-1,*}$.

Говорят, что A – *кошулева* алгебра, если алгебра $\mathrm{E}(A)$ мультипликативно порождена элементами $u_1,\dots,u_m$. (Кошулевость эквивалентна ряду замечательных свойств; см. [Fröberg97, Polischuk–Positselski05].)

По лемме 5.1 имеем

$$\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])=\bigoplus_{0\le n\le|\alpha|}\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-n,2\alpha},\quad \mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))=\bigoplus_{0\le i\le n\le|\alpha}\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{-i,-n,2\alpha},$$

то есть Ext-алгебры сосредоточены “не ниже диагонали $i=n=|\alpha|$”. Следующее предложение описывает диагональные подалгебры.

Предложение 5.3. (1) *Алгебра $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ кошулева тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс. В этом случае $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])\cong\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!$, где*

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!:=T(u_1,\dots,u_m)/(u_i^2=0,\ i=1,\dots,m;\ u_iu_j+u_ju_i=0,\ \{i,j\}\in\mathcal{K}),\quad \deg u_i=(-1,2e_i).$$

(2) *Морфизм $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-n,2\alpha}\to\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}^f])_{-n,2\alpha}$, индуцированный вложением $\mathcal{K}\hookrightarrow\mathcal{K}^f$, является нулевым отображением при $n\neq|\alpha|$ и изоморфизмом при $n=|\alpha|$. Таким образом, алгебра $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!$ вкладывается в $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ прямым слагаемым:*

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!\cong\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Z}^m_{\ge0}}\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-|\alpha|,2\alpha}\subset\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]).$$

(3) *Естественное отображение $\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}^f]))\to\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))$ – изоморфное вложение прямым слагаемым*

$$\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}^f]))\xrightarrow{\cong}\bigoplus_{i\ge0,\alpha\in\mathbb{Z}^m_{\ge0}}\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{-i,-|\alpha|,2\alpha}\subset\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])).$$

Алгебра $\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}^f]))$ порождена элементами

$$V_j\in\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{-1,-1,2e_j},\quad j=1,\dots,m.$$

Отображение $v_j\mapsto V_j$ задаёт изоморфизм алгебр $\mathbf{k}[\mathcal{K}^f]\to\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}^f]))$.

Доказательство. (1) Во флаговом случае изоморфизм $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])\cong\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!$ (и, следовательно, кошулевость алгебры $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$) следует из точности резольвенты $(\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!\otimes\mathbf{k}[\mathcal{K}],d)\to(\mathbf{k},0)$, построенной Фробергом [Fröberg75]. С другой стороны, все кошулевы алгебры квадратичны [Fröberg97]. Если комплекс $\mathcal{K}$ не флаговый, то найдётся недостающая грань $J\in\mathrm{MF}(\mathcal{K})$, $|J|\ge3$. Соответствующее соотношение $\prod_{j\in J}v_j=0\in\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ не квадратично, поэтому $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ не кошулева.

(2) Доказано в [Vylegzhanin22, Theorem 3.1(b)]. Верен общий факт [Löfwall86, Corollary 1.1]: если связная $\mathbf{k}$-алгебра A порождается градуированной компонентой A_1, то диагональная подалгебра в $\mathrm{E}(A)$ квадратично двойственна к алгебре A_{quadr}, “квадратичной версии” алгебры A. В данном случае $A=\mathbf{k}[\mathcal{K}]$, $A_{quadr}=\mathbf{k}[\mathcal{K}^f]$.

(3) Вычислим $\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{-i,-n,2\alpha}$ с помощью кобар-конструкции. По соображениям градуировки, компонента $\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{-i,-|\alpha|,2\alpha}$ зависит только от подалгебры $\bigoplus_{\beta\in\mathbb{Z}^m_{\ge0}}\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-|\beta|,2\beta}\cong\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}^f])$. Поэтому

$$\bigoplus_{i,\alpha}\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{-i,-|\alpha|,2\alpha}\cong\bigoplus_{i,\alpha}\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}^f]))_{-i,-|\alpha|,2\alpha}\cong\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}^f])).$$

Отображение $\mathrm{E}(\mathrm{E}(A))\to A$, $v_i\mapsto V_i$ корректно определено для любой квадратичной алгебры A и является изоморфизмом в кошулевом случае [Priddy70, Proposition 9.1]. В частности, это верно для $A=\mathbf{k}[\mathcal{K}^f]$. ☐

5.3. **Вычисления в кобар-конструкции.** Следуя Панову и Рэю [Panov–Ray08, Examples 10.2], мы построим элементы $u_i \in \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-1,2e_i}$ при $i = 1,\dots,m$ и $w_J \in \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-2,J}$ при $\partial\Delta_J \subset \mathcal{K}$, и докажем хорошо известные соотношения между ними.

Будем работать с кобар-конструкцией для коалгебры $\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle \subset \mathbf{k}\langle\chi_1,\dots,\chi_m\rangle =: \mathbf{k}\langle m\rangle$. В обеих коалгебрах коумножение задаётся формулой

$$\Delta\chi_\alpha = \sum_{\alpha=\beta+\gamma} \chi_\beta \otimes \chi_\gamma,$$

поэтому дифференциал кобар-конструкции имеет вид $d([\chi_\alpha]) = \sum_{\alpha=\beta+\gamma,\beta\neq 0,\gamma\neq 0}[\chi_\beta|\chi_\gamma]$. Наши обозначения согласованы с согласованы с [Vylegzhanin22] и отличаются от [Panov–Ray08, Buchstaber–Panov15]: мы пишем $\chi_\alpha \in \mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle$ и $[\chi_\alpha] \in \Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)$ вместо v_α и χ_α.

Мы отождествляем $\Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)$ с образом естественного вложения dga-алгебр $\Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle) \hookrightarrow \Omega(\mathbf{k}\langle m\rangle)$. Для каждого $I \subset [m]$ рассмотрим элемент

$$\psi_I := d([\chi_I]) = \sum_{\substack{I=P\sqcup Q,\\ P,Q\neq\varnothing}} [\chi_P|\chi_Q] \in \Omega(\mathbf{k}\langle m\rangle)_{-2,2I}.$$

Лемма 5.4. *Если $\partial\Delta_I \subset \mathcal{K}$, то $\psi_I \in \Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)$, причём $d(\psi_I) = 0$.*

Доказательство. Пусть $I = P \sqcup Q$ и $P,Q \neq \varnothing$. Тогда $P,Q \subsetneq I$, то есть $P,Q \in \partial\Delta_I \subset \mathcal{K}$. Получаем $\chi_P,\chi_Q \in \mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle$, так что $\psi_I \in \Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)$.

В dg-коалгебре $\Omega(\mathbf{k}\langle m\rangle)$ выполнено тождество $\psi_I = d([\chi_I])$. Применим d: $d(\psi_I) = d^2([\chi_I]) = 0$, то есть $d(\psi_I) = 0$ в $\Omega(\mathbf{k}\langle m\rangle)$. Так как $\psi_I \in \Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)$, получаем $d(\psi_I) = 0$ в $\Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)$. $\square$

Итак, при $\partial\Delta_I \subset \mathcal{K}$ корректно определён элемент $w_I := \Big[\psi_I\Big] \in H_{-2,2I}\Big[\Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)\Big]$. Для каждого $i \in [m]$ также обозначим $u_i := \Big[[\chi_i]\Big] \in H_{-1,2e_i}\Big[\Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)\Big]$. Это корректно определённый цикл, так как $d([\chi_i]) = 0$.

Предложение 5.5. *В алгебре $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) \cong H\Big[\Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)\Big]$ выполнены следующие тождества:*

(1) $u_iu_j + u_ju_i = w_{\{i,j\}}$ *для всех* $i \neq j$;
(2) $u_i^2 = 0$ *для всех* $i = 1,\dots,m$;
(3) $w_I = 0$ *для всех* $I \in \mathcal{K}$;
(4) $u_iw_I - w_Iu_i = 0$ *для всех* $i \in I \subset [m]$, *таких что* $\partial\Delta_I \subset \mathcal{K}$;
(5) $\sum_{i\in I}(u_iw_{I\setminus i} - w_{I\setminus i}u_i) = 0$ *для всех* $I \subset [m]$, *таких что* $|I| > 2$ *и* $\partial^2\Delta_I \subset \mathcal{K}$.

Доказательство. В dg-коалгебре $\Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)$ имеем следующие соотношения между циклами:

$$[\chi_i] \smile [\chi_j] + [\chi_j] \smile [\chi_i] = \psi_{\{i,j\}}, \quad [\chi_i] \smile [\chi_i] = d([\chi_{ii}]), \quad \psi_I = d([\chi_I]).$$

Переходя к гомологиям, получаем тождества (1,2,3).

Докажем (4). Рассмотрим элемент

$$\tau := d([\chi_{I+e_i}]) - [\chi_I|\chi_i] - [\chi_i|\chi_I] = \sum_{\substack{I+e_i=\beta+\gamma,\\ \beta,\gamma\in\mathbb{Z}^m_{\geq 0}\setminus\{0,e_i\}}} [\chi_\beta|\chi_\gamma] \in \Omega(\mathbf{k}\langle m\rangle).$$

Так как $d([\chi_i]) = 0$, по правилу Лейбница получаем

$$d(\tau) = [\chi_i] \smile \psi_I - \psi_I \smile [\chi_i]. \tag{5.1}$$

Убедимся, что $\tau \in \Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)$. Действительно: пусть $I+e_i = \beta+\gamma$, где $\beta,\gamma \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0} \setminus \{0,e_i\}$. Имеем $\beta \neq I$, $\beta \neq I+e_i$, поэтому $\mathrm{supp}(\beta) \subsetneq I$, то есть $\mathrm{supp}(\beta) \in \partial\Delta_I \subset \mathcal{K}$. Следовательно, $\chi_\beta \in \mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle$. Аналогично, $\chi_\gamma \in \mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle$, откуда $\tau \in \Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)$. Итак, соотношение (5.1) выполнено в $\Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)$. Переходя к гомологиям, получаем искомое равенство $0 = u_iw_I - w_Iu_i$.

Тождество (5) доказывается по той же схеме. Рассмотрим элемент

$$\theta := d([\chi_I]) - \sum_{i\in I}[\chi_i|\chi_{I\setminus i}] - \sum_{i\in I}[\chi_{I\setminus i}|\chi_i] = \sum_{\substack{I=P\sqcup Q,\\ |P|,|Q|\geq 2}} [\chi_P|\chi_Q] \in \Omega(\mathbf{k}\langle m\rangle). \tag{5.2}$$

Так как $P \subset I$ и $|I \setminus P| \geq 2$, имеем $P \in \partial^2\Delta_I \subset \mathcal{K}$. Аналогично, $Q \in \mathcal{K}$, поэтому $\theta \in \Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)$. Дифференцируя равенство (5.2), получаем

$$d(\theta) = 0 + \sum_{i\in I}[\chi_i] \smile \psi_{I\setminus i} - \sum_{i\in I}\psi_{I\setminus i} \smile [\chi_i] \in \Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle),$$
$$0 = \sum_{i\in I} u_i w_{I\setminus i} - \sum_{i\in I} w_{I\setminus i} u_i \in H_{-3,2I}\Big[\Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)\Big]. \qquad \square$$

5.4. **Описание первых двух градуированных компонент.**

Лемма 5.6. *Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс без призрачных вершин на $[m]$. Тогда копредставление кольца Стэнли–Райснера*

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}] = T(v_1,\dots,v_m)/\left(v_iv_j - v_jv_i = 0,\ \forall 1 \leq i < j \leq m;\ \prod_{j\in J} v_j = 0,\ \forall J \in \mathrm{MF}(\mathcal{K})\right)$$

минимально. (В произведении $\prod_{j\in J} v_j$ множители упорядочены по убыванию индекса j.)

Доказательство. Ясно, что множество образующих минимально по включению: множество $\{v_1,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_m\}$ порождает подалгебру в $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$, не содержащую ненулевой элемент v_i. Осталось доказать, что множество соотношений минимально по включению.

Подалгебра в $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$, порождённая элементами v_i и v_j, изоморфна

$$\begin{cases} T(v_i,v_j)/(v_iv_j - v_jv_i = 0), & \{i,j\} \in \mathcal{K};\\ T(v_i,v_j)/(v_iv_j = v_iv_j - v_jv_i = 0), & \{i,j\} \notin \mathcal{K}.\end{cases}$$

Уберём соотношение $v_iv_j - v_jv_i = 0$ из копредставления; в полученной алгебре рассмотрим подалгебру, порождённую элементами v_i и v_j. Она изоморфна

$$\begin{cases} T(v_i,v_j), & \{i,j\} \in \mathcal{K};\\ T(v_i,v_j)/(v_iv_j = 0), & \{i,j\} \notin \mathcal{K}.\end{cases}$$

Ясно, что эти алгебры отличаются от описанных выше. Противоречие.

Аналогично, если убрать из копредставления соотношение $\prod_{j\in J} v_j = 0$, то подалгебра, порождённая элементами $\{v_j : j \in J\}$, будет изоморфна $\mathbf{k}[v_j : j \in J]$. Аналогичная подалгебра в $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ изоморфна

$$\mathbf{k}[v_j : j \in J]/(\prod_{j\in J} v_j = 0).$$

Эти алгебры различны, противоречие. $\square$

При $1 \leq i < j \leq m$ введём класс $c_{ij} \in \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-2,2(e_i+e_j)}$, заданный коциклом $[\chi_i|\chi_j] \in \Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)$.

Предложение 5.7. (1) *Множество $\{u_1,\dots,u_m\}$ – аддитивный базис $\mathbf{k}$-модуля $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-1,*}$. Множество $\{w_J, J \in \mathrm{MF}(\mathcal{K})\} \cup \{c_{ij}, 1 \leq i < j \leq m\}$ – аддитивный базис $\mathbf{k}$-модуля $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-2,*}$.*

(2) *Если $\smile$ – умножение Йонеды в $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$, то*

$$u_i \smile u_i = 0, \quad u_i \smile u_j = \begin{cases} c_{ij}, & i<j;\\ w_{\{i,j\}} - c_{ji}, & i > j,\ \{i,j\} \notin \mathcal{K};\\ -c_{ji}, & i>j,\ \{i,j\} \in \mathcal{K}.\end{cases} \tag{5.3}$$

Доказательство. Применим лемму 4.4 к минимальному копредставлению из леммы 5.6. Мы получаем, что циклы $[v_1],\dots,[v_m] \in \overline{\mathrm{B}}_1(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ задают базис $\mathbf{k}$-модуля $\mathrm{Tor}_1^{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k})$, а циклы

$$\gamma_{ij} := [v_j|v_i] - [v_i|v_j],\ i<j,\ \{i,j\} \notin \mathcal{K}; \quad \beta_J := -[v^{J\setminus \min(J)}|v_{\min(J)}],\ J \in \mathrm{MF}(\mathcal{K})$$

в $\overline{\mathrm{B}}_2(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ задают базис $\mathbf{k}$-модуля $\mathrm{Tor}_2^{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k})$. Докажем, что элементы u_i, c_{ij}, w_J, заданные коциклами

$$[\chi_i] \in \Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)_{-1,2e_i}, \quad [\chi_i|\chi_j] \in \Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)_{-2,2(e_i+e_j)}, \quad \sum_{\substack{J = P\sqcup Q,\\ P,Q\neq\varnothing}} [\chi_P|\chi_Q] \in \Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)_{-2,2J}$$

соответственно, – дуальный к нему базис в $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-1,*}$ и $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-2,*}$. Достаточно спаривать элементы в одинаковых градуировках.
Градуировка вида $(-1, 2e_i)$:

$$\langle u_i, [[v_i]]\rangle = \langle[\chi_i], [v_i]\rangle = \langle\chi_i, v_i\rangle = 1.$$

Градуировка вида $(-2, 2J)$, $J \in \mathrm{MF}_{\geq 3}(\mathcal{K})$:

$$\langle w_J, [\beta_J]\rangle = -\sum_{\substack{J=P\sqcup Q,\\ P,Q\neq\varnothing}} \langle[\chi_P|\chi_Q], [v^{J\setminus\min(J)}|v_{\min(J)}]\rangle = \sum_{\substack{J=P\sqcup Q,\\ P,Q\neq\varnothing}} \delta_{P,J\setminus\min(J)}\delta_{Q,\{\min(J)\}} = 1.$$

Градуировка вида $(-2, 2(e_i + e_j))$, $i < j$, $\{i, j\} \in \mathcal{K}$:

$$\langle c_{ij}, [\gamma_{ij}]\rangle = \langle[\chi_i|\chi_j], [v_j|v_i] - [v_i|v_j]\rangle = -\langle\chi_i, v_j\rangle\langle\chi_j, v_i\rangle + \langle\chi_i, v_i\rangle\langle\chi_j, v_j\rangle = 0 + 1 = 1.$$

Градуировка вида $(-2, 2(e_i + e_j))$, $i < j$, $\{i, j\} \in \mathcal{K}$: аналогично, $\langle c_{ij}, [\gamma_{ij}]\rangle = 1$; также имеем

$$\langle c_{ij}, [\beta_{ij}]\rangle = \langle[\chi_i|\chi_j], -[v_j|v_i]\rangle = 0,$$
$$\langle w_{\{i,j\}}, [\gamma_{ij}]\rangle = \langle[\chi_i|\chi_j] + [\chi_j|\chi_i], [v_j|v_i] - [v_i|v_j]\rangle = 0 + 1 - 1 + 0 = 0,$$
$$\langle w_{\{i,j\}}, [\beta_{ij}]\rangle = -\langle[\chi_i|\chi_j] + [\chi_j|\chi_i], [v_j|v_i]\rangle = 0 + 1 = 1.$$

Таким образом, спаривание имеет единичную матрицу 2×2. Пункт (1) доказан.

Пункт (2) получается прямым вычислением, так как класс $u_i \smile u_j$ задаётся коциклом $[\chi_i|\chi_j] \in \Omega(\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)$. При $i < j$ тот же коцикл задаёт класс c_{ij}, а при $i > j$ имеем

$$\Big[[\chi_i|\chi_j]\Big] = \Big[[\chi_i|\chi_j] + [\chi_j|\chi_i]\Big] - \Big[[\chi_j|\chi_i]\Big] = w_{\{i,j\}} - c_{ij}.$$

Если вдобавок $\{i, j\} \in \mathcal{K}$, то $w_{\{i,j\}} = 0$ по предложению 5.5. □

Напомним, что $\mathbf{k}$-модуль $I(A)/(I(A)\cdot I(A))$ называется *модулем неразложимых элементов* аугментированной алгебры A. Элемент $x \in I(A)$ разложим, если он лежит в $I(A) \cdot I(A)$.

Следствие 5.8. *Элементы $u_1, \ldots, u_m$ неразложимы и задают аддитивный базис модуля неразложимых элементов в $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-1,*}$.*

Элементы w_J, $J \in \mathrm{MF}_{\geq 3}(\mathcal{K})$ неразложимы и задают аддитивный базис модуля неразложимых элементов в $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-2,*}$.

Доказательство. По предыдущему предложению, $\{u_1, \ldots, u_m\}$ – аддитивный базис в $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-1,*}$, а $\{c_{ij}, i < j\} \cup \{w_J, J \in \mathrm{MF}(\mathcal{K})\}$ – аддитивный базис в $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-2,*}$. Так как аугментационный идеал $I(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))$ сосредоточен в градуировках $(-i, *)$ при $i > 0$, модули неразложимых элементов имеют вид

$$\left(\frac{I(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])}{I(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))\cdot I(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])}\right)_{-1,*} = \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-1,*}, \quad \left(\frac{I(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])}{I(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))\cdot I(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])}\right)_{-2,*} = \frac{\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-2,*}}{\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-1,*}\cdot\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-1,*}}.$$

Формула (5.3) показывает, что подмодуль $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-1,*}\cdot\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-1,*} \subset \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-2,*}$ – это в точности линейная оболочка базисных элементов $c_{i,j}$ и $w_{\{i,j\}}$. Следовательно, оставшиеся базисные элементы $\{w_J, J \in \mathrm{MF}_{\geq 3}(\mathcal{K})\}$ свободно порождают модуль неразложимых элементов степени $(-2, *)$. □

Модуль неразложимых элементов совпадает с первыми гомологиями бар-конструкции, то есть с модулем $\mathrm{Tor}_1^A(\mathbf{k}, \mathbf{k})$. Таким образом, в предыдущем следствии вычислены $\mathbf{k}$-модули $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])}(\mathbf{k}, \mathbf{k})_{-1,*}$ и $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])}(\mathbf{k}, \mathbf{k})_{-2,*}$.

5.5. **Приложение теоремы Бакелина–Рооса.** Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс без призрачных вершин на вершинах $[m]$, и $j \in [m]$. Напомним, что по предложению 5.3 образующей $v_j \in \mathbf{k}[\mathcal{K}]_{2e_j}$ соответствуют элементы

$$u_j \in \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-1,2e_j}, \quad V_j \in \mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{-1,-1,2e_j}.$$

Теорема 5.9 ([Backelin–Roos83, Theorem 5']). *Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$, причём $\alpha_j \geq 1$ для некоторого $j \in [m]$. Тогда отображение*

$$\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{*,*,2\alpha} \to \mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{*-1,*-1,2(\alpha+e_j)}, \ \xi \mapsto V_j \smile \xi$$

– изоморфизм биградуированных $\mathbf{k}$-модулей. □

Следующая теорема – ключевой технический результат данной работы. Напомним, что $|\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i$, $\operatorname{supp}(\alpha) = \{i \in [m] : \alpha_i > 0\}$.

Теорема 5.10. *Пусть* $\alpha \neq 0$ *и* $\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{-i,-n,2\alpha} \neq 0$. *Тогда*

$$|\alpha| - |\operatorname{supp}(\alpha)| \leq i-1, \text{ причём } \operatorname{supp}(\alpha) \in \mathcal{K}^f.$$

Доказательство. Обозначим $J := \operatorname{supp}(\alpha) \subset [m]$, $\beta := \alpha - \operatorname{supp}(\alpha) \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$ и $k := |\beta|$. Ясно, что $J \neq \varnothing$ и $\operatorname{supp}(\beta) \subset J$. По теореме 5.9, умножение слева на элемент $\prod_{j=1}^m V_j^{\beta_j}$ задаёт изоморфизм

$$\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{k-i,k-n,2J} \to \mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{-i,-n,2\alpha}.$$

Таким образом, $\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{k-i,k-n,2J} \neq 0$. Но из свойств функтора Ext имеем

$$\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{>0,*,*} = \mathrm{Ext}^{<0}_{\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])}(\mathbf{k},\mathbf{k}) = 0, \quad \mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{0,*,*} = \mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{0,0,0} = \mathbf{k}.$$

Значит, $\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{\geq 0,*,2J} = 0$, поэтому $k-i \leq -1$. Неравенство $|\alpha|-|\operatorname{supp}(\alpha)| \leq i-1$ доказано.

Теперь рассмотрим отображение

$$\underbrace{\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{-i,-n,2\alpha}}_{\neq 0} \to \mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{-(i+|J|),-(n+|J|),2(\alpha+J)}, \quad \xi \mapsto \prod_{j\in J} V_j \smile \xi.$$

Это изоморфизм по теореме 5.9. Следовательно, $\prod_{j\in J} V_j \neq 0 \in \mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))$. По предложению 5.3(3), $\prod_{j\in J} v_j \neq 0 \in \mathbf{k}[\mathcal{K}^f]$. Таким образом, $J \in \mathcal{K}^f$. $\square$

5.6. **Доказательство предложения 1.1.** Наше доказательство основано на теореме 5.10 и следующей технической лемме.

Лемма 5.11. *Пусть* A – $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$*-градуированная* $\mathbf{k}$*-алгебра,* $\mathcal{L}$ *– симплициальный комплекс на множестве вершин* $[m]$*, причём* $\mathrm{Ext}^1_A(\mathbf{k},\mathbf{k})_{*,2\alpha} = \mathrm{Ext}^2_A(\mathbf{k},\mathbf{k})_{*,2\alpha} = 0$ *при* $\operatorname{supp}(\alpha) \notin \mathcal{L}$. *Рассмотрим семейство подалгебр*

$$A_I := \bigoplus_{\operatorname{supp}(\alpha)\subset I} A_{*,\alpha} \subset A, \quad I \in \mathcal{L}.$$

Тогда $A \cong \operatorname{colim}_{I\in\mathcal{L}} A_I$.

Доказательство. Выберем $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-однородное минимальное копредставление алгебры A. Пусть образующие индексированы некоторым множеством $\mathfrak{A}$, а соотношения – множеством $\mathfrak{B}$. Имеем эпиморфизм

$$T(X_i : i \in \mathfrak{A}) \twoheadrightarrow A, \quad X_i \mapsto a_i$$

с ядром $(r_j : j \in \mathfrak{B}) \lhd T(X_i : i \in \mathfrak{A})$.

По следствию 4.3, любая образующая и любое соотношение имеет степень вида $(n, 2\alpha)$, $\operatorname{supp}(\alpha) \in \mathcal{L}$. Следовательно, для каждого $i \in \mathfrak{A}$ найдётся симплекс $I(i) \in \mathcal{L}$, такой что $a_i \in A_{I(i)}$; для каждого $j \in \mathfrak{B}$ найдётся симплекс $J(j) \in \mathcal{L}$, такой что $r_j \in T(X_i : i \in \mathfrak{A}, I(i) \subset J(j))$.

Проверим, что алгебра A вместе с вложениями $A_I \hookrightarrow A$ удовлетворяет универсальному свойству копредела. Пусть для каждого $I \in \mathcal{L}$ задан гомоморфизм $\mathbf{k}$-алгебр $f_I : A_I \to B$, причём $f_I|_{A_J} \equiv f_I$ для всех $J \subset I$. Докажем, что эти гомоморфизмы единственным образом продолжаются до гомоморфизма $f : A \to B$. Значение f на образующих однозначно определено: $f(a_i) = f_{I(i)}(a_i)$. Это доказывает единственность. Осталось доказать, что f определён корректно.

Пусть $P(a_i : i \in \mathfrak{A}) = 0 \in A$ для некоторого некоммутативного многочлена $P \in T(X_i : i \in \mathfrak{A})$. Достаточно доказать, что $P(f_{I(i)}(a_i) : i \in \mathfrak{A}) = 0$ в B. Так как P лежит в ядре гомоморфизма $T(X_i : i \in \mathfrak{A}) \to A$, он принадлежит двустороннему идеалу $(r_j : j \in \mathfrak{B})$. Имеем

$$P = \sum_{k=1}^N L_k \cdot r_{j_k} \cdot R_k, \quad L_k, R_k \in T(X_i : i \in \mathfrak{A}),\ j_k \in \mathfrak{B}.$$

Следовательно, в алгебре B выполнено

$$P(f_{I(i)}(a_i) : \dots) = \sum_{k=1}^N L_k(f_{I(i)}(a_i) : \dots) \cdot r_{j_k}(f_{I(i)}(a_i) : \dots) \cdot R_k(f_{I(i)}(a_i) : \dots).$$

Убедимся, что $r_{j_k}(f_{I(i)}(a_i) : \dots) = 0$ в B. По построению, в многочлен r_{j_k} входят только те переменные X_i, для которых $I(i) \subset J(j_k)$. Гомоморфизмы f_I согласованы, поэтому $f_{I(i)}(a_i) = f_{J(j_k)}(a_i)$ при $I(i) \subset J(j_k)$. Далее, $f_{J(j_k)} : A_{J(j_k)} \to B$ – гомоморфизм алгебр, а $r_{j_k}(a_i : \dots) = 0 \in A$. Поэтому

$$r_{j_k}(f_{I(i)}(a_i) : i \in \mathfrak{A}) = r_{j_k}(f_{I(i)}(a_i) : I(i) \subset J(j_k)) =$$
$$= r_{j_k}(f_{J(j_k)}(a_i) : I(i) \subset J(j_k)) = f_{J(j_k)}(r_{j_k}(a_i : I(i) \subset J(j_k))) = f_{J(j_k)}(0) = 0.$$

Итак, каждое слагаемое в сумме равно нулю, поэтому $P(f_{(I(i)}(a_i) : \dots) = 0$. Корректность доказана. Итак, f существует, поэтому A удовлетворяет универсальному свойству. $\square$

Доказательство предложения 1.1. По теореме 5.10, $\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{*,*,2\alpha} = 0$ при $\mathrm{supp}(\alpha) \notin \mathcal{K}^f$. Значит, лемма 5.11 применима в случае $A = \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ и $\mathcal{L} = \mathcal{K}^f$. Получаем $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) \cong \mathrm{colim}_{I \in \mathcal{K}^f} A_I$, где

$$A_I = \bigoplus_{\mathrm{supp}(\alpha) \subset I} \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-*,2\alpha} \cong E(\mathbf{k}[\mathcal{K}_I])$$

по лемме 5.2. $\square$

5.7. **Доказательство теоремы 1.2.** Переформулируем теорему для удобства доказательства. Новая формулировка состоит из шести пунктов, которые будут доказываться последовательно. Мы часто будем пользоваться следствием 4.3.

Теорема. *Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, без призрачных вершин. Тогда для любого поля $\mathbf{k}$ существует $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-однородное минимальное копредставление алгебры $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) = \mathrm{Ext}^*_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ со следующими свойствами.*

(1) *Соотношения являются лиевскими многочленами от образующих.*
(2) *Во множество образующих входят элементы $u_1, \dots, u_m$. Во множество соотношений входят тождества*

$$u_1^2 = \dots = u_m^2 = 0; \quad [u_i, u_j] = 0,\ \forall \{i,j\} \in \mathcal{K},\ i < j. \tag{5.4}$$

(3) *Степень любой образующей, отличной от $u_1, \dots, u_m$, имеет вид*
   - $(-n, 2J)$, *где* $2 \leq n < |J|$ *и* $J \in \mathcal{K}^f \setminus \mathcal{K}$.

   Степень любого соотношения, не указанного в (5.4), имеет вид
   - $(-n, 2J)$, *где* $3 \leq n < |J|$, $J \in \mathcal{K}^f \setminus \mathcal{K}$

   либо
   - $(-(n+1), 2(J + e_j))$, *где* $2 \leq n < |J|$, $j \in J$, $J \in \mathcal{K}^f \setminus \mathcal{K}$.
(4) *Соотношения последнего вида описываются следующим образом. Для $2 \leq n < |J|$, $J \in \mathcal{K}^f \setminus \mathcal{K}$ пусть $x_1, \dots, x_M$ – множество минимальных образующих степени $(-n, 2J)$. Пусть $j \in J$. Тогда множество минимальных соотношений степени $(-(n+1), 2(J + e_j))$ тоже M-элементно и состоит из соотношений вида*

$$[u_j, x_t] = R_{t,j}, \quad t = 1, \dots, M,$$

   где $R_{t,j}$ – лиевские многочлены от образующих, не зависящие от $x_1, \dots, x_M$.
(5) *В случае $n = 2$ имеем:*
   - *образующие степени $(-2, 2J)$ – это в точности элементы w_J, $J \in \mathrm{MF}_{\geq 3}(\mathcal{K})$;*
   - *соотношений степени $(-2, 2J)$ нет;*
   - *единственное соотношение степени $(-3, 2(J + e_j))$, где $j \in J \in \mathrm{MF}_{\geq 3}(\mathcal{K})$, имеет вид $[u_j, w_J] = 0$.*
(6) *Образующих и соотношений конечное число.*

Доказательство. (1) Известно [Avramov98, Theorem 10.2.1], что Ext-алгебра любой коммутативной связной градуированной $\mathbf{k}$-алгебры R изоморфна универсальной обёртывающей алгебре некоторой градуированной суперальгебры Ли $\pi(R)$:

$$\mathrm{Ext}^*_R(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \cong U(\pi(R)).$$

Выберем произвольное минимальное $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-однородное копредставление суперальгебры Ли $\pi(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ в смысле [Lemaire74, §1.3]. Из результатов Лемэра [Lemaire74, Corollaire

1.3.8] следует, что те же образующие и соотношения задают минимальное копредставление алгебры $U(\pi(\mathbf{k}[\mathcal{K}])) = \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$. По построению, все соотношения являются лиевскими многочленами от образующих. (В случае $\operatorname{char}\mathbf{k} = 2$ алгебра Ли подразумевается 2-ограниченной, поэтому в лиевских многочленах, помимо взятия коммутаторов, разрешается возведение элементов нечётной степени в квадрат. При $\operatorname{char}\mathbf{k} \neq 2$ это не требуется, так как возведение в квадрат выражается через скобку Ли: $x^2 = [x,x]/2$.)

Далее мы будем заменять образующие и соотношения на их $\mathbf{k}$-линейные комбинации с помощью обратимых преобразований. Ясно, что при этом сохраняется минимальность копредставления и лиевость соотношений.

(2) Рассмотрим все минимальные образующие и соотношения, сосредоточенные в градуировках вида $(-n, 2\alpha)$, где $n = 1, 2$. По следствию 5.8, в качестве образующих можно выбрать

$$u_1, \dots, u_m; \quad w_J,\ J \in \mathrm{MF}_{\geq 3}(\mathcal{K}),$$

а в качестве соотношений – лиевские соотношения

$$u_1^2 = \dots = u_m^2 = 0; \quad [u_i, u_j] = 0,\ \forall\{i,j\} \in \mathcal{K}.$$

В нашем копредставлении вместо них выбраны, возможно, другие образующие и соотношения, имеющие те же мультистепени. Но градуированные компоненты $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-1,2e_i}$ и $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-2,2J}$ *одномерны*. Если в такой компоненте лежит одна из образующих, то она пропорциональна базисному вектору этой компоненты. Поделим на константы пропорциональности; теперь u_i и w_J входят во множество образующих нашего копредставления. Аналогично, u_i^2 и $[u_i, u_j]$ – единственные лиевские многочлены от u_i и w_J, лежащие в градуированных компонентах $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-2,4e_i}$ и $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-2,2(e_i+e_j)}$. Эти градуированные компоненты одномерны, поэтому наши соотношения им пропорциональны. После невырожденной линейной замены имеем:

- Множество образующих степеней $(-1, *)$ – это $\{u_1, \dots, u_m\}$;
- Множество образующих степеней $(-2, *)$ – это $\{w_J\}_{J\in\mathrm{MF}_{\geq 3}(\mathcal{K})}$;
- Множество соотношений степеней $(-2, *)$ – это в точности (5.4).

(3) Из теоремы 5.10 при $i = 1, 2$ получаем:

- Если $\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{-1,-n,2\alpha} \neq 0$, то $\alpha = \operatorname{supp}(\alpha)$, причём $\operatorname{supp}(\alpha) \in \mathcal{K}^f$.
- Если $\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-2,-n,2\alpha} \neq 0$, то либо $\alpha = \operatorname{supp}(\alpha) \in \mathcal{K}^f$, либо $\alpha = \operatorname{supp}(\alpha) + e_j$ для некоторого $j \in \operatorname{supp}(\alpha)$. При этом $\operatorname{supp}(\alpha) \in \mathcal{K}^f$;
- В каждом из случаев $|\alpha| \geq n$.

Обозначив $\operatorname{supp}(\alpha) = J$, получаем:

- Любая образующая имеет степень вида $(-n, 2J)$, где $0 \leq n \leq |J|$, $J \in \mathcal{K}^f$;
- Любое соотношение имеет степень вида $(-n, 2J)$ либо $(-(n+1), 2(J + e_j))$, где $0 \leq n \leq |J|$, $J \in \mathcal{K}^f$, $j \in J$.

Осталось доказать следующие уточнения полученных ограничений на градуировки:

(a) Для образующих степени $(-n, 2J)$, где $n \geq 3$, верно $|J| > n$ и $J \notin \mathcal{K}$;
(b) Для соотношений степени $(-n, 2J)$, где $n \geq 3$, верно $|J| > n$ и $J \notin \mathcal{K}$;
(c) Для соотношений степени $(-(n+1), 2(J + e_j))$, где $n \geq 2$, верно $|J| > n$ и $J \notin \mathcal{K}$.

Докажем неравенство $|J| > n$. Уже доказано, что $|J| \geq n$. По предложению 5.3 имеем

$$\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-|\alpha|,2\alpha} = (\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!)_{-|\alpha|,2\alpha}.$$

Алгебра $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!$ порождена элементами $u_1, \dots, u_m \in \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-1,*}$, поэтому в градуировке $(-|\alpha|, 2\alpha)$ не может быть образующих при $|\alpha| > 1$. Все остальные образующие алгебры $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ лежат в градуировках вида $(-n, 2\alpha)$, $|\alpha| > n$. Следовательно, любое соотношение степени $(-|\alpha|, 2\alpha)$ является многочленом от $u_1, \dots, u_m$. Из предложения 5.3 следует, что все соотношения между $u_1, \dots, u_m$ следуют из квадратичных. Поэтому при $|\alpha| > 2$ в градуировках $(-|\alpha|, 2\alpha)$ нет соотношений. Следовательно, равенство $|J| = n$ невозможно.

Пусть теперь $|J| > n$ и $J \in \mathcal{K}$. По лемме 5.2,

$$\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-n,2J} = \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_J])_{-n,2J}.$$

Так как $\mathcal{K}_J$ – симплекс, то есть флаговый симплициальный комплекс, по Предложению 5.3 из $|J| \neq n$ следует $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_J])_{-n,2J} = 0$. Противоречие. Итак, во всех случаях (a),(b),(c) имеем $|J| > n$ и $J \notin \mathcal{K}$.

(4) Пусть $x_1, \ldots, x_M \in \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ – все минимальные образующие степени $(-n, 2J)$, $2 \leq n < |J|$, $J \in \mathcal{K}^f \setminus \mathcal{K}$. Им соответствуют элементы $\xi_1, \ldots, \xi_M$, образующие базис векторного пространства $\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{-1,-n,2J}$. По теореме 5.9, для каждого $j \in J$ векторное пространство $\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{-2,-(n+1),2(J+e_j)}$ имеет базис
$$V_j \smile \xi_1, \ldots, V_j \smile \xi_M.$$
В том же векторном пространстве есть базис, элементы которого соответствуют соотношениям степени $(-(n+1), 2(J+e_j))$ из нашего минимального копредставления. Заменив соотношения на их линейные комбинации, можно считать, что эти базисы совпадают. Итак, для каждого $j \in J$ в градуировке $(-(n+1), 2(J+e_j))$ находятся лиевские соотношения $R_1 = 0, \ldots, R_M = 0$, которым соответствуют элементы
$$\theta_t = V_j \smile \xi_t \in \mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{-2,-(n+1),2(J+e_j)}, \quad t = 1, \ldots, M.$$
Рассмотрим квадратичные части этих соотношений. Имеем $\theta_t = V_j \smile \xi_t$. По предложению 4.5, в квадратичной части соотношения R_t присутствует слагаемое $u_j \cdot x_t$ (с коэффициентом ± 1) и отсутствуют слагаемые, пропорциональные $u_j \cdot x_{t'}$ при $t \neq t'$. Поэтому данный многочлен представим в виде
$$R_t = -u_j \cdot (x_t + P) + Q,$$
где P, Q – некоторые некоммутативные многочлены от образующих, причём P не зависит от $x_1, \ldots, x_M$, а в записи Q нет слагаемых вида $u_j \cdot \widetilde{Q}$.

Теперь рассмотрим лиевский многочлен $R_{t,j} := R_t + [u_j, x_t]$. Докажем, что $R_{t,j}$ не зависит от $x_1, \ldots, x_M$. Пусть это не так, и $R_{t,j}$ существенно зависит от образующей $x_{t'}$ (возможно, $t' = t$). Так как
$$\deg R_{t,j} = (-(n+1), 2(J+e_j)), \quad \deg x_{t'} = (-n, 2J), \quad \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-1,2e_j} = \mathbf{k} \cdot u_j,$$
в запись $R_{t,j}$ входит хотя бы один из мономов $u_j x_{t'}$, $x_{t'} u_j$. Так как R_t – лиевский многочлен, оба монома входят с ненулевым коэффициентом. С другой стороны,
$$R_{t,j} = R_t + [u_j, x_t] = \pm x_t \cdot u_j - u_j \cdot P + Q.$$
Многочлен P не зависит от $x_{t'}$, а в записи Q нет мономов вида $u_j \cdot (\ldots)$. Поэтому моном $u_j \cdot x_{t'}$ не может входить с ненулевым коэффициентом в правую часть равенства. Противоречие. Поэтому соотношение R_t представимо в виде
$$-[u_j, x_t] + R_{t,j},$$
где $R_{t,j}$ не зависит от $x_1, \ldots, x_M$.

(5) Описание образующих и соотношений при $n = 2$ получено в пункте (2). По доказанному выше, при $j \in J \in \mathrm{MF}_{\geq 3}(\mathcal{K})$ в нашем минимальном копредставлении есть единственное соотношение степени $(-3, 2(J+e_j))$, которое записывается как
$$-[u_j, w_J] + R_{t,j} = 0.$$
С другой стороны, имеем нетривиальное соотношение $[u_j, w_J] = 0$ по предложению 5.5. Следовательно, $R_{t,j} = 0$.

(6) Из пунктов (2) и (3) следует, что образующие и соотношения сосредоточены в конечном числе градуированных компонент. Каждая градуированная компонента алгебры $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ конечномерна, поэтому образующих и соотношений конечное число. □

6. Случай $SCM^{\vee}$-комплексов и почти флаговых комплексов

6.1. **Комплексы, двойственные к секвенциально коэн-маколеевым.** Пусть A – градуированная $\mathbf{k}$-алгебра, $n \geq 1$. Обозначим как $D_n(A)$ подалгебру в $\mathrm{E}(A)$, порождённую градуированными компонентами $\mathrm{E}(A)_{-i,*}$ при $i = 1, \ldots, n$. Говорят, что A – *K_n-алгебра*, если $\mathrm{E}(A) = D_n(A)$. Известно [Fröberg97], что кошулевость эквивалентна условию K_1, поэтому K_n-алгебры можно рассматривать как “обобщённо кошулевы”. Класс K_2-алгебр исследовался Кэссиди, Шелтоном [Cassidy–Shelton09] и Коннером, Шелтоном [Conner–Shelton12].

Теорема 6.1 ([Conner–Shelton12, Corollary 6.4])**.** *Пусть $\mathcal{K} \in \mathbf{k}SCM^\vee$ для некоторого поля $\mathbf{k}$. Тогда $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ – K_2-алгебра.* □

Доказательство теоремы 3.11. Пусть $\mathcal{K} \in \mathbf{k}\widehat{SCM}^\vee$. Рассмотрим копредставление алгебры $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ из теоремы 1.2. Элементы

$$u_1, \ldots, u_m; \quad w_J,\ J \in \mathrm{MF}_{\geq 3}(\mathcal{K})$$

входят в список минимальных образующих. Предположим, что это не все образующие. Любая другая образующая имеет вид $x \in \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-n,2J}$, где $n \geq 3$ и $J \in \mathcal{K}^f$. По следствию 4.3, $\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]))_{-1,-n,2J} \neq 0$. По лемме 5.2, $\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_J]))_{-1,-n,2J} \neq 0$. Значит, в любом копредставлении алгебры $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_J])$ есть образующая степени $(-n, 2J)$.

С другой стороны, $\mathcal{K}_J \in \mathbf{k}SCM^\vee$, поэтому по теореме 6.1 алгебра $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_J])$ порождается элементами степеней $(-1, *)$ и $(-2, *)$. Противоречие с $n \geq 3$. □

6.2. **Почти флаговые комплексы.** Следующий результат давно известен в контексте теории полиэдральных произведений (см. [Buchstaber–Panov15, Example 8.4.6.2]).

Предложение 6.2. *Пусть $\mathcal{K} = \partial\Delta_J$, $|J| \geq 3$. Тогда $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) \cong \Lambda[u_j : j \in J] \otimes \mathbf{k}[w_J]$. Следовательно, эта алгебра имеет минимальное копредставление*

$$\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) = T(u_j : j \in J; w_J)/(u_j^2 = 0,\ j \in J;\ u_iu_j + u_ju_i = 0,\ i,j \in J;\ u_jw_J - w_Ju_j = 0,\ j \in J).$$

Доказательство. По предложению [Buchstaber–Panov15, Proposition 8.4.1], для любого комплекса $\mathcal{K}$ на множестве вершин J имеем изоморфизм $\mathbf{k}$-модулей

$$H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K}); \mathbf{k}) \simeq H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}; \mathbf{k}) \otimes \Lambda[u_j : j \in J].$$

При $\mathcal{K} = \partial\Delta_J$ топологическое пространство $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ гомеоморфно $S^{2|J|-1}$, поэтому $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}; \mathbf{k}) \simeq \mathbf{k}[x]$, $|x| = 2|J| - 2$. Следовательно, градуированный $\mathbf{k}$-модуль $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\partial\Delta_J]) \cong H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K}); \mathbf{k})$ аддитивно изоморфен градуированной алгебре $\mathbf{k}[w_J] \otimes \Lambda[u_j : j \in J]$.

С другой стороны, комплекс $\partial\Delta_J$ принадлежит классу $\mathbf{k}SCM^\vee$. По теореме 6.1, гомоморфизм $\Lambda[u_j : j \in J] \otimes \mathbf{k}[w_J] = EQ(\partial\Delta_J; \mathbf{k}) \to \mathrm{E}(\mathbf{k}[\partial\Delta_J])$ сюръективен. Значит, это изоморфизм, так как размерности градуированных компонент совпадают. □

Доказательство теоремы 3.6. Сначала убедимся, что перечисленные соотношения действительно выполнены в $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$. Нетривиален только случай $[u_i, w_J]$ при $i \in I[J] \setminus J$. По определению множества $I[J]$, имеем $\{i\} * \partial\Delta_J \subset \mathcal{K}$. Вложение $\{i\} * \partial\Delta_J \hookrightarrow \mathcal{K}$ индуцирует гомоморфизм

$$\mathrm{E}(\mathbf{k}[\{i\} * \partial\Delta_J]) \to \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]).$$

Функтор $\mathcal{K} \mapsto \mathbf{k}[\mathcal{K}]$ переводит джойны в тензорные произведения, а функтор $A \mapsto \mathrm{E}(A)$ сохраняет тензорные произведения. Следовательно,

$$\mathrm{E}(\mathbf{k}[\{i\} * \partial\Delta_J]) \cong \mathrm{E}(\mathbf{k}[v_i] \otimes \mathbf{k}[\partial\Delta_J]) \cong \mathrm{E}(\mathbf{k}[v_i]) \otimes \mathrm{E}(\mathbf{k}[\partial\Delta_J]) \cong \Lambda[u_i] \otimes \Lambda[u_j : j \in J] \otimes \mathbf{k}[w_J].$$

В этой алгебре выполнено соотношение $[u_i, w_J] = 0$; следовательно, оно выполнено и в $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$.

Теперь рассмотрим минимальное копредставление алгебры $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ из теоремы 1.2. Элементы $\{u_i\}$ и $\{w_J\}$ входят в список минимальных образующих. Если это не все образующие, то найдётся образующая вида $x \in \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-n,2J}$, где $n \geq 3$ и $J \in \mathcal{K}^f$. По определению почти флагового комплекса, возможны три случая:

(1) $\mathcal{K}_J = \Delta_J$. Тогда $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_J]) \cong \Lambda[u_j : j \in J]$. Эта алгебра порождается элементами u_j.

(2) $\mathcal{K}_J = \partial\Delta_J$. По предыдущей лемме, алгебра $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_J]) \cong \Lambda[u_j : j \in J] \otimes \mathbf{k}[w_J]$ порождается элементами u_j и w_J.

(3) $\mathcal{K}_J = \Delta_P * \partial\Delta_Q$. Как и выше, имеем

$$\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_J]) \cong \mathrm{E}(\mathbf{k}[\Delta_P]) \otimes \mathrm{E}(\mathbf{k}[\partial\Delta_Q]) \cong \Lambda[u_j : j \in J] \otimes \mathbf{k}[w_Q].$$

Эта алгебра порождается элементами u_j и w_Q.

Таким образом, образующая x не может существовать. Аналогично, соотношения, задающие алгебры $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_J])$ при $J \in \mathcal{K}^f$, следуют из предписанных теоремой 1.2. Поэтому в копредставлении нет других соотношений. □

Теперь докажем, что любой направленный MF-комплекс почти флаговый.

Определение 6.3 ([Grbić–Theriault16, Определение 8.2])**.** Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ называют *MF-комплексом*, если $\mathcal{K} = \bigcup_{J\in \mathrm{MF}(\mathcal{K})} \partial\Delta_J$.

MF-комплекс $\mathcal{K}$ *направленный*, если можно указать фильтрацию

$$\varnothing = \mathcal{K}^0 \subset \mathcal{K}^1 \subset \cdots \subset \mathcal{K}^\ell = \mathcal{K},$$

такую что для каждого $i = 1, \ldots, \ell$ верно:

(1) $\mathcal{K}^i = \mathcal{K}^{i-1} \cup \partial\Delta_{J_i}$ для некоторого $J_i \in \mathrm{MF}(\mathcal{K})$;
(2) $\mathcal{K}^{i-1} \cap \Delta_{J_i} = \Delta_{P_i}$ для некоторого $P_i \in \mathcal{K}$.

Другими словами, $\mathcal{K}^i$ получается из $\mathcal{K}^{i-1}$ приклеиванием границы симплекса по общей грани: $\mathcal{K}^i = \mathcal{K}^{i-1} \cup_{\Delta_{P_i}} \partial\Delta_{J_i}$. Пусть V_i – множество вершин комплекса $\mathcal{K}^i$. Тогда имеем $V_i = V_{i-1} \cup J_i$, $P_i = V_{i-1} \cap J_i$, причём $P_i \subsetneq J_i$ и $(\mathcal{K}^{i-1})_{P_i} = \Delta_{P_i}$.

Предложение 6.4. *Если $\mathcal{K}$ – направленный MF-комплекс, то $\nu(\mathcal{K}) \le 1$. В частности, $\mathcal{K}$ почти флаговый.*

Доказательство. Индукция по ℓ. База: при $\ell = 1$ имеем $\mathcal{K} = \partial\Delta_{J_1}$. Очевидно, $\nu(\mathcal{K}) = 1$.

Переход индукции: обозначим $\mathcal{L} = \mathcal{K}_{\ell-1}$, $J = J_\ell$, $V = V_{\ell-1}$, $P = P_\ell$. Имеем

$$J \in \mathrm{MF}(\mathcal{K}), \quad \mathcal{K} = \mathcal{L} \cup \partial\Delta_J, \quad P = V \cap J, \quad \mathcal{L}_P = \Delta_P.$$

Сначала убедимся, что $\mathcal{L} = \mathcal{K}_V$. Действительно: если $I \in \mathcal{L}$, то $I \subset V$ и $I \in \mathcal{K}$, так что $I \in \mathcal{K}_V$. Наоборот, если $I \in \mathcal{K}_V \setminus \mathcal{L}$, то из $\mathcal{K} = \mathcal{L} \cap \partial\Delta_J$ получаем $I \in \partial\Delta_J$, так что $I \subset J$. Значит, $I \subset V \cap J = P$. Поэтому $I \in \Delta_P = \mathcal{L}_P \subset \mathcal{L}$, противоречие. Итак, $\mathcal{L} = \mathcal{K}_V$.

По предположению индукции, $\mathcal{L} \cup \mathrm{MF}_{\ge 3}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}^f$. Убедимся, что $\mathcal{K} \cup \mathrm{MF}_{\ge 3}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}^f$. Пусть это не так. Тогда найдётся симплекс $I \in \mathcal{K}^f$, такой что $I \notin \mathcal{K}$ и $I \notin \mathrm{MF}_{\ge 3}(\mathcal{K})$.

Если $I \subset V$, то $I \in (\mathcal{K}^f)_V = (\mathcal{K}_V)^f = \mathcal{L}^f$, так что по предположению индукции имеем

$$I \in \mathcal{L} \cup \mathrm{MF}_{\ge 3}(\mathcal{L}).$$

Так как $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ и $I \notin \mathcal{K}$, получаем $I \in \mathrm{MF}_{\ge 3}(\mathcal{L})$. Следовательно, $I \setminus \{i\} \in \mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ для любого $i \in I$. Получаем $I \in \mathrm{MF}_{\ge 3}(\mathcal{K})$, противоречие.

Итак, $I \not\subset V$. Докажем, что $I \subset J$. Пусть это не так. Найдутся вершины $i \in I \setminus V$ и $j \in I \setminus J$. Так как $I \in \mathcal{K}^f$, имеем $\{i, j\} \in \mathcal{K}$. Но $\mathcal{K} = \mathcal{L} \cap \partial\Delta_J$. Есть два варианта:

(1) $\{i, j\} \in \mathcal{L}$. Тогда $\{i\}, \{j\} \in \mathcal{L}$, то есть $i \in V$. Противоречие с $i \in I \setminus V$.
(2) $\{i, j\} \in \partial\Delta_J$. Тогда $j \in J$, противоречие с $j \in I \setminus J$.

Мы доказали, что $I \subset J$. Так как $\partial\Delta_J \subset \mathcal{K}$ и $I \notin \mathcal{K}$, имеем $I = J$. Значит, $I \in \mathrm{MF}(\mathcal{K})$. Но $I \notin \mathrm{MF}_{\ge 3}(\mathcal{K})$; следовательно, $I \in \mathrm{MF}_2(\mathcal{K})$. Противоречие с $I \in \mathcal{K}^f$. □

7. Более сложные примеры

Теорема 1.2 даёт копредставление, в котором множество образующих разбито на три типа, а множество соотношений – на четыре. Точное количество и явное описание образующих третьего типа и соотношений третьего типа неизвестно. Приведём примеры таких образующих и соотношений.

7.1. **Образующие третьего типа.** Известные примеры неразложимых элементов в алгебре $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) = H_*(\Omega \mathrm{DJ}(\mathcal{K}); \mathbf{k})$, не имеющих вид u_i или w_J, связаны с (итерированными) высшими произведениями Уайтхеда в $\pi_*(\mathrm{DJ}(\mathcal{K}))$, см. [Abramyan–Panov19], [Zhuravleva22]. Они строятся по следующей схеме. Имеем гомотопическое расслоение [Buchstaber–Panov15, Theorem 4.3.2]

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} \to \mathrm{DJ}(\mathcal{K}) \xrightarrow{p} (\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^m,$$

где $\mathcal{Z}_\mathcal{K} := \bigcup_{I\in\mathcal{K}} (D^2)^I \times (S^1)^{[m]\setminus I} \subset (D^2)^m$ – *момент-угол комплекс*, играющий важную роль в торической топологии. Из точной последовательности гомотопических групп, отображение $\pi_n(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \to \pi_n(\mathrm{DJ}(\mathcal{K}))$ – изоморфизм при $n \ge 3$. Кроме того, отображение Ωp имеет гомотопическое сечение [Panov–Ray08], поэтому гомоморфизм $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}; \mathbf{k}) \to H_*(\Omega \mathrm{DJ}(\mathcal{K}); \mathbf{k})$ инъективен.

Пусть теперь элемент $\alpha \in \pi_n(\mathrm{DJ}(\mathcal{K})) \cong \pi_n(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ имеет ненулевой образ в $H_n(\mathcal{Z}_\mathcal{K}; \mathbf{k})$ под действием гомоморфизма Гуревича $\pi_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \to H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}; \mathbf{k})$. Этот гомоморфизм раскладывается в композицию $\pi_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \pi_{*-1}(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \to H_{*-1}(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}; \mathbf{k}) \to H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}; \mathbf{k})$; следовательно, образ элемента α в $H_{n-1}(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}; \mathbf{k})$ заведомо ненулевой. Получаем ненулевой элемент в $H_{n-1}(\Omega \mathrm{DJ}(\mathcal{K}); \mathbf{k}) \cong$

$\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$. Если этот элемент неразложим (например, из соображений мультиградуировки), то его можно взять в качестве одной из образующих алгебры $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$.

В качестве таких $\alpha \in \pi_*(\mathrm{DJ}(\mathcal{K}))$ можно брать *канонические высшие произведения Уайтхеда* элементов $u_1, \dots, u_m \in \pi_2(\mathrm{DJ}(\mathcal{K}))$. (Определение канонических высших произведений и описание их образов в $H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ см. в работе Абрамяна и Панова [Abramyan–Panov19].) Например, в случае

$$\mathcal{K} = (\partial\Delta_{12} * \partial\Delta_{345}) \cup \{\{1,2\}\}$$

определено высшее произведение Уайтхеда $\alpha \in [u_1, u_2, [u_3, u_4, u_5]] \in \pi_8(\mathrm{DJ}(\mathcal{K}))$, которому соответствует неразложимый элемент $x \in \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-3,2[5]}$. Этот пример детально разобран в [Abramyan19, Example 5.4]. Журавлёва анонсировала без доказательства следующее копредставление алгебры $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$, полученное методами [Zhuravleva22]:

$$\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) = T(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, w_{123}, w_{124}, w_{125}, w_{345}, x)/R,$$

где идеал R порожден соотношениями

(7.1) $\quad u_i^2 = 0,\ 1 \le i \le 5;\ [u_i, u_j] = 0,\ 1 \le i \le j \le 5;\ [u_i, w_J] = 0,\ i \in J \in \{123, 124, 125, 345\};$

(7.2)
$[u_4, w_{123}] = [u_5, w_{123}] = [u_2, w_{145}] + [u_1, w_{245}] = [u_3, w_{145}] + [u_1, w_{345}] = [u_3, w_{245}] + [u_2, w_{345}] = 0;$

(7.3) $[x, u_1] = -[w_{123}, w_{145}],\ [x, u_2] = -[w_{123}, w_{245}],\ [x, u_3] = -[w_{123}, w_{345}],\ [x, u_4] = [x, u_5] = 0.$

Этот набор образующих и соотношений находится в полном соответствии с теоремой 1.2. Соотношения первого и второго типа перечислены в (7.1). Каждое из пяти соотношений третьего типа (7.2) можно получить из предложения 3.9. Элемент $x \in \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-3,2[5]}$ – единственная образующая третьего типа. Ей соответствует пять соотношений четвёртого типа (7.3) вида $[x, u_i] = \dots$. Тем не менее, наши методы не позволяют вычислить правые части соотношений четвёртого типа и доказать, что другие образующие и соотношения третьего типа отсутствуют.

В то же время не все образующие третьего типа порождаются образами канонических высших произведений Уайтхеда, см. [Abramyan19, Section 7]. Простейший пример – комплекс Абрамяна $\mathcal{K} = (\partial\Delta_{123} * \partial\Delta_{456}) \cup \{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}$.

7.2. **Соотношения третьего типа.** Как видно из предложения 3.9, нетривиальные соотношения степеней вида $(-n, 2J)$, где $3 \le n < |J|$, $J \in \mathcal{K}^f \setminus \mathcal{K}$, возникают уже для совсем простых симплициальных комплексов:

- Если $\mathcal{K} \supset \partial^2\Delta_J$, $\mathcal{K} \not\supset \partial\Delta_J$, то имеем $\sum_{i \in J:\ J\setminus i \notin \mathcal{K}} [u_i, w_{J\setminus i}] = 0$.
- В частности, если $\mathcal{K} \supset \{i\} * \partial\Delta_J$, $J \notin \mathcal{K}$, то имеем $[u_i, w_J] = 0$.

Возможны и более сложные соотношения. Например, если симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ содержит джойн двух меньших симплициальных комплексов $\mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_2$, то для любых $x_1 \in \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{L}_1])$, $x_2 \in \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{L}_2])$ верно $[x_1, x_2] = 0 \in \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$. Если x_1, x_2 неразложимы, то это тождество. В ряде случаев это тождество задаёт нетривиальное соотношение в минимальном копредставлении алгебры $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$. Если элементы x_i были образующими третьего типа, то соотношение имеет степень вида $(-n, 2J)$, где $n \ge 6$.

8. Открытые вопросы

Часть использованных методов работает для произвольного кольца коэффициентов, так как в основном рассматривались свободные $\mathbf{k}$-модули конечного типа. Другие результаты (например, предложение 4.2) существенно используют минимальные резольвенты и верны только в случае коэффициентов в поле. Тем не менее, некоторую информацию можно получить и в случае колец главных идеалов, см. [Vylegzhanin22, Proposition 2.5].

Проблема 8.1. *Какие из полученных результатов переносятся на случай $\mathbf{k} = \mathbb{Z}$? На случай колец главных идеалов?*

Проблема 8.2. *Есть ли кручение в кольце* $\mathrm{E}(\mathbb{Z}[\mathcal{K}]) = \mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}[\mathcal{K}]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$?

В предложении 3.9 мы построили гомоморфизм из явно заданной алгебры $EQ(\mathcal{K};\mathbf{k})$ в Ext-алгебру $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$. Как следует из теорем 3.6 и 3.11, он сюръективен при $\mathcal{K} \in \mathbf{k}\widehat{HMF}$ и биективен для почти флаговых комплексов $\mathcal{K}$.

Проблема 8.3. *Описать необходимые и достаточные условия на комплекс $\mathcal{K}$, при которых гомоморфизм $EQ(\mathcal{K};\mathbf{k}) \to \mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$*

a) *сюръективен (т.е. алгебра $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ порождается множеством $\{u_1,\ldots,u_m\} \sqcup \{w_J : J \in \mathrm{MF}_{\geq 3}(\mathcal{K})\}$);*
b) *биективен.*

Проблема 8.4. *Описать необходимые и достаточные условия на комплекс $\mathcal{K}$, при которых алгебра $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ является K_n-алгеброй, то есть порождается градуированными компонентами $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])_{-i,*}$ при $i = 1,\ldots,n$.*

Заметим, что алгебра $EQ(\mathcal{K};\mathbf{k})$ квадратична.

Проблема 8.5. *Является ли $EQ(\mathcal{K};\mathbf{k})$ кошулевой алгеброй?*

Во всех известных примерах алгебра $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ задаётся квадратичными соотношениями на образующие (даже в тех случаях, когда она сильно отличается от $EQ(\mathcal{K};\mathbf{k})$, см. раздел 7). Мы ожидаем, что в общем случае это неверно.

Проблема 8.6. *Построить симплициальный комплекс $\mathcal{K}$, для которого алгебра $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ не квадратична.*

Разложение алгебры $\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ в копредел $\mathrm{colim}_{I\in\mathcal{K}^f}\,\mathrm{E}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_I])$ – неожиданное следствие из технического вычисления (теоремы 5.10). Хотелось бы лучше понять, “почему этот результат верен”.

Проблема 8.7. *Найти концептуальное доказательство предложения 1.1.*

Список литературы

[Abramyan19] S. A. Abramyan. Iterated higher Whitehead products in topology of moment-angle complexes. Siberian Math. J 60, 185-196 (2019). 23

[Abramyan–Panov19] S. A. Abramyan and T. E. Panov. Higher Whitehead products in moment-angle complexes and substitution of simplicial complexes. Proc. Steklov Inst. Math. 305, 1-21 (2019). 22, 23

[Avramov98] L. Avramov. Infinite free resolutions. In: *Six lectures on commutative algebra*, J. Elias ..., eds. Progress in Mathematics, Vol. 166. Springer Basel AG, 1998. 1, 18

[Backelin82] J. Backelin. Les anneaux locaux à relations monomiales ont des séries de Poincaré-Betti rationnelles. Comptes rendus Acad. Sc. Paris, 295, Série I, 1982, 607-610. 1

[Backelin–Roos83] J. Backelin and J.-E. Roos. When is the double Yoneda Ext-algebra of a local noetherian ring again noetherian? In: *Algebra, Algebraic Topology and their interactions*, J.-E. Roos, eds. Lecture Notes in Mathematics, 1183, Springer, Berlin, Heidelberg. 1, 16

[Berglund05] A. Berglund. Poincaré series and homotopy Lie algebras of monomial rings (PhD thesis). Research Reports in Mathematics, No. 6, 2005. Department of Mathematics, Stockholm University. 1

[Berglund06] A. Berglund. Poincaré series of monomial rings. J. Algebra 295 (2006), 1, 211-230. 1

[Buchstaber–Panov15] V. M. Buchstaber and T. E. Panov. *Toric topology*, volume 204 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015. 1, 3, 4, 14, 21, 22

[Cartan–Eilenberg56] H. Cartan and S. Eilenberg. Homological Algebra. Princeton Univ. Press, Princeton, 1956.

[Cassidy–Shelton09] T. Cassidy and B. Shelton. Generalizing the notion of Koszul algebra. Math. Z. 260 (1) (2008),z 93-114. 7, 20

[Conner–Shelton12] A. Conner and B. Shelton. K_2 factors of Koszul algebras and applications to face rings. J. Algebra 368 (2012), 251-270. 2, 7, 20, 21

[Dobrinskaya09] N. Dobrinskaya. Moment-angle complexes, Golodness and sequentially Cohen-Macaulay property. Preprint (2009). http://www.few.vu.nl/~ndobrin/momentangleCM.pdf https://citeseerx.ist.psu.edu/doc/10.1.1.157.4477 2, 4, 7

[Duval96] A. M. Duval. Algebraic shifting and sequentially Cohen-Macaulay simplicial complexes. Electron J. Combin. 3 (1996), no. 1, Research Paper 21 (14 pages). 4

[Erokhovets19] N. Yu. Erokhovets. Three-dimensional right-angled polytopes of finite volume in the Lobachevsky space: combinatorics and constructions. Proc. Steklov. Inst. Math. 305, 78-134 (2019). 6

[Fröberg75] R. Fröberg. Determination of a class of Poincaré series. Math. Scand. 37 (1975), no. 1, 29-39. 13

[Fröberg97] R. Fröberg. *Koszul algebras*, in “Advances in Commutative Ring Theory”, Proc. Fez Conf. 1997. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 205, Dekker Eds., 1999. 1, 13, 20

[Grbić–Theriault16] J. Grbić and S. Theriault. Homotopy theory in toric topology. Russian Math. Surveys, 71(2), 185-251 (2016). 2, 6, 22

[Lemaire74] J.-M. Lemaire. Algèbres connexes et homologie des espaces de lacets. Lecture Notes in Mathematics, 422, 1974, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York. 1, 18, 19

[Löfwall86] C. Löfwall. On the subalgebra generated by the one-dimensional elements in the Yoneda Ext-algebra. In: *Algebra, Algebraic Topology and their Interactions*, J.-E. Roos, eds. Lecture Notes in Mathematics, 1183, Springer, Berlin, Heidelberg. 13

[Panov–Ray08] T. Panov and N. Ray. Categorical aspects of toric topology. In: *Toric Topology*, M. Harada et al., eds. Contemp. Math., vol. 460. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 293–322. 1, 14, 22

[Polischuk–Positselski05] A. Polishchuk and L. Positselski. *Quadratic algebras*. University Lecture Series, vol. 37, 2005. AMS, Providence, R.I. 1, 13

[Priddy70] S. B. Priddy. Koszul resolutions. Trans. of the AMS 152 (1970), 39-60. 1, 8, 13

[Stanley96] R. P. Stanley. *Combinatorics and commutative algebra*. Second edition. Progress in Mathematics, Vol. 41. Birkhäuser, Boston, 1996. 1, 4

[Vylegzhanin22] F. E. Vylegzhanin. Pontryagin algebras and the LS-category of moment-angle complexes in the flag case. Proc. Steklov Inst. Math. 317, 55-77 (2022). 1, 5, 13, 14, 23

[Wall60] C. T. C. Wall. Generators and relations for the Steenrod algebra. Ann. of Math. Vol. 72, 3 (1960), 429-444. 1, 9

[Zhuravleva22] E. Zhuravleva. Adams–Hilton models and higher Whitehead brackets for polyhedral products. Proc. Steklov Inst. Math. 317, 94-116 (2022). 22, 23