

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА»**

**Механико-математический факультет
Кафедра высшей геометрии и топологии**

Курсовая работа
специалиста

**Момент-угол комплексы, соответствующие
симплициальным частично упорядоченным множествам**

Выполнил студент 341 группы
Водолеев Марк Дмитриевич
подпись студента

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н.
Панов Тарас Евгеньевич
подпись научного руководителя

**МОСКВА
2022**

Содержание

1	Основные определения	6
2	Кольца граней (Стенли-Райснера) симплициального частично упорядоченного множества	8
3	Момент-угол комплексы и их свойства	9

Введение

Момент-угол комплексами называются клеточные пространства, строящиеся по некоторому заданному симплициальному комплексу как объединение произведений дисков D^2 и окружностей S^1 . Данные пространства возникают в различных задачах алгебраической геометрии, комбинаторной топологии и симплектической геометрии. Конструкция момент-угол комплекса может быть обобщена для симплициальных частичных упорядоченных множеств и соответствующих им в топологии симплициальных клеточных комплексов, которые являются двойственными объектами к регулярным многообразиям с углами, которые играют важную роль в торической топологии. Для симплициально клеточных комплексов, как и для симплициальных комплексов, можно определить кольца граней (или кольца Стенли-Райснера), позволяющие использовать аппарат коммутативной и гомологической алгебры для изучения данных комбинаторных структур. Теория симплициально клеточных комплексов и соответствующих им момент-угол комплексов предоставляет более широкий контекст для изучения связей между коммутативной алгеброй и действиями тора.

1 Основные определения

Определение 1.1. Абстрактным симплициальным комплексом на множестве \mathcal{V} называется набор подмножеств называется набор подмножеств $\mathcal{K} \subset 2^{\mathcal{V}}$, для которого выполняется следующее условие: если $I \in \mathcal{K}$, то и любое подмножество $J \subset I$ принадлежит \mathcal{K} . Будем называть $I \in \mathcal{K}$ абстрактным симплексом.

Определение 1.2. Симплициальным частично упорядоченным множеством называется такое множество \mathcal{S} с отношением частичного порядка \leq , что существует минимальный элемент 0 и для любого $\Delta \in \mathcal{S}$ отрезок

$$[0, \Delta] = \{\tau \in \mathcal{S} : 0 \leq \tau \leq \Delta\}$$

изоморфен множеству граней некоторого симплекса. Обозначим множество вершин \mathcal{S} как $V(\mathcal{S})$ и множество вершин, на которые натянут симплекс $\sigma \in \mathcal{S}$ как $V(\sigma)$. Также введем обозначение $|\sigma| = |V(\sigma)|$.

В частности, любой симплициальный комплекс является симплициальным частично упорядоченным множеством. Для любых $\sigma, \tau \in \mathcal{S}$ определим $\sigma \wedge \tau$ как множество наименьших общих верхних граней и $\sigma \vee \tau$ как множество наибольших общих нижних граней. Из определения симплициального частично упорядоченного множества следует, что $\sigma \vee \tau$

состоит из одного элемента тогда и только тогда, когда $\sigma \wedge \tau$ не пусто.

Конструкция 1.3. Сопоставим данному симплициальному частично упорядоченному множеству \mathcal{S} симплициальный комплекс $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}$ следующим образом: множество вершин $V(\mathcal{S})$ остаётся таким же, а его симплексами являются множества $V(\sigma)$, $\sigma \in \mathcal{S}$. Имеем отображение симплициальных частично упорядоченных множеств

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\rightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{S}}, \\ \sigma &\mapsto V(\sigma). \end{aligned}$$

Определение 1.4. Клеточный комплекс X называется симплициальным, если замыкание любой клетки с отношением включения изоморфно множеству граней некоторого симплекса.

Каждому симплициальному частично упорядоченному множеству можно сопоставить симплициальный клеточный комплекс, где приклеивающие отображения являются вложениями.

Построенный таким образом клеточный комплекс называется геометрической реализацией и обозначается $|\mathcal{S}|$.

Джойном симплициальных частично упорядоченных множеств

\mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 называется симплициальное частично упорядоченное множество $\mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2$, состоящее из пар

$$(\sigma, \tau), \sigma \in \mathcal{S}_1, \tau \in \mathcal{S}_2,$$

при этом $(\sigma_1, \tau_1) \leq (\sigma_2, \tau_2)$ в том и только в том случае, когда $\sigma_1 \leq \tau_1$ и $\sigma_2 \leq \tau_2$.

2 Кольца граней (Стенли-Райснера) симплициального частично упорядоченного множества

Рассмотрим градуированное кольцо многочленов

$$k[v_\sigma : \sigma \in \mathcal{S}], \deg v_\sigma = 2|\sigma|.$$

Определение 2.1. Кольцом граней симплициального частично упорядоченного множества называется факторкольцо

$$k[\mathcal{S}] = k[v_\sigma : \sigma \in \mathcal{S}] / \mathcal{I}_{\mathcal{S}},$$

где

$$\mathcal{I}_{\mathcal{S}} = \langle v_0 - 1, v_\sigma v_\tau - v_{\sigma \wedge \tau} \cdot \sum_{\eta \in \sigma \vee \tau} v_\eta \rangle.$$

В общем случае $\sigma \wedge \tau$ может состоять не из одного элемента, но в случае, когда $\sigma \wedge \tau \neq \emptyset$ точная нижняя грань единственна и, следовательно, образующие идеала $\mathcal{I}_{\mathcal{S}}$ определены корректно.

3 Момент-угол комплексы и их свойства

Конструкция 3.1. Рассмотрим категорию $CAT(\mathcal{S})$, объектами которой являются грани $\tau \in \mathcal{S}$, и морфизм из $\sigma \in \mathcal{S}$ в $\tau \in \mathcal{S}$ существует тогда и только тогда, когда $\sigma \leq \tau$.

Обозначим

$$\mathbb{D}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n : \forall i |x_i| \leq 1\}$$

- стандартный полидиск. Каждому элементу $\sigma \in \mathcal{S}$ сопоставим следующее подмножество в стандартном полидиске:

$$(D^2, S^1)^\sigma = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{D}^n : |x_i| = 1 \text{ при } i \notin \sigma.\}$$

Тем самым мы определили функтор

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}}(D^2, S^1) : CAT(\mathcal{S}) \rightarrow TOP,$$

$$\sigma \mapsto (D^2, S^1)^\sigma,$$

сопоставляющий каждому морфизму $\sigma \rightarrow \tau$ вложение

$$(D^2, S^1)^\sigma \hookrightarrow (D^2, S^1)^\tau.$$

Тогда момент-угол комплексом, соответствующим симплициальному частично упорядоченному множеству \mathcal{S} , называется

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{S}} = \text{colim } \mathcal{D}_{\mathcal{S}}(D^2, S^1).$$

Обобщением данной конструкции для произвольной топологической пары (X, A) является полиэдральное произведение $(X, A)^{\mathcal{S}}$, определяемое как

$$(X, A)^{\mathcal{S}} = \text{colim } \mathcal{D}_{\mathcal{S}}(X, A).$$

Теорема 3.2. • $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2} \cong \mathcal{Z}_{\mathcal{S}_1} \times \mathcal{Z}_{\mathcal{S}_2}$.

- факторпространство $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}}/\mathbb{T}^m$ гомеоморфно конусу над $|\mathcal{S}|$.
- если $|\mathcal{S}|$ гомеоморфно сфере S^{m-1} , то $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}_1}$ является многообразием.

Доказательство можно найти в [1].

Конструкция 3.3. Рассмотрим клеточное разбиение \mathbb{D} , состоящее из трёх клеток: одной нульмерной - точки на границе, одной одномерной - границы без нульмерной клетки, и одной двумерной - внутренности диска. Будем обозначать как T и D одномерные и двумерные клетки соответственно. Таким образом мы получаем клеточное разбиение полидиска \mathbb{D}^m . Заметим, что тогда $(D^2, S^1)^{\sigma}$ будут клеточными подкомплексами в \mathbb{D}^m и вложения

$$(D^2, S^1)^{\sigma} \hookrightarrow (D^2, S^1)^{\tau}$$

будут клеточными отображениями. Получаем, что данное разбиение порождает естественную клеточную структуру на момент-угол комплексе $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}}$.

Построенное клеточное разбиение помогает вычислить кольца когомологий момент-угол комплексов. На кольце граней $\mathbb{Z}[S]$ можно ввести структуру \mathbb{Z}^m -градуированного $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$ -модуля. При этом

$$\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1, v_2, \dots, v_n]}(\mathbb{Z}[S], \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{i \geq 0, a \in \mathbb{N}^m} \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1, v_2, \dots, v_n]}^{-i, 2a}(\mathbb{Z}[S], \mathbb{Z}).$$

Теорема 3.4. *Имеется изоморфизм градуированных колец*

$$H^*(\mathcal{Z}_S) \cong \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1, v_2, \dots, v_n]}(\mathbb{Z}[S], \mathbb{Z}),$$

при этом

$$H^p(\mathcal{Z}_S) \cong \bigoplus_{-i+2|a|=p} \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1, v_2, \dots, v_n]}^{-i, 2a}(\mathbb{Z}[S], \mathbb{Z}).$$

Здесь

$$|a| = \sum_{(i=1)}^m a_i \text{ при } a = (a_1, \dots, a_m).$$

Доказательство этой теоремы также можно найти в [1].

Заключение

В работе рассмотрены основные конструкции и результаты, относящиеся к теории симплициальных частично упорядоченных множеств, симплициально клеточных комплексов и соответствующих им момент-угол комплексов. В качестве направлений для дальнейшего изучения можно выделить изучение представлений

момент-угол комплексов пересечениями Эрмитовых квадрик в \mathbb{C}^m , возникающих в голоморфной динамике, а также более подробное изучение гомотопической теории полиэдральных произведений.

Список литературы

- [1] Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov. Toric Topology. Mathematical Surveys and Monographs, vol.204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015(518 стр.)
- [2] В.М.Бухштабер, Т.Е.Панов. Торические действия в топологии и комбинаторике. Издательство МЦНМО, Москва, 2004 (272 стр.)
- [3] Zhi Lu and Taras Panov. Moment-angle complexes from simplicial posets. Cent. Eur. J. Math. 9 (2011), no. 4, 715–730.
- [4] Victor M. Buchstaber and Taras Panov. Algebraic topology of manifolds defined by simple polyhedra. Uspehi Mat. Nauk 53 (1998), no.3, 195–196 (Russian); Russian Math. Surveys 53 (1998), no. 3, 623–625 (English translation).
- [5] Victor M. Buchstaber and Taras Panov. Torus actions and the combinatorics of polytopes. Trudy Mat. Inst. Steklova 225 (1999), 96–131 (Russian); Proc. Steklov Inst. Math. 225 (1999), 87–120 (English translation).