ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

# Компактификации пространств модулей рациональных кривых и торические многообразия

Выполнил студент
603 группы
Витковский Андрей Владиславович

_______________________________
подпись студента

Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Панов Тарас Евгеньевич

_______________________________
подпись научного руководителя

Москва

2025 г.

# 1 Введение

Пространства модулей $\overline{M_{0,n}}$, в отличие от пространств модулей кривых положительного рода, являются гладким многообразием.

Реализовав всякую рациональную кривую с $n$ отмеченными точками как кривую в проективном пространстве размерности $n-2$, проходящую через фиксированный набор из $n$ точек в общем положении, компактифицировать пространство модулей можно просто добавлением точек, соответствующих вырождениям кривых Веронезе.

При подобной компактификации кольцо когомологий по Килю $H^*(\overline{M_{0,n}})$ порождается образующими $[D]$, которые соответствуют некоторому неупорядоченному разбиению множества индексов отмеченных точек, по модулю аддитивных соотношений $R_{ijkl}$ и мультипликативных соотношений $[D][D^{'}] = 0$ для любых несовместимых разбиений $D$ и $D^{'}$.

Построенное таким образом кольцо когомологий очень похоже на кольцо когомологий торического многообразия.

$\overline{M_{0,5}}$ получается из $\overline{M_{0,4}}$ раздутием в трех точках $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$.

Таким образом, геометрически $\overline{M_{0,5}}$ гомеоморфно связной сумме $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2} \# \overline{\mathbb{CP}^2} \# \overline{\mathbb{CP}^2} \# \overline{\mathbb{CP}^2}$.

Раздутию в трех точках $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ соответствует семиугольник, по нормальному вееру которого можно также посчитать кольцо когомологий.

Между кольцом когомологий по Килю, кольцом когомологий по вееру семиугольника и кольцом когомологий связной суммы есть явный изоморфизм.

Последующие пространства модулей для $n > 5$ получаются последовательными раздутиями предыдущего вдоль подмногообразий коразмерности 2.

Возникает вопрос, будут ли $\overline{M_{0,n}}$ торическими и дальше.

На примере $n = 6$ выдвигается гипотеза, что уже на $\overline{M_{0,6}}$ хорошего действия тора не может быть.

# 2 Аксиоматическое определение пространства модулей

**Определение 0.1.** Грубым пространством модулей кривых рода $g$ будем называть тройку $(\mathfrak{C}_{g,0}, M_{g,0}, \pi : \mathfrak{C}_{g,0} \to M_{g,0})$, которая состоит из двух комплексных орбифолдов и отображения из первого во второй, такая что: (1) каждый слой $\pi^{-1}(b), b \in M_{g,0}$ - результат факторизации гладкой комплексной кривой рода $g$ по группе ее автоморфизмов, (2) каждая кривая рода $g$ встречается в качестве слоя этого отображения в точности один раз, (3) для каждого голоморфного семейства $p : E \to B$, слои которого - результаты факторизации гладких комплексных кривых рода $g$ по группам их автоморфизмов, существуют голоморфные отображения $E \to \mathfrak{C}_{g,0}$ и $B \to M_{g,0}$, где первое отображение - послойный изоморфизм, образующие с проекциями $\pi$ и $p$ коммутативный квадрат.

Если же у нас есть отмеченные точки, то в тройку следует добавить набор из $n$ сечений $\sigma_i : M_{g,n} \to \mathfrak{C}_{g,n}$, отвечающих отмеченным точкам, а точнее, отмеченная точка $x_i$ в слое $\pi^{-1}(b)$ - это значение $\sigma_i(b)$ сечения $\sigma_i$ в точке $b$.

Таким образом, мы добились того, что точки пространства модулей взаимно однозначно соответствуют классам биголоморфной эквивалентности комплексных кривых, а на всем пространстве получили топологию и комплексную структуру.

## 3 Индуктивное построение пространства модулей

Фиксируем на $\mathbb{CP}^1$ координату и берем $M_{0,n} \times \mathbb{CP}^1$. В каждом одномерном слое проекции на первый сомножитель выкалываем $x_1, \dots, x_n$, при этом допустим, что координаты первых трех точек равны соответственно $\infty, 0, 1$. Тогда координаты остальных точек однозначно определяются классом проективной эквивалентности всех точек.
$n$ отмеченных точек задают $n$ сечений прямого произведения

$$\sigma_i : M_{0,n} \to M_{0,n} \times \mathbb{CP}^1.$$

Дополнения к сечениям естественно изоморфно пространству $M_{0,n+1}$.

## 4 Компактификация Делиня-Мамфорда пространства модулей рациональных кривых

Зададим кривую как образ вложения, а именно отобразим проективную прямую в проективное пространство $\mathbb{CP}^{n-2}$:

$$(t_0 : t_1) \mapsto (t_0^{n-2} : t_0^{n-2} t_1 : t_0^{n-3} t_1^2 : \dots : t_1^{n-2})$$

Степень кривой равна $n-2$, а отображение называется отображением Веронезе. Образы любых $n$ различных точек на проективной прямой находятся в общем положении. Кривыми Веронезе или рациональными нормальными кривыми называем результаты проективных преобразований образа отображения.

**Теорема 0.2.** *Семейство кривых Веронезе, проходящих через точки $x_1, \dots, x_n$ в общем положении в $\mathbb{CP}^{n-2}$, изоморфно пространству модулей $M_{0,n}$.*

Доказательство можно найти в [2, стр.207]

Попробуем компактифицировать полученное такие образом пространство.

**Пример 0.3.** ($\overline{M_{0,4}}$) Пусть $n = 4$. Возьмем все плоские коники (включая особые), проходящие через эти четыре точки. Особых коник три, все они представляют собой пару прямых, попарно соединяющих точки. Мы получили замыкание $M_{0,4}$ в виде проективной прямой в пространстве однородных форм степени 2 на плоскости. Прямая состоит из форм, зануляющихся на каждой из $x_1, x_2, x_3, x_4$. Это и назовем $\overline{M_{0,4}}$.

Назовем неприводимыми компонентами особой кривой конечный набор рациональных кривых, некоторые из которых попарно пересекаются.
Особой кривой можно сопоставить модулярный граф, вершины которого соответствуют неприводимым компонентам, а ребра отвечают их пересечению.
Если граф оказался деревом, то набор кривых назовем рациональной нодальной кривой.

**Определение 0.4.** Рациональная нодальная кривая с $n$ отмеченными точками называется модулярно стабильной, если (1) ни одна из отмеченных точек не лежит в пересечении неприводимых компонент кривых и (2) группа автоморфизмов кривой конечна.

Условие (2) эквивалентно тому, что на каждой неприводимой компоненте есть хотя бы три специальные точки, будь то отмеченные или точки пересечения.

**Пример 0.5.** ($\overline{M_{0,5}}$) Рассмотрим компактификацию $M_{0,5}$. Через первые две точки $x_1, x_2$ проведем прямую. Она пересечет плоскость, проходящую через $x_3, x_4, x_5$ в точке, отличной от исходных отмеченных. Для построения особой кривой осталось провести конику через точку пересечения и $x_3, x_4, x_5$.

**Теорема 0.6.** *Каждая стабильная рациональная кривая с $n$ отмеченными точками единственным образом реализуется как модулярно стабильная кривая, проходящая через набор точек $x_1, \ldots, x_n$ в общем положении в $\mathbb{CP}^{n-2}$.*

Доказательство можно найти в [2, стр.209-210]

Описанная компактификация называется компактификацией Деліня-Мамфорда.

# 5 Про многочлены Пуанкаре

Многочлен Пуанкаре компактного топологического пространства –

$$P_X(t) = b_d t^d + \ldots + b_0,$$

где $b_i$ - $i$-е число Бетти пространства $X$, $d = dimX$.

$$P_{\mathbb{CP}^1}(t) = t^2 + 1$$

Можно определить **мотивный многочлен** Пуанкаре разности двух компактных алгебраических многообразий:

$$P_X(t) = P_{X_1}(t) - P_{X_2}(t), \quad X = X_1 \setminus X_2$$

Данное определение корректно - любые два представления пространства $X$ в виде разности компактных алгебраических многообразий приводят к одному и тому же мотивному многочлену Пуанкаре.

Многочлен Пуанкаре естественно ведет себя относительно прямого произведения:

$$P_{\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1}(t) = (1 + t^2)^2$$

При индуктивном построении пространства модулей мы получали отображение забывания $\pi : M_{0,n+1} \to M_{0,n}$, расслаивающее пространство модулей над предыдущим. Каждый слой отображения - рациональная кривая с $n$ проколами, поэтому мы можем посчитать

$$P_{M_{0,n}}(t) = (t^2-2)(t^2-3)\dots(t^2-n+3)$$

как произведение многочленов Пуанкаре слоя и базы.

**Пример 0.7.** Посчитаем многочлен Пуанкаре для $\overline{M_{0,5}}$:

$\overline{M_{0,5}}$ является непересекающимся объединением пространства модулей гладких кривых $M_{0,5}$, десяти пространств модулей стабильных кривых с одной особой точкой $M_{0,3}\times M_{0,4}$ и пятнадцати пространств модулей стабильных кривых с двумя особыми точками $M_{0,3}\times M_{0,3}\times M_{0,3}$. Многочлен Пуанкаре же выглядит как

$$P_{\overline{M_{0,5}}} = P_{M_{0,5}} + 10P_{M_{0,3}}P_{M_{0,4}} + 15P^3_{M_{0,3}} = (t^2-2)(t^2-3) + 10(t^2-2) + 15 = t^4+5t^2+1.$$

**Пример 0.8.** Аналогично можно посчитать многочлен Пуанкаре для $\overline{M_{0,6}}$:

$\overline{M_{0,6}}$ является непересекающимся объединением пространства модулей гладких кривых $M_{0,6}$, пятнадцати пространств модулей стабильных кривых с одной особой точкой вида $M_{0,3}\times M_{0,5}$, десяти пространств модулей стабильных кривых с одной особой точкой вида $M_{0,4}\times M_{0,4}$, ста пяти пространств модулей стабильных кривых с двумя особыми точками вида $M_{0,3}\times M_{0,3}\times M_{0,4}$ и ста пяти пространств модулей стабильных кривых с тремя особыми точками $M_{0,3}\times M_{0,3}\times M_{0,3}\times M_{0,3}$.

$$P_{\overline{M_{0,6}}} = P_{M_{0,6}} + 15P_{M_{0,3}}P_{M_{0,5}} + 10P^2_{M_{0,4}} + 105P^2_{M_{0,3}}P_{M_{0,4}} + 105P^4_{M_{0,3}} = t^6+16t^4+16t^2+1.$$

## 6 Явная конструкция пространства $\overline{M_{0,5}}$

Возьмем $\overline{M_{0,4}}\times\mathbb{CP}^1$. Зафиксируем на прямой координату, в которой координаты первых трех отмеченных точек равны $\infty, 0, 1$. Получим три попарно непересекающихся структурных сечения $\sigma_i : \overline{M_{0,4}} \to \overline{M_{0,4}}\times\mathbb{CP}^1, i = 1,2,3$. Тогда четвертое сечение, отвечающее $x_4$, пересекает каждое из первых трех трансверсально в точке. Если теперь раздуть на поверхности $\overline{M_{0,4}}\times\mathbb{CP}^1$ каждую их трех точек пересечения, мы получим в точности $\overline{M_{0,5}}$: после вклейки трех двумерных циклов многочлен Пуанкаре из $1+2t^2+t^4$ превращается в $1+5t^2+t^4$, что согласуется с многочленом Пуанкаре пространства модулей $\overline{M_{0,5}}$, а в геометрическом представлении $\overline{M_{0,5}}$ оказывается как раз разбито на ранее установленные части, т.е. пространство $M_{0,5}$ как дополнение к четырем сечениям; десять экземпляров пространства $M_{0,3}\times M_{0,4}$ как четыре сечения и три проколотых особых слоя проекции раздутой поверхности на множитель $\overline{M_{0,4}}$, каждый из которых есть объединение двух проколотых прямых; и пятнадцать точек попарного пересечения замыканий этих десяти проколотых прямых.

# 7 Кольцо когомологий по Килю пространства $\overline{M_{0,n}}$

Пусть $D = A \sqcup B$ - неупорядоченное разбиение множества индексов отмеченных точек $1, 2, \ldots, n$ на два непересекающихся подмножества, причем в каждом есть хотя бы два элемента. Стабильные рациональные кривые, состоящие из двух неприводимых компонент, расположение точек на которых соответствует разбиению $D$, образуют подмногообразие комплексной коразмерности 1 в $\overline{M_{0,n}}$. Его замыкание - гладкое компактное комплексное подмногообразие коразмерности 1, изоморфное прямому произведению многообразий $\overline{M_{0,|A|+1}}$ и $\overline{M_{0,|B|+1}}$. Тогда $[D] \in H^2(\overline{M_{0,n}})$.

**Теорема 0.9.** *Классы $[D]$ порождают кольцо когомологий $H^*(\overline{M_{0,n}})$.*

Однако на $[D]$ есть линейные соотношения $R_{ijkl}$. Чтобы их установить, рассмотрим забывающее отображение $\overline{M_{0,n}} \to \overline{M_{0,4}}$, которое забывает все отмеченные точки, кроме $x_i, x_j, x_k, x_l$, а ставшие ввиду забывания нестабильными компоненты кривой стягивает в точку. Тогда соотношения имеют вид

$$R_{ijkl} : [ij\mathfrak{D}kl] = [ik\mathfrak{D}jl] = [il\mathfrak{D}jk],$$

где $[ij\mathfrak{D}kl] \in H^2(\overline{M_{0,n}})$ - сумма тех образующих $D$, в которых индексы $i, j$ и $k, l$ лежат в разных частях разбиения.

Также будем говорить, что

$$[D][D^{'}] = 0,$$

если $D$ и $D^{'}$ - два несовместимых разбиения, то есть не допускающих разбиения на три попарно не пересекающихся подмножества $A, B, C$, таких что

$$D = (A \sqcup B) \sqcup C,\ D^{'} = A \sqcup (B \sqcup C),$$

**Теорема 0.10.** *Кольцо когомологий $H^*(\overline{M_{0,n}})$ порождено образующими $[D]$ по модулю аддитивных соотношений $R_{ijkl}$ и мультипликативных соотношений $[D][D^{'}] = 0$ для любых несовместимых разбиений $D$ и $D^{'}$.*

Доказательство этого факта сводится к построению отображения $\pi_1 : \overline{M_{0,n+1}} \to \overline{M_{0,n}} \times \overline{M_{0,4}}$ как композиции последовательных раздутий вдоль объдинения всех подмногообразий, отвечающих упорядоченным разбиениям $D = A \sqcup B$, часть $B$ которых состоит из последовательно $k = 2, 3, \ldots, n-2$ элементов.

## 8 Кольцо когомологий $\overline{M_{0,5}}$

В качестве примера посчитаем кольцо когомологий пространства $\overline{M_{0,5}}$.

Обозначим десять образующих

$$[12|345], [13|245], [14|235], [15|234], [23|145], [24|135], [25|134], [34|125], [35|124], [45|123]$$

через

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, k$$

соответственно.
Тогда линейные соотношения будут иметь вид

$$\begin{gathered} a+h=b+f=c+e \\ a+i=b+g=d+e \\ a+k=c+g=d+f \\ b+k=c+i=d+h \\ e+k=f+i=g+h \end{gathered}$$

что после приведения дает вид

$$\begin{gathered} a=d+g+h-i-k \\ b=d+h-k \\ c=d+h-i \\ e=g+h-k \\ f=g+h-i \end{gathered}$$

На будущее запишем соответствующую приведенную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

где столбцы соответствуют порождающим $a, b, c, e, f, d, g, h, i, k$.

Мультипликативные соотношения можно представить через граф Петерсена (см. Рис. 1).

Тогда кольцо когомологий пространства $\overline{M_{0,5}}$ имеет вид:

$$\begin{gathered} H^*(\overline{M_{0,5}}) = \mathbb{Z}[a,b,c,d,e,f,g,h,i,k]/ \\ (a-d-g-h+i+k, b-d-h+k, c-d-h+i, e-d-h+i, f-g-h+i, \\ ab, ac, ad, ae, af, ag, bc, bd, be, bh, bi, cd, cf, ch, ck, dg, di, dk, ef, eg, eh, ei, fg, fh, fk, gi, gk, hi, hk, ik) \end{gathered}$$

Если подставить линейные соотношения в мультипликативные, получим следующий вид:

$$\begin{gathered} H^*(\overline{M_{0,5}}) = \mathbb{Z}[d,g,i,k,h]/ \\ (dg, di, dk, gi, gk, hi, ik, k^2+gh, i^2+gh, h^2+gh, d^2+dh, g^2+gh, gh-dh) \end{gathered}$$

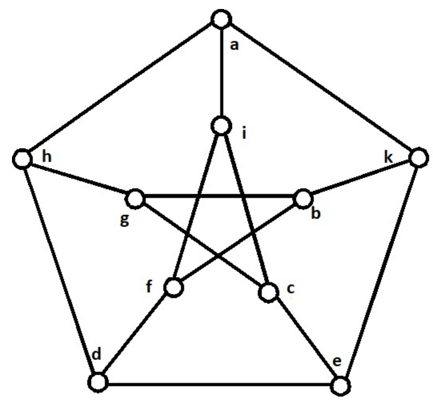


**Рис. 1.** Граф Петерсена; ребрами соединены совместимые разбиения

## 8.1 Связь с торическим многообразием

Заметим, что кольцо когомологий полученного $\overline{M_{0,5}}$ очень напоминает кольцо когомологий торического многообразия, построенного по многограннику.

$M_{0,3}$ соответствует точка, $M_{0,4}$ - отрезок.

Посмотрим на многогранник, соответствующий $\overline{M_{0,5}}$.

По многочлену Пуанкаре восстановим $f$-вектор $(1, 7, 7)$, то есть мы имеем дело с двумерным семиугольником (см. Рис. 2), что неудивительно, так как $\overline{M_{0,5}}$ мы получали раздутием $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ в трех точках, что эквивалентно тому, что мы срезали у квадрата три угла.

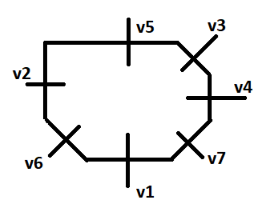


**Рис. 2.** Семиугольник и его нормальный веер

По нормальному вееру полученного семиугольника получим кольцо когомологий:

$$H^*(P) = \mathbb{Z}[v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7]/$$
$$(v_1 - v_2 + v_4 - v_5 + 2v_7, v_3 - v_2 + v_4 - v_6 + v_7,$$
$$v_1v_2, v_1v_5, v_1v_3, v_1v_4, v_6v_5, v_6v_3, v_6v_4, v_6v_7, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_7, v_5v_4, v_5v_7, v_3v_7)$$

Если подставить линейные соотношения в мультипликативные соотношения Стенли-

Райснера и сделать замену $\gamma = v_4 + v_7$, получим следующий вид:

$$
\begin{gathered}
H^*(P) = \mathbb{Z}[v_2, \gamma, v_5, v_6, v_7]/ \\
(v_2^2 + v_2v_5, \gamma^2 + v_2v_5, v_5^2 + v_2v_5, v_6^2 + v_2v_6, \\
v_5v_6, v_6\gamma, v_6v_7, v_2\gamma, v_2v_4, v_5\gamma, v_5v_7, v_7\gamma, v_2v_5 - v_2v_6)
\end{gathered}
$$

**Замечание 0.11.** Можно заметить, что полученное кольцо когомологий имеет абсолютно тот же вид, что и в описании кольца когомологий $\overline{M_{0,5}}$ по Килю:

$$
\begin{gathered}
g \leftrightarrow v_5 \\
h \leftrightarrow v_2 \\
d \leftrightarrow v_6 \\
i \leftrightarrow \gamma \\
k \leftrightarrow v_4
\end{gathered}
$$

При этом $\overline{M_{0,5}}$, как раздутие $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ в трех точках, гомеоморфно торическому многообразию, многогранником которого является вышеуказанный семиугольник.

# 9 Кольцо когомологий $\overline{M_{0,6}}$

В случае $\overline{M_{0,6}}$ число образующих возрастает уже до 25, из них десять имеют вид

$$[ijk|lmn]$$

и пятнадцать имеют вид

$$[ij|klmn]$$

## 9.1 Линейные соотношения $\overline{M_{0,6}}$

Количество линейных соотношений также возрастает,

$$[ij\mathfrak{D}kl] = [ik\mathfrak{D}jl] = [il\mathfrak{D}jk]$$

теперь двойных равенств - 15, то есть суммарно 30 соотношений.

Приводя соответствующую матрицу к ступенчатому виду и домножая некоторые столбцы на 2 для удобства вычислений, имеем:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Обозначим столбцы, соответствующие образующим кольца, последовательно буквами (a, b, c, d, ..., x, y).

Тогда видно, что после факторизации по кольцу линейных соотношений, $j = 0$.

Перепишем в систему:

$$\begin{gathered}
a = -k - l + n + o + q + t - w - x \\
b = -k - +n + o + p + t - u - v \\
c = -k + o + p + q - r - v - x + y \\
d = -k + n + p + q - s - u - w + y \\
e = -l - m + n + o + p + q - r - s \\
f = -l + o + p - s + t - u - x + y \\
g = -l + n + p - r + t - v - w + y \\
h = -m + o + q - s + t - v - w + y \\
i = -m + n + q - r + t - u - x + y
\end{gathered}$$

### 9.2 Мультипликативные соотношения $\overline{M_{0,6}}$

Описать мультипликативные соотношения можно следующим образом:

- во-первых, все разбиения вида $[ijk|lmn]$ попарно не совместимы;
- $[ijk|lmn]$ и $[op|qrst]$ не совместимы, если $o$ и $p$ стоят по разные стороны в $[ijk|lmn]$;
- $[ij|klmn]$ и $[op|qrst]$ не совместимы, если $o$ и $p$ стоят по разные стороны в $[ij|klmn]$.

Выпишем полученные мультипликативные соотношения:

$\cdot\, ab, ac, ad, ae, af, ag, ah, ai, aj, bc, bd, be, bf, bg, bh, bi, bj, cd, ce, cf, cg, ch, ci, cj, de, df, dg, dh, di, dj,$
$ef, eg, eh, ei, ej, fg, fh, fi, fj, gh, gi, gj, hi, hj, ij$

$\cdot\, am, an, ao, aq, ar, as, at, au, av, bl, bn, bo, bp, br, bs, bt, bw, bx$
$cl, cm, co, cp, cq, cs, cu, cw, cy, dl, dm, dn, dp, dq, dr, dv, dx, dy$
$ek, en, eo, ep, eq, eu, ev, ew, ex, fk, fm, fo, fp, fr, ft, fv, fw, fy$
$gk, gm, gn, gp, gs, gt, gu, gx, gy, hk, hl, ho, hq, hr, ht, hu, hx, hy$
$ik, il, in, iq, is, it, iv, iw, iy, jk, jl, jm, jr, js, ju, jv, jw, jx$

$\cdot\, kl, km, kn, ko, kp, kq, kr, ks, lm, ln, lo, lp, lt, lu, lv, mn, mo, mq, mt, mw, mx, no, nr, nu, nw, ny, os, ov, ox, oy,$
$pq, pr, ps, pt, pu, pv, qr, qs, qt, qw, qx, rs, ru, rw, ry, sv, sx, sy, tu, tv, tw, tx, uv, uw, uy, vx, vy, wx, wy, xy$

### 9.3 Связь с торическим многообразием и соотношения третьего типа

По аналогии с $\overline{M_{0,5}}$, из многочлена Пуанкаре

$$t^6 + 16t^4 + 16t^2 + 1$$

вычислим $f$-вектор предполагаемого простого многогранника, а именно

$$f = (1, 19, 51, 34)$$

Итак, трехмерный многогранник должен иметь 19 двумерных граней и 34 вершины.

Для этого можно взять семиугольную призму, соответствующую $\overline{M_{0,5}} \times \mathbb{CP}^1$, и срезать у нее десять ребер, что как раз будет соответствовать раздутию вдоль подмногообразий коразмерности 2.

Однако непонятно, какие ребра следует срезать.

Попробуем придумать нормальный веер, кольцо Стенли-Райснера которого соответствовало хотя бы мультипликативным соотношениям третьего типа в кольце когомологий по Килю.

В веере зафиксируем некоторый вектор $\tilde{j}$. Он соответствует какой-то грани в предполагаемом многограннике. Относительно этой грани диаграмма Шлегеля имеет размерность 2, а псведограф смежности оставшихся вершин должен быть планарным.

Однако, если мы действительно построим псевдограф смежности для мультипликативных соотношений третьего типа, то есть в предполагаемом многограннике соединим ребрами те грани, которые должны пересекаться, то обнаружим, что, например, вершины $k, o, s, u, w, t$ образуют $K_{3,3}$, то есть псевдограф не является планарным (см. Рис 3).

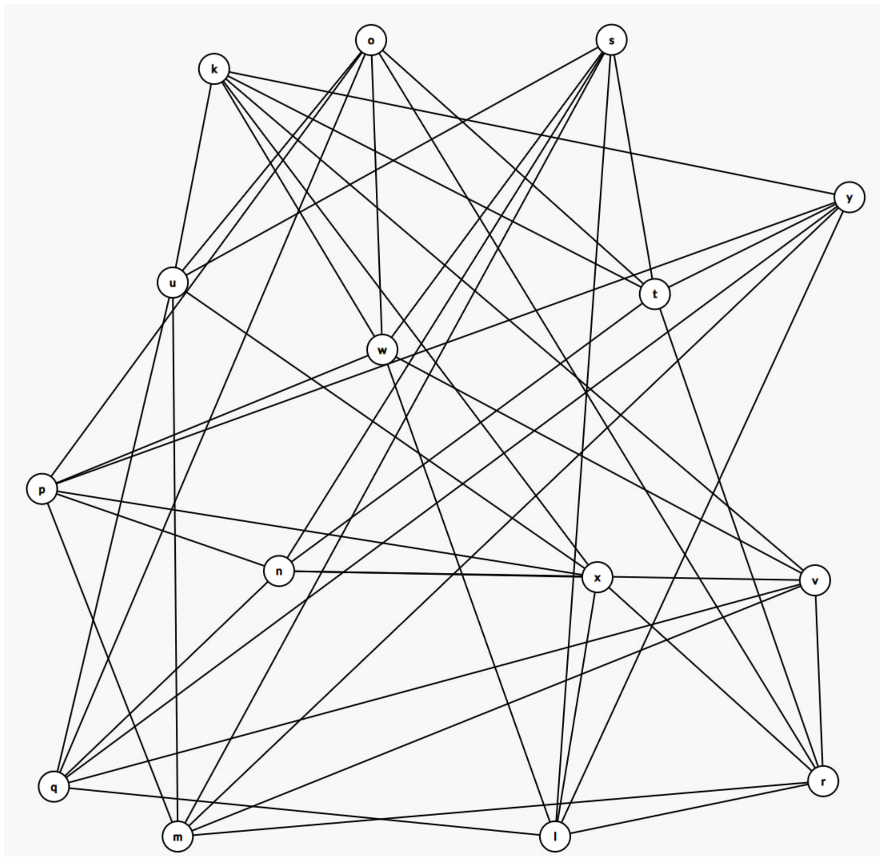


**Рис. 3.** Граф смежности мультипликативных соотношений третьего типа; ребрами соединены вершины, произведение которых предварительно не дает ноль в кольце когомологий по Килю

Данное рассуждение можно, без ограничения общности, провести для любой грани, не обязательно той, которой мы сопоставили $\tilde{j}$.

Таким образом, не существует такой конфигурации, чтобы можно было установить взаимно-однозначное соответствие между образующими по Килю и образующими веера предполагаемого многогранника.

Тогда попробуем построить изоморфизм между кольцом когомологий по Килю и кольцо когомологий по вееру какой-либо, наиболее приближенной к идеальной, конфигурацией.

В качестве подобной возьмем следующую:

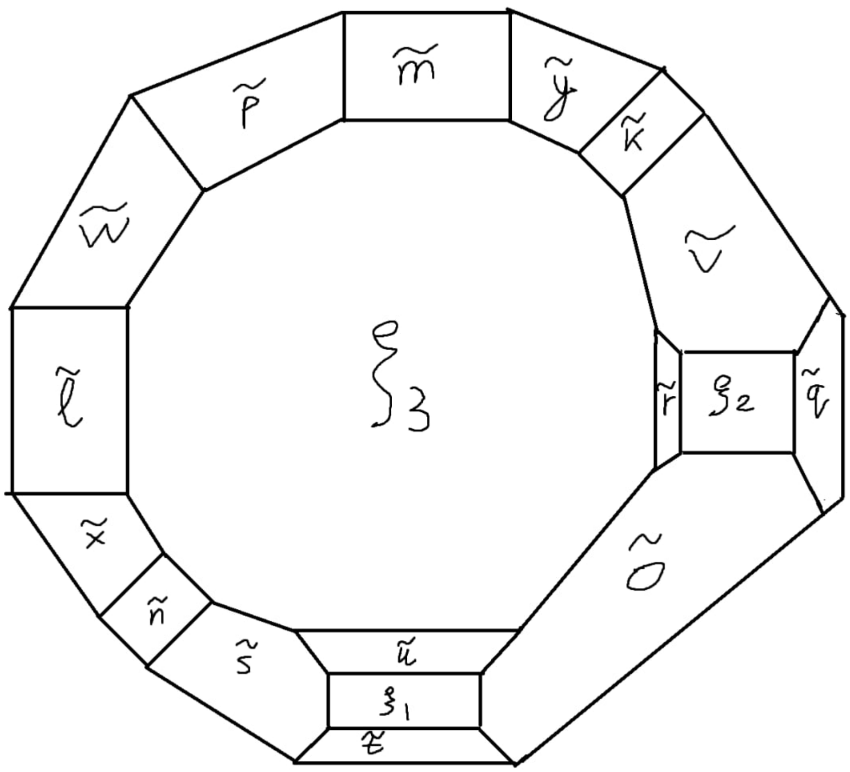


**Рис. 4.** Диаграмма Шлегеля некоторой конфигурации со стороны грани, соответствующей $\tilde{j}$

Характеристическая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xi_1 = -\tilde{k} + \tilde{m} - \tilde{n} - \tilde{o} + 2\tilde{p} - 2\tilde{s} - \tilde{t} - \tilde{u} + \tilde{v} + \tilde{w} - \tilde{x} + 2\tilde{y}$$
$$\xi_2 = -\tilde{k} + \tilde{l} + \tilde{n} - \tilde{o} + \tilde{p} - \tilde{q} - \tilde{r} + \tilde{s} - 2\tilde{v} + 2\tilde{w} + 2\tilde{x} - \tilde{y}$$
$$\xi_3 = \tilde{j} + \tilde{q} - \tilde{r} + \tilde{t} - \tilde{u}$$

Идеал Стенли-Райснера порожден следующими соотношениями

- $\xi_1\xi_2, \xi_1\xi_3, \xi_1\tilde{j}, \xi_1\tilde{r}, \xi_1\tilde{q}, \xi_1\tilde{v}, \xi_1\tilde{k}, \xi_1\tilde{y}, \xi_1\tilde{m}, \xi_1\tilde{p}, \xi_1\tilde{w}, \xi_1\tilde{l}, \xi_1\tilde{x}, \xi_1\tilde{n}$
- $\xi_2\xi_3, \xi_2\tilde{k}, \xi_2\tilde{y}, \xi_2\tilde{m}, \xi_2\tilde{p}, \xi_2\tilde{w}, \xi_2\tilde{l}, \xi_2\tilde{x}, \xi_2\tilde{n}, \xi_2\tilde{s}, \xi_2\tilde{u}, \xi_2\tilde{t}$
- $\xi_3\tilde{j}, \xi_3\tilde{t}, \xi_3\tilde{q}$
- $\tilde{u}\tilde{j}, \tilde{u}\tilde{t}, \tilde{u}\tilde{r}, \tilde{u}\tilde{q}, \tilde{u}\tilde{v}, \tilde{u}\tilde{k}, \tilde{u}\tilde{y}, \tilde{u}\tilde{m}, \tilde{u}\tilde{p}, \tilde{u}\tilde{w}, \tilde{u}\tilde{l}, \tilde{u}\tilde{x}, \tilde{u}\tilde{n}$
- $\tilde{t}\tilde{r}, \tilde{t}\tilde{q}, \tilde{t}\tilde{v}, \tilde{t}\tilde{k}, \tilde{t}\tilde{y}, \tilde{t}\tilde{m}, \tilde{t}\tilde{p}, \tilde{t}\tilde{w}, \tilde{t}\tilde{l}, \tilde{t}\tilde{x}, \tilde{t}\tilde{n}$
- $\tilde{o}\tilde{v}, \tilde{o}\tilde{k}, \tilde{o}\tilde{y}, \tilde{o}\tilde{m}, \tilde{o}\tilde{p}, \tilde{o}\tilde{w}, \tilde{o}\tilde{l}, \tilde{o}\tilde{x}, \tilde{o}\tilde{n}, \tilde{o}\tilde{s}$
- $\tilde{r}\tilde{j}, \tilde{r}\tilde{q}, \tilde{r}\tilde{k}, \tilde{r}\tilde{y}, \tilde{r}\tilde{m}, \tilde{r}\tilde{p}, \tilde{r}\tilde{w}, \tilde{r}\tilde{l}, \tilde{r}\tilde{x}, \tilde{r}\tilde{n}, \tilde{r}\tilde{s}$
- $\tilde{q}\tilde{k}, \tilde{q}\tilde{y}, \tilde{q}\tilde{m}, \tilde{q}\tilde{p}, \tilde{q}\tilde{w}, \tilde{q}\tilde{l}, \tilde{q}\tilde{x}, \tilde{q}\tilde{n}, \tilde{q}\tilde{s}$
- $\tilde{v}\tilde{y}, \tilde{v}\tilde{m}, \tilde{v}\tilde{p}, \tilde{v}\tilde{w}, \tilde{v}\tilde{l}, \tilde{v}\tilde{x}, \tilde{v}\tilde{n}, \tilde{v}\tilde{s}$
- $\tilde{k}\tilde{m}, \tilde{k}\tilde{p}, \tilde{k}\tilde{w}, \tilde{k}\tilde{l}, \tilde{k}\tilde{x}, \tilde{k}\tilde{n}, \tilde{k}\tilde{s}$
- $\tilde{y}\tilde{p}, \tilde{y}\tilde{w}, \tilde{y}\tilde{l}, \tilde{y}\tilde{x}, \tilde{y}\tilde{n}, \tilde{y}\tilde{s}$
- $\tilde{m}\tilde{w}, \tilde{m}\tilde{l}, \tilde{m}\tilde{x}, \tilde{m}\tilde{n}, \tilde{m}\tilde{s}$
- $\tilde{p}\tilde{l}, \tilde{p}\tilde{x}, \tilde{p}\tilde{n}, \tilde{p}\tilde{s}$
- $\tilde{w}\tilde{x}, \tilde{w}\tilde{n}, \tilde{w}\tilde{s}$
- $\tilde{l}\tilde{n}, \tilde{l}\tilde{s}$
- $\tilde{x}\tilde{s}$

Сопоставляя соотношения Стенли-Райснера и мультипликативные соотношения третьего типа в кольце когомологий по Килю, видим, что в идеале Стенли-Райснера их больше.

Выпишем соотношения, которые присутствуют только в идеале Стенли-Райснера.

$\tilde{u}\tilde{q}, \tilde{u}\tilde{k}, \tilde{u}\tilde{m}, \tilde{u}\tilde{x}, \tilde{t}\tilde{r}, \tilde{t}\tilde{k}, \tilde{t}\tilde{y}, \tilde{t}\tilde{n}, \tilde{o}\tilde{p}, \tilde{o}\tilde{w}, \tilde{r}\tilde{m}, \tilde{r}\tilde{l}, \tilde{r}\tilde{x}, \tilde{q}\tilde{y}, \tilde{q}\tilde{n}, \tilde{v}\tilde{m}, \tilde{v}\tilde{w}, \tilde{v}\tilde{n}, \tilde{k}\tilde{w}, \tilde{k}\tilde{x}, \tilde{y}\tilde{p}, \tilde{y}\tilde{l}, \tilde{m}\tilde{s}, \tilde{p}\tilde{x}, \tilde{p}\tilde{n}, \tilde{w}\tilde{s}, \tilde{l}\tilde{s}$

## 9.4 Соотношения второго типа

При умножении образующих вида $[ij|klmn]$ на образующие вида $[ijk|lmn]$, получаем следующую систему независимых соотношений

$n^2 + tn + qn - xn, n^2 + pn + tn - vn, n^2 + pn + qn - sn$
$o^2 + qo + to - wo, o^2 + qo + po - ro, o^2 + po + to - uo$
$q^2 + nq + oq - lq, q^2 + yq + oq - vq, q^2 + nq + yq - uq$
$t^2 + ot + nt - kt, t^2 + ot + yt - st, t^2 + nt + yt - rt$
$p^2 + op + yp - xp, p^2 + op + np - mp, p^2 + np + yp - wp$
$y^2 + py + qy - ky, y^2 + py + ty - ly, y^2 + qy + ty - my$
$tr + or = lr + xr = mr + vr$
$ns + ts = ls + ws = ms + su$
$ou + qu = ku + xu = mu + su$
$qv + nv = kv + vw = mv + rv$
$ow + pw = kw + vw = lw + sw$
$nx + px = kx + ux = lx + rx$
$ql + yl = rl + xl = sl + wl$
$pm + ym = rm + vm = sm + um$
$tk + yk = uk + xk = vk + wk$

## 9.5 Гипотеза

Невозможность установить взаимно-однозначное соответствие между свободными образующими колец когомологий по Килю и по вееру служит хорошей предпоссылкой к невозможности установить изоморфизм между соответствующими кольцами когомологий. Также огромное количество результатов, не указанных в данной работе, дают основание предполагать, что $\overline{M_{0,6}}$ не является торическим многообразием. Однако, поиски строго доказательства данного утверждения пока продолжаются.

## Список литературы

[1] V. Buchstaber and T. Panov, “Toric topology,” Mathematical Surveys and Monographs, 204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015, 10 2012

[2] Казарян М.Э., Ландо С.К., Прасолов В.В. Алгебраические кривые. По направлению к пространствам модулей, МЦНМО, 2019

[3] В. М. Бухштабер, С. Терзич, Основания (2n, k)- многообразий, Матем. сб., 2019, том 210, номер 4, 41–86