

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
М.В.ЛОМОНОСОВА"**

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

КУРСОВАЯ РАБОТА

**Компактификация Делиня-Мамфорда пространства модулей и
торические многообразия**

Выполнил студент 503 группы
Витковский Андрей Владиславович

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Т.Е. Панов

Москва, 2024 г.

1 Введение

В данной работе приводится построение кольца когомологий пространства $\overline{M}_{0,5}$, а также приводится некоторое сравнение пространства $\overline{M}_{0,5}$ с соответствующим торическим многообразием, кольцо когомологий которого изоморфно построенному.

Выдвигаются две гипотезы

- (1) $\overline{M}_{0,n}$ в компактификации Делиня-Мамфорда является торическим многообразием;
- (2) Существует торическое многообразие, кольцо когомологий которого совпадает с кольцом когомологий $\overline{M}_{0,n}$;

первая из которых опровергается на примере $M_{0,6}$, а по направлению к ответу на вторую приводятся некоторые рассуждения, которые, однако, пока не дают возможности дать однозначный ответ.

Пространства модулей $\overline{M}_{0,n}$, в отличие от пространств модулей кривых положительного рода, являются не орбифолдом, а гладким многообразием.

Реализовав всякую рациональную кривую с n отмеченными точками как кривую в проективном пространстве размерности $n - 2$, проходящую через фиксированный набор из n точек в общем положении, компактифицировать пространство модулей можно просто добавлением точек, соответствующих вырождениям кривых Веронезе.

При подобной компактификации кольцо когомологий $H^*(\overline{M}_{0,n})$ порождается образующими $[D]$, которые соответствуют некоторому неупорядоченному разбиению множества индексов отмеченных точек, по модулю аддитивных соотношений R_{ijkl} и мультипликативных соотношений $[D][D'] = 0$ для любых несовместимых разбиений D и D' .

Более детально данные соотношения будут рассмотрены ниже.

2 Аксиоматическое определение пространства модулей

Определение 0.1. Грубым пространством модулей кривых рода g будем называть тройку $(\mathfrak{C}_{g,0}, M_{g,0}, \pi : \mathfrak{C}_{g,0} \rightarrow M_{g,0})$, которая состоит из двух комплексных орбифолдов и отображения из первого во второй, такая что: (1) каждый слой $\pi^{-1}(b), b \in M_{g,0}$ - результат факторизации гладкой комплексной кривой рода g по группе ее автоморфизмов, (2) каждая кривая рода g встречается в качестве слоя этого отображения в точности один раз, (3) для каждого голоморфного семейства $p : E \rightarrow B$, слои которого - результаты факторизации гладких комплексных кривых рода g по группам их автоморфизмов, существуют голоморфные отображения $E \rightarrow \mathfrak{C}_{g,0}$ и $B \rightarrow M_{g,0}$, где первое отображение - послойный изоморфизм, образующие с проекциями π и p коммутативный квадрат.

Если же у нас есть отмеченные точки, то в тройку следует добавить набор из n сечений $\sigma_i : M_{g,n} \rightarrow \mathfrak{C}_{g,n}$, отвечающих отмеченным точкам, а точнее, отмеченная точка x_i в слое

$\pi^{-1}(b)$ - это значение $\sigma_i(b)$ сечения σ_i в точке b .

Таким образом, мы добились того, что точки пространства модулей взаимно однозначно соответствуют классам биголоморфной эквивалентности комплексных кривых, а на всем пространстве получили топологию и комплексную структуру.

3 Индуктивное построение пространства модулей

Фиксируем на $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ координату и берем $M_{0,n} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. В каждом одномерном слое проекции на первый сомножитель выкалываем x_1, \dots, x_n , при этом допустим, что координаты первых трех точек равны соответственно $\infty, 0, 1$. Тогда координаты остальных точек однозначно определяются классом проективной эквивалентности всех точек.

n отмеченных точек задают n сечений прямого произведения

$$\sigma_i : M_{0,n} \rightarrow M_{0,n} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1.$$

Дополнения к сечениям естественно изоморфно пространству $M_{0,n+1}$.

4 Компактификация Делиня-Мамфорда пространства модулей рациональных кривых

Зададим кривую как образ вложения, а именно отобразим проективную прямую в проективное пространство $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-2}$:

$$(t_0 : t_1) \mapsto (t_0^{n-2} : t_0^{n-2}t_1 : t_0^{n-3}t_1^2 : \dots : t_1^{n-2})$$

Степень кривой равна $n-2$, а отображение называется отображением Веронезе. Образы любых n различных точек на проективной прямой находятся в общем положении. Кривыми Веронезе или рациональными нормальными кривыми называем результаты проективных преобразований образа отображения.

Теорема 0.2. Семейство кривых Веронезе, проходящих через точки x_1, \dots, x_n в общем положении в $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-2}$, изоморфно пространству модулей $M_{0,n}$.

Доказательство можно найти в [2, стр.207]

Попробуем компактифицировать полученное таким образом пространство.

Пример 0.3. ($\overline{M}_{0,4}$) Пусть $n = 4$. Возьмем все плоские коники (включая особые), проходящие через эти четыре точки. Особых коник три, все они представляют собой пару прямых, попарно соединяющих точки. Мы получили замыкание $M_{0,4}$ в виде проективной прямой в пространстве однородных форм степени 2 на плоскости. Прямая состоит из форм, зануляющихся на каждой из x_1, x_2, x_3, x_4 . Это и назовем $\overline{M}_{0,4}$.

Назовем неприводимыми компонентами особой кривой конечный набор рациональных кривых, некоторые из которых попарно пересекаются.

Особой кривой можно сопоставить модулярный граф, вершины которого соответствуют неприводимым компонентам, а ребра отвечают их пересечению.

Если граф оказался деревом, то набор кривых назовем рациональной подальной кривой.

Определение 0.4. Рациональная подальная кривая с n отмеченными точками называется модулярно стабильной, если (1) ни одна из отмеченных точек не лежит в пересечении неприводимых компонент кривых и (2) группа автоморфизмов кривой конечна.

Условие (2) эквивалентно тому, что на каждой неприводимой компоненте есть хотя бы три специальные точки, будь то отмеченные или точки пересечения.

Пример 0.5. $(\overline{M}_{0,5})$ Рассмотрим компактификацию $M_{0,5}$. Через первые две точки x_1, x_2 проведем прямую. Она пересечет плоскость, проходящую через x_3, x_4, x_5 в точке, отличной от исходных отмеченных. Для построения особой кривой осталось провести конику через точку пересечения и x_3, x_4, x_5 .

Теорема 0.6. *Каждая стабильная рациональная кривая с n отмеченными точками единственным образом реализуется как модулярно стабильная кривая, проходящая через набор точек x_1, \dots, x_n в общем положении в $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-2}$.*

Доказательство можно найти в [2, стр.209-210]

Описанная компактификация называется компактификацией Делиня-Мамфорда.

5 Про многочлены Пуанкаре

Многочлен Пуанкаре компактного топологического пространства –

$$P_X(t) = b_d t^d + \dots + b_0,$$

где b_i - i -е число Бетти пространства X , $d = \dim X$.

$$P_{\mathbb{C}\mathbb{P}^1}(t) = t^2 + 1$$

Можно определить **мотивный многочлен** Пуанкаре разности двух компактных алгебраических многообразий:

$$P_X(t) = P_{X_1}(t) - P_{X_2}(t), \quad X = X_1 \setminus X_2$$

Данное определение корректно - любые два представления пространства X в виде разности компактных алгебраических многообразий приводят к одному и тому же мотивному многочлену Пуанкаре.

Многочлен Пуанкаре естественно ведет себя относительно прямого произведения:

$$P_{\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1}(t) = (1 + t^2)^2$$

При индуктивном построении пространства модулей мы получали отображение забывания

$\pi : M_{0,n+1} \rightarrow M_{0,n}$, расслаивающее пространство модулей над предыдущим. Каждый слой отображения - рациональная кривая с n проколами, поэтому мы можем посчитать

$$P_{M_{0,n}}(t) = (t^2 - 2)(t^2 - 3) \dots (t^2 - n + 3)$$

как произведение многочленов Пуанкаре слоя и базы.

Пример 0.7. Посчитаем многочлен Пуанкаре для $\overline{M_{0,5}}$:

$\overline{M_{0,5}}$ является непересекающимся объединением пространства модулей гладких кривых $M_{0,5}$, десяти пространств модулей стабильных кривых с одной особой точкой $M_{0,3} \times M_{0,4}$ и пятнадцати пространств модулей стабильных кривых с двумя особыми точками $M_{0,3} \times M_{0,3}$. Многочлен Пуанкаре же выглядит как

$$P_{\overline{M_{0,5}}} = P_{M_{0,5}} + 10P_{M_{0,3}}P_{M_{0,4}} + 15P_{M_{0,3}}^2 = (t^2 - 2)(t^2 - 3) + 10(t^2 - 2) + 15 = t^4 + 5t^2 + 1.$$

Пример 0.8. Аналогично можно посчитать многочлен Пуанкаре для $\overline{M_{0,6}}$:

$\overline{M_{0,6}}$ является непересекающимся объединением пространства модулей гладких кривых $M_{0,6}$, пятнадцати пространств модулей стабильных кривых с одной особой точкой вида $M_{0,3} \times M_{0,5}$, десяти пространств модулей стабильных кривых с одной особой точкой вида $M_{0,4} \times M_{0,4}$, ста пяти пространств модулей стабильных кривых с двумя особыми точками вида $M_{0,3} \times M_{0,3} \times M_{0,4}$ и ста пяти пространств модулей стабильных кривых с тремя особыми точками $M_{0,3} \times M_{0,3} \times M_{0,3} \times M_{0,3}$.

$$P_{\overline{M_{0,6}}} = P_{M_{0,6}} + 15P_{M_{0,3}}P_{M_{0,5}} + 10P_{M_{0,4}}^2 + 105P_{M_{0,3}}^2P_{M_{0,4}} + 105P_{M_{0,3}}^4 = t^6 + 16t^4 + 16t^2 + 1.$$

6 Явная конструкция пространства $\overline{M_{0,5}}$

Возьмем $\overline{M_{0,4}} \times \mathbb{CP}^1$. Зафиксируем на прямой координату, в которой координаты первых трех отмеченных точек равны $\infty, 0, 1$. Получим три попарно непересекающихся структурных сечения $\sigma_i : \overline{M_{0,4}} \rightarrow \overline{M_{0,4}} \times \mathbb{CP}^1, i = 1, 2, 3$. Тогда четвертое сечение, отвечающее x_4 , пересекает каждое из первых трех трансверсально в точке. Если теперь раздуть на поверхности $\overline{M_{0,4}} \times \mathbb{CP}^1$ каждую из трех точек пересечения, мы получим в точности $\overline{M_{0,5}}$: после вклейки трех двумерных циклов многочлен Пуанкаре из $1 + 2t^2 + t^4$ превращается в $1 + 5t^2 + t^4$, что согласуется с многочленом Пуанкаре пространства модулей $\overline{M_{0,5}}$, а в геометрическом представлении $\overline{M_{0,5}}$ оказывается как раз разбито на ранее установленные части, т.е. пространство $M_{0,5}$ как дополнение к четырем сечениям; десять экземпляров пространства $M_{0,3} \times M_{0,4}$ как четыре сечения и три проколотых особых слоя проекции раздутой поверхности на множитель $\overline{M_{0,4}}$, каждый из которых есть объединение двух проколотых прямых; и пятнадцать точек попарного пересечения замыканий этих десяти проколотых прямых.

7 Кольцо когомологий по Килью пространства $\overline{M}_{0,n}$

Пусть $D = A \sqcup B$ - неупорядоченное разбиение множества индексов отмеченных точек $1, 2, \dots, n$ на два непересекающихся подмножества, причем в каждом есть хотя бы два элемента. Стабильные рациональные кривые, состоящие из двух неприводимых компонент, расположение точек на которых соответствует разбиению D , образуют подмногообразие комплексной коразмерности 1 в $\overline{M}_{0,n}$. Его замыкание - гладкое компактное комплексное подмногообразие коразмерности 1, изоморфное прямому произведению многообразий $\overline{M}_{0,|A|+1}$ и $\overline{M}_{0,|B|+1}$. Тогда $[D] \in H^2(\overline{M}_{0,n})$.

Теорема 0.9. *Классы $[D]$ порождают кольцо когомологий $H^*(\overline{M}_{0,n})$.*

Однако на $[D]$ есть линейные соотношения R_{ijkl} . Чтобы их установить, рассмотрим забывающее отображение $\overline{M}_{0,n} \rightarrow \overline{M}_{0,4}$, которое забывает все отмеченные точки, кроме x_i, x_j, x_k, x_l , а ставшие ввиду забывания нестабильными компоненты кривой стягивает в точку. Тогда соотношения имеют вид

$$R_{ijkl} : [ij\mathfrak{D}kl] = [ik\mathfrak{D}jl] = [il\mathfrak{D}jk],$$

где $[ij\mathfrak{D}kl] \in H^2(\overline{M}_{0,n})$ - сумма тех образующих D , в которых индексы i, j и k, l лежат в разных частях разбиения.

Также будем говорить, что

$$[D][D'] = 0,$$

если D и D' - два несовместимых разбиения, то есть не допускающих разбиения на три попарно не пересекающихся подмножества A, B, C , таких что

$$D = (A \sqcup B) \sqcup C, \quad D' = A \sqcup (B \sqcup C),$$

Теорема 0.10. *Кольцо когомологий $H^*(\overline{M}_{0,n})$ порождено образующими $[D]$ по модулю аддитивных соотношений R_{ijkl} и мультипликативных соотношений $[D][D'] = 0$ для любых несовместимых разбиений D и D' .*

Доказательство этого факта сводится к построению отображения $\pi_1 : \overline{M}_{0,n+1} \rightarrow \overline{M}_{0,n} \times \overline{M}_{0,4}$ как композиции последовательных раздутий вдоль объединения всех подмногообразий, отвечающих упорядоченным разбиениям $D = A \sqcup B$, часть B которых состоит из последовательно $k = 2, 3, \dots, n - 2$ элементов.

8 Кольцо когомологий $\overline{M}_{0,5}$

В качестве примера посчитаем кольцо когомологий пространства $\overline{M}_{0,5}$.

Обозначим десять образующих

$$[12|345], [13|245], [14|235], [15|234], [23|145], [24|135], [25|134], [34|125], [35|124], [45|123]$$

через

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, k$$

соответственно.

Тогда линейные соотношения будут иметь вид

$$\begin{aligned} a + h &= b + f = c + e \\ a + i &= b + g = d + e \\ a + k &= c + g = d + f \\ b + k &= c + i = d + h \\ e + k &= f + i = g + h \end{aligned}$$

что после приведения дает вид

$$\begin{aligned} a &= d + g + h - i - k \\ b &= d + h - k \\ c &= d + h - i \\ e &= g + h - k \\ f &= g + h - i \end{aligned}$$

На будущее запишем соответствующую приведенную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

где столбцы соответствуют порождающим $a, b, c, e, f, d, g, h, i, k$.

Мультипликативные соотношения можно представить через граф Петерсена (см. Рис. 1):

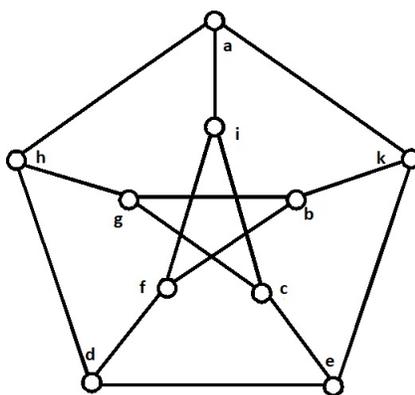


Рис. 1. Граф Петерсена; ребрами соединены совместимые разбиения

Тогда кольцо когомологий пространства $\overline{M_{0,5}}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} H^*(\overline{M_{0,5}}) &= \mathbb{Z}[a, b, c, d, e, f, g, h, i, k] / \\ &(a - d - g - h + i + k, b - d - h + k, c - d - h + i, e - d - h + i, f - g - h + i, \\ &ab, ac, ad, ae, af, ag, bc, bd, be, bh, bi, cd, cf, ch, ck, dg, di, dk, ef, eg, eh, ei, fg, fh, fk, gi, gk, hi, hk, ik) \end{aligned}$$

Если подставить линейные соотношения в мультипликативные, получим следующий вид:

$$H^*(\overline{M_{0,5}}) = \mathbb{Z}[d, g, i, k, h] / (dg, di, dk, gi, gk, hi, ik, k^2 + gh, i^2 + gh, h^2 + gh, d^2 + dh, g^2 + gh, gh - dh)$$

9 Небольшое замечание

Заметим, что кольцо когомологий полученного $\overline{M_{0,5}}$ очень напоминает кольцо когомологий торического многообразия, построенного по многограннику.

Пока что исключим из рассмотрения пространства $\overline{M_{g,n}}$ с положительным родом g , так как тогда мы не вправе ожидать, что пространство модулей будет многообразием.

Выдвинем две гипотезы:

- (1) $\overline{M_{0,n}}$ в компактификации Делиня-Мамфорда является торическим многообразием.
- (2) Существует торическое многообразие, кольцо когомологий которого совпадает с кольцом когомологий $\overline{M_{0,n}}$.

9.1 Опровержение первой гипотезы

Убедиться, что первая гипотеза неверна, можно уже на примере $\overline{M_{0,6}}$.

По многочлену Пуанкаре $t^6 + 16t^4 + 16t^2 + 1$, коэффициенты которого являются числами Бетти, можем найти f -вектор некоего многогранника, который был бы многогранником моментов, если бы $\overline{M_{0,6}}$ было торическим.

f -вектор оказывается равен $(1, 19, 51, 34)$.

Значит, наш трехмерный многогранник должен иметь 34 двумерные грани.

Однако, в компактификации Делиня-Мамфорда $\overline{M_{0,6}}$ состоит из непересекающегося объединения различных произведений $M_{0,3}, M_{0,4}$ и $M_{0,5}$.

$M_{0,3}$ соответствует точка, $M_{0,4}$ - отрезок.

Посмотрим на многогранник, соответствующий $\overline{M_{0,5}}$.

По многочлену Пуанкаре восстановим f -вектор $(1, 7, 7)$, то есть мы имеем дело с двумерным семиугольником (см. Рис. 2), что неудивительно, так как $\overline{M_{0,5}}$ мы получали раздутием $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ в трех точках, что эквивалентно тому, что мы срезали у квадрата три угла.

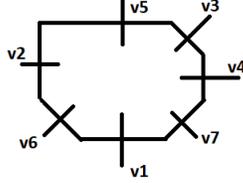


Рис. 2. Семиугольник и его нормальный веер

По нормальному вееру полученного семиугольника получим кольцо когомологий:

$$H^*(P) = \mathbb{Z}[v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7] / \\ (v_1 - v_2 + v_4 - v_5 + 2v_7, v_3 - v_2 + v_4 - v_6 + v_7, \\ v_1v_2, v_1v_5, v_1v_3, v_1v_4, v_6v_5, v_6v_3, v_6v_4, v_6v_7, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_7, v_5v_4, v_5v_7, v_3v_7)$$

Если подставить линейные соотношения в мультипликативные соотношения Стенли-Райснера и сделать замену $\gamma = v_4 + v_7$, получим следующий вид:

$$H^*(P) = \mathbb{Z}[v_2, \gamma, v_5, v_6, v_7] / \\ (v_2^2 + v_2v_5, \gamma^2 + v_2v_5, v_5^2 + v_2v_5, v_6^2 + v_2v_6, \\ v_5v_6, v_6\gamma, v_6v_7, v_2\gamma, v_2v_4, v_5\gamma, v_5v_7, v_7\gamma, v_2v_5 - v_2v_6)$$

Замечание 0.11. Можно заметить, что полученное кольцо когомологий имеет абсолютно тот же вид, что и в описании кольца когомологий $\overline{M}_{0,5}$ по Килью:

$$\begin{aligned} g &\mapsto v_5 \\ h &\mapsto v_2 \\ d &\mapsto v_6 \\ i &\mapsto \gamma \\ k &\mapsto v_4 \end{aligned}$$

При этом $\overline{M}_{0,5}$, как раздутие $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ в трех точках, гомеоморфно торическому многообразию, многогранником которого является вышеуказанный семиугольник.

Поэтому в многограннике, соответствующему $\overline{M}_{0,6}$ в предположении, что оно является торическим многообразием, двумерными гранями могут быть только четырехугольники или семиугольники.

Однако, многогранник также должен быть простым, и для него должно выполняться следующее из формулы Эйлера уравнение:

$$3p_3 + 2p_4 + p_5 = 12 + \sum_{k \geq 7} (k - 6)p_k,$$

где p_i - количество граней размерности i .

Тогда получаем, что в нашем многограннике

$$2p_4 - p_7 = 12$$

Складывая полученное уравнение с условием

$$p_4 + p_7 = 34,$$

получаем, что

$$3p_4 = 46,$$

то есть p_4 оказывается не целым.

Противоречие.

Таким образом, в компактификации Делиня-Мамфорда $\overline{M}_{0,6}$ торическим быть не может.

9.2 Вторая гипотеза

В процессе опровержение первой гипотезы на примере $\overline{M}_{0,6}$, мы попутно построили торическое многообразие, кольцо когомологий которого совпадает с кольцом когомологий пространства $\overline{M}_{0,5}$. В дальнейшем, в случае если гипотеза верна, планируется найти алгоритм построения подобных торических многообразий.

Список литературы

- [1] V. Buchstaber and T. Panov, "Toric topology," Mathematical Surveys and Monographs, 204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015, 10 2012
- [2] Казарян М.Э., Ландо С.К., Прасолов В.В. Алгебраические кривые. По направлению к пространствам модулей, МЦНМО, 2019